文章编号: 1000_0887(2007) 02_0209_07

含两组状态变量且参数具有对称性的等变分歧问题及其开折的稳定性*

崔登兰[1,2], 李养成[1]

(1. 中南大学 数学科学与计算技术学院, 长沙 410083;
2. 湖南师范大学 数学与计算机科学学院, 长沙 410081)

(郭兴明推荐)

摘要: 基于奇点理论中光滑映射芽的接触等价关系, 讨论含两组状态变量且分歧参数带有对称性的等变分歧问题及其开折的稳定性, 得到了一些基本结果, 并且用横截性条件刻划了等变分歧问题的稳定性.

关 键 词: 等变分歧问题; 开折; 稳定; 无穷小稳定
中图分类号: O189.3; O177.91 文献标识码: A

引 言

对光滑映射芽的各种稳定性的讨论是奇点理论的一个重要部分. 利用奇点理论的技巧, 文献[1_3] 讨论了等变分歧问题及其开折的稳定性. 需指出的是, 上述文献中对分歧问题的诸状态变量“平等”对待而未加区分, 且未考虑分歧参数的对称性. 本文将状态变量分为两组, 属于同一组的诸状态变量可以独立变化, 而属于另一组的诸状态变量在变化过程中依赖于前一组中诸状态变量, 并且允许分歧参数带有与状态变量可能不同的对称性. 因而, 本文所得的稳定性结论可视为文献[1_3] 中相应结论的进一步深入.

1 预 备 知 识

设紧 Lie 群 Γ 与 Δ 分别线性作用在$R^{n+m} = R^n \times R^m$ 与R^k 上, $R^n \times \{0\}$ 与$\{0\} \times R^m$ 均为 Γ_不变子空间. 函数芽 $g: (R^{n+m} \times R^k, (0, 0)) \to \mathbf{R}$ 称为(Γ, Δ)_不变的是指:

$$g(\gamma z, \delta\lambda) = g(z, \lambda),$$
$$\forall z = (x, y) \in (R^n \times R^m, (0, 0)), \lambda \in (R^k, 0), \gamma \in \Gamma, \delta \in \Delta, \tag{1}$$

其中 $\gamma z = (\gamma x, \gamma y)$. 所有这样的函数芽组成的环记为 $\varepsilon_{x, y, \lambda}(\Gamma, \Delta)$, $\mu_{x, y, \lambda}(\Gamma, \Delta)$ 为其极大理想.

---

* 收稿日期: 2005_06_08; 修订日期: 2006_11_13
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10671002); 湖南省自然科学基金资助项目(04JJ3072); 湖南省教育厅基金资助项目(04C383)
作者简介: 崔登兰(1970—), 女, 湖南常德人, 讲师, 博士(联系人. + 86_731_8833576; E_mail: cuidl88ji@yahoo.com.cn).

映射芽 $f:(R^n\times R^m\times R^k,(0,0,0))\to R^p$ 称为 (Γ,Δ)-等变的是指

$$f(\gamma x,\gamma y,\delta\lambda)=\gamma f(x,y,\lambda),$$
$$\forall x\in(R^n,0),\ y\in(R^m,0),\ \lambda\in(R^k,0),\ \gamma\in\Gamma,\ \delta\in\Delta. \tag{2}$$

所有这样的映射芽组成的空间记为 $\boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)$，当 $p=n$ 时简记为 $\boldsymbol{E}_{n,m,k}(\Gamma,\Delta)$.

记 $\boldsymbol{M}_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)=\left\{f\in\boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)\mid f(0)=0\right\}$.

定义 1.1 含两组状态变量的 k-参数 (Γ,Δ)-等变分歧问题(以下简称等变分歧问题)是指映射芽 $f\in\boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)(n+m\geqslant p)$，满足 $f(0)=0,(D_zf)_0=0$. 其中 D_zf 表示 f 对 $z=(x,y)$ 的导数，x、y 为状态变量，$\lambda=(\lambda_1,\cdots,\lambda_k)$ 为分歧参数.

设 $S:(R^n\times R^m\times R^k,0)\to gl(R^p)$ 是一个 $p\times p$ 矩阵值映射芽，满足条件

$$S(\gamma x,\gamma y,\delta\lambda)=\gamma S(x,y,\lambda)\gamma^{-1},$$
$$\forall x\in(R^n,0),\ y\in(R^m,0),\ \lambda\in(R^k,0),\ \gamma\in\Gamma,\ \delta\in\Delta. \tag{3}$$

记 $E_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)=\left\{S:(R^n\times R^m\times R^k,0)\to gl(R^p)\mid S\ 满足(3)\right\}$. 由文献[4]定理 XII6.8 可知，$\boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)$ 和 $E_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)$ 均为环 $\varepsilon_{x,y,\lambda}(\Gamma,\Delta)$ 上的有限生成模.

类似地，$\varepsilon_\lambda(\Delta)$-模 $\boldsymbol{E}_k(\Delta)$ 定义为

$$\boldsymbol{E}_k(\Delta)=\left\{\Lambda:(R^k,0)\to R^k\mid\Lambda(\delta\lambda)=\delta\Lambda(\lambda),\ \forall\lambda\in(R^k,0),\ \delta\in\Delta\right\}.$$

将 $(R^n,0)$ 中所有 Γ-等变线性映射芽组成的空间记为 $L^\Gamma(R^n)$，$L^\Gamma(R^n)\cap GL(R^n)$ 中含单位元的连通分支记为 $L^\Gamma(R^n)^0$. 群 $\kappa(\Gamma,\Delta)$ 定义为

$$\begin{aligned}\kappa(\Gamma,\Delta)=\Big\{&(S,X,Y,\Lambda)\in E_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)\times\boldsymbol{M}_{n,m,k}(\Gamma,\Delta)\times\\&\boldsymbol{M}_{m,k}(\Gamma,\ )\times\boldsymbol{M}_k(\Delta)\,\Big|\,S(0,0,0)\in L^\Gamma(R^p)^0,(D_xX)_{0,0,0}\in L^\Gamma(R^n)^0,\\&(D_yY)_{0,0}\in L^\Gamma(R^m)^0,(D_\lambda\Lambda)_0\in L^\Delta(R^k)^0\Big\},\end{aligned}$$

其中群作用定义如下:

$$\begin{aligned}&((S_2,X_2,Y_2,\Lambda_2)\cdot(S_1,X_1,Y_1,\Lambda_1))(x,y,\lambda)=\\&\quad(S_1(x,y,\lambda)S_2(X_1(x,y,\lambda),Y_1(y,\lambda),\Lambda_1(\lambda)),\\&\quad X_2(X_1(x,y,\lambda),Y_1(y,\lambda),\Lambda_1(\lambda)),Y_2(Y_1(y,\lambda),\\&\quad\Lambda_1(\lambda)),\Lambda_2(\Lambda_1(\lambda))).\end{aligned}$$

$\kappa(\Gamma,\Delta)$ 称为 (Γ,Δ)-接触等价群，它在 $\boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)$ 上的作用为

$$(S,X,Y,\Lambda)\cdot f(x,y,\lambda)=S(x,y,\lambda)f(X(x,y,\lambda),Y(y,\lambda),\Lambda(\lambda)).$$

$f\in\boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)$ 在 $\kappa(\Gamma,\Delta)$ 作用下的轨道记为 $\kappa(\Gamma,\Delta)\cdot f$. 芽 $f,g\in\boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)$ 称为 (Γ,Δ)-等价的是指它们位于同一轨道.

将 $\kappa(\Gamma,\Delta)$ 在其单位元处的切空间记为 $T\kappa(\Gamma,\Delta)$，则

$$T\kappa(\Gamma,\Delta)\cong E_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)\oplus\boldsymbol{E}_{n,m,k}(\Gamma,\Delta)\oplus\boldsymbol{E}_{m,k}(\Gamma,\Delta)\oplus\boldsymbol{E}_k(\Delta).$$

与 $f\in\boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)$ 相伴的轨道映射定义为

$$\alpha_f:\kappa(\Gamma,\Delta)\to\boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta),\ \alpha_f((S,X,Y,\Lambda))\equiv(S,X,Y,\Lambda)\cdot f. \tag{4}$$

将 $\boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)$ 在 f 处的切空间等同于它自身，则 α_f 的导数为

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\alpha_f:T\kappa(\Gamma,\Delta)\to\boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta),\\&\quad(S,X,Y,\Lambda)\to S\cdot f+(D_xf)X+(D_yf)Y+(D_\lambda f)\Lambda.\end{aligned} \tag{5}$$

从而轨道 $\kappa(\Gamma,\Delta)\cdot f$ 的切空间定义如下:

$$T(f,\Gamma,\Delta)=(\mathrm{d}\alpha_f)(T\kappa(\Gamma,\Delta))=$$

$$\Big\{S\cdot f+(D_xf)X+(D_yf)Y+(D_\lambda f)\Lambda \mid S\in E_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta),$$
$$X\in \boldsymbol{E}_{n,m,k}(\Gamma,\Delta),\ Y\in \boldsymbol{E}_{m,k}(\Gamma,\Delta),\ \Lambda\in \boldsymbol{E}_k(\Delta)\Big\}.$$

分歧问题 $f\in \boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)$ 称为有限 $\kappa(\Gamma,\Delta)$-余维的是指

$$\dim_{\mathbf{R}}\boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)/T(f,\Gamma,\Delta)<+\infty.$$

此时, f 的余维数定义为 $\dim_{\mathbf{R}}\boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)/T(f,\Gamma,\Delta)$, 记为 $\mathrm{codim}_{(\Gamma,\Delta)}f$. 即

$$\mathrm{codim}_{(\Gamma,\Delta)}f=\dim_{\mathbf{R}}\boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)/T(f,\Gamma,\Delta).$$

定义 1.2 等变分歧问题 $f\in \boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)$ 的 l-参数 (Γ,Δ)-开折是指 (Γ,Δ)-等变映射芽 $F(x,y,\lambda,\alpha)\in \boldsymbol{E}_{n,m,k,l;p}(\Gamma,\Delta)$, 满足条件 $F(x,y,\lambda,0)=f(x,y,\lambda)$, 其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)$ 是开折参数.

类似地, 引入下列记号:

$$E_{n,m,k,l;p}(\Gamma,\Delta)=\Big\{S:(R^n\times R^m\times R^k\times R^l,0)\to gl(R^p)\mid S(\gamma x,\gamma y,\delta\lambda,\alpha)=$$
$$\gamma S(x,y,\lambda,\alpha)\gamma^{-1},\ \forall\gamma\in\Gamma,\delta\in\Delta,\alpha\in R^l\Big\}.$$
$$\boldsymbol{E}_{k,l}(\Delta)=\Big\{\Lambda:(R^k\times R^l,0)\to R^k\mid \Lambda(\delta\lambda,\alpha)=\delta\Lambda(\lambda,\alpha),\ \forall\delta\in\Delta\Big\}.$$
$$\kappa_{un}(\Gamma,\Delta)=\Big\{(S,X,Y,\Lambda,A)\in E_{n,m,k,l;p}(\Gamma,\Delta)\times \boldsymbol{M}_{n,m,k,l}(\Gamma,\Delta)\times$$
$$\boldsymbol{M}_{m,k,l}(\Gamma,\Delta)\times \boldsymbol{M}_{k,l}(\Delta)\times M_{l;l}\Big\},$$

其中 $M_{l;l}=\Big\{g:(R^l,0)\to R^l\mid g(0)=0\Big\}$. 并且有

$$T\kappa_{un}(\Gamma,\Delta)\cong E_{n,m,k,l;p}(\Gamma,\Delta)\oplus \boldsymbol{E}_{n,m,k,l}(\Gamma,\Delta)\oplus \boldsymbol{E}_{m,k,l}(\Gamma,\Delta)\oplus$$
$$\boldsymbol{E}_{k,l}(\Delta)\oplus E_{l;l}. \tag{6}$$
$$T_{un}(F,\Gamma,\Delta)=(\mathrm{d}a_F)(T\kappa_{un}(\Gamma,\Delta))=$$
$$\Big\{S\cdot F+(D_xF)X+(D_yF)Y+(D_\lambda F)\Lambda+(D_\alpha F)A\mid S\in E_{n,m,k,l;p}(\Gamma,\Delta),$$
$$X\in \boldsymbol{E}_{n,m,k,l}(\Gamma,\Delta),\ Y\in \boldsymbol{E}_{m,k,l}(\Gamma,\Delta),\ \Lambda\in \boldsymbol{E}_{k,l}(\Delta),A\in E_{l;l}\Big\}.$$

设 $F\in \boldsymbol{E}_{n,m,k,l;p}(\Gamma,\Delta)$, $H\in \boldsymbol{E}_{n,m,k,s;p}(\Gamma,\Delta)$ 是 $f\in \boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)$ 的两个开折, 开折参数分别为 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_l)$, $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_s)$. 若存在 $S\in E_{n,m,k,s;p}(\Gamma,\Delta)$, $X\in \boldsymbol{E}_{n,m,k,s}(\Gamma,\Delta)$, $Y\in \boldsymbol{E}_{m,k,s}(\Gamma,\Delta)$, $\Lambda\in \boldsymbol{E}_{k,s}(\Delta)$ 及映射芽 $A:(R^s,0)\to(R^l,0)$ 满足 $S(x,y,\lambda,0)=I_P(p\times p$-单位矩阵$)$, $X(x,y,\lambda,0)=x$, $Y(y,\lambda,0)=y$, $\Lambda(\lambda,0)=\lambda$, 使得

$$H(x,y,\lambda,\beta)=S(x,y,\lambda,\beta)F(X(x,y,\lambda,\beta),Y(y,\lambda,\beta),\Lambda(\lambda,\beta),A(\beta)), \tag{7}$$

则称 H 可由 F 导出.

定义 1.3 f 的开折 F 称为通用开折是指 f 的任意开折 H 均可由 F 导出. 若 F 是通用开折且所含分歧参数数目最少, 则称 F 为 f 的万有开折, 其中分歧参数的个数称为 f 的 $\kappa(\Gamma,\Delta)$-余维.

f 的开折 F 与 H 称为 $\kappa(\Gamma,\Delta)$-同构的是指 (7) 式成立且 A 为微分同胚.

将阶数小于 r 的偏导数在原点处的值为 0 的 (Γ,Δ)-等变映射芽全体记为 $\theta^r_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)$, 次数小于或等于 r 且不含常数项的 (Γ,Δ)-等变多项式映射全体记为 $\boldsymbol{P}^r_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)$, 则 $\boldsymbol{P}^r_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)=\boldsymbol{M}_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)/\theta^r_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)$. 由文献[5], 定义中介 (Γ,Δ)-等变 r-jet 空间 $j^r_{x,y,\lambda}(\Gamma,\Delta)$ 为 $(R^p)^\Gamma\times \boldsymbol{P}^r_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)$, 其中 $(R^p)^\Gamma$ 表示 R^p 的 Γ-不动点空间. 定义 (Γ,Δ)-等变 r-jet 空间 $J^r_{x,y,\lambda}(\Gamma,\Delta)$ 为 $J^r_{x,y,\lambda}(\Gamma,\Delta)=(R^n)^\Gamma\times(R^m)^\Gamma\times(R^k)^\Delta\times j^r_{x,y,\lambda}(\Gamma,\Delta)$.

给定光滑 (Γ,Δ)-等变映射 $f:R^n\times R^m\times R^k\to R^p$, 令 $f(x,y,\lambda)=f(x+x_0,y+y_0,\lambda+\lambda_0)-f(x_0,y_0,\lambda_0)$, 其中 $x_0\in(R^n)^\Gamma$, $y_0\in(R^m)^\Gamma$, $\lambda_0\in(R^k)^\Delta$, 则 $f\in \boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma,\Delta)$. 由文

献[5]知, f 的中介 r-jet 扩张 $j^r f: (R^n)^\Gamma \times (R^m)^\Gamma \times (R^k)^\Delta \to j^r_{x,y,\lambda}(\Gamma, \Delta)$ 定义为 $j^r_{(x_0, y_0, \lambda_0)}f = (f(x_0, y_0, \lambda_0), j^r_0 f)$, 其中 $j^r_0 f$ 表示 f 在 0 处的 r-jet. f 的 r-jet 扩张 $J^r f: (R^n)^\Gamma \times (R^m)^\Gamma \times (R^k)^\Delta \to J^r_{x,y,\lambda}(\Gamma, \Delta)$ 定义为 $J^r_{(x_0, y_0, \lambda_0)}f = ((x_0, y_0, \lambda_0), j^r_{(x_0, y_0, \lambda_0)}f)$.

将 $\kappa(\Gamma, \Delta)$ 中元素的 r-jets 组成的群记为 $\kappa^r(\Gamma, \Delta)$, 即 $\kappa^r(\Gamma, \Delta) = \left\{(j^r_0 S, j^r_0 X, j^r_0 Y, j^r_0 \Lambda) \mid (S, X, Y, \Lambda) \in \kappa(\Gamma, \Delta)\right\}$. $\kappa(\Gamma, \Delta)$ 在 $\boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta)$ 上的作用诱导出 $\kappa^r(\Gamma, \Delta)$ 在 $j^r_{x,y,\lambda}(\Gamma, \Delta)$ 上的商作用如下:

$$(j^r_0 S, j^r_0 X, j^r_0 Y, j^r_0 \Lambda)\cdot j^r_0 f = j^r_0((S, X, Y, \Lambda)\cdot f).$$

$j^r_0 f$ 在 $\kappa^r(\Gamma, \Delta)$ 作用下的轨道 $\kappa^r_0(\Gamma, \Delta)\cdot f$ 称为 f 的 r-jet 的中介轨道, $j^r_0 f$ 的轨道 $\kappa^r(\Gamma, \Delta)\cdot f$ 定义为 $\kappa^r(\Gamma, \Delta)\cdot f = (R^n)^\Gamma \times (R^m)^\Gamma \times (R^k)^\Delta \times \kappa^r_0(\Gamma, \Delta)\cdot f$.

类似于文献[3]^{202}中引理 3.10.2, 有

引理 1.4 设 $f \in \boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta)$, 将中介轨道 $\kappa_0(\Gamma, \Delta)\cdot f$ 的切空间记为 $T^r_0(f, \Gamma, \Delta)$, 则 $Z \in T^r_0(f, \Gamma, \Delta)$ 当且仅当存在分解 $Z = S\cdot f + (D_x f)X + (D_y f)Y + (D_\lambda f)\Lambda$ modulo $\theta^{r+1}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta)$, 其中 $X \in \boldsymbol{M}_{n,m,k}(\Gamma, \Delta)$, $Y \in \boldsymbol{M}_{m,k}(\Gamma, \Delta)$, $\Lambda \in \boldsymbol{M}_k(\Delta)$.

类似地可定义 $\kappa_{un}(\Gamma, \Delta)$ 中元素的 r-jets 组成的群 $\kappa^r_{un}(\Gamma, \Delta)$, 中介轨道 $\kappa^r_{un,0}(\Gamma, \Delta)\cdot F$ 及 $j^r_0 F$ 的轨道 $\kappa^r_{un}(\Gamma, \Delta)\cdot F$, 其中 F 为 f 的开折.

2 分歧问题的稳定性

分歧问题 $f \in \boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta)$ 的 l-参数开折 F 称为 $\kappa(\Gamma, \Delta)$-平凡的, 是指它 $\kappa(\Gamma, \Delta)$-同构于 f 的 l-参数常值开折 $(x, y, \lambda, \alpha) \to f(x, y, \lambda)$, 即存在 $S \in E_{n,m,k,l;p}(\Gamma, \Delta)$, $X \in \boldsymbol{E}_{n,m,k,l}(\Gamma, \Delta)$, $Y \in \boldsymbol{E}_{m,k,l}(\Gamma, \Delta)$, $\Lambda \in \boldsymbol{E}_{k,l}(\Delta)$, 使得

$$F(x, y, \lambda, \alpha) = S(x, y, \lambda, \alpha)f(X(x, y, \lambda, \alpha), Y(y, \lambda, \alpha), \Lambda(\lambda, \alpha)),$$

其中 $S(x, y, \lambda, 0) = I_p, X(x, y, \lambda, 0) = x, Y(y, \lambda, 0) = y, \Lambda(\lambda, 0) = \lambda$.

定义 2.1 分歧问题 $f \in \boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta)$ 称为 $\kappa(\Gamma, \Delta)$-稳定的, 是指它的所有开折均是 $\kappa(\Gamma, \Delta)$-平凡的.

定义 2.2 分歧问题 $f \in \boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta)$ 称为 $\kappa(\Gamma, \Delta)$-无穷小稳定的, 是指 $\mathrm{d}\alpha_f$ 是满射, 即

$$T(f, \Gamma, \Delta) = \boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta) \text{ 或 } \mathrm{codim}_{(\Gamma, \Delta)} f = 0.$$

这等价于:

$$\forall g(x, y, \lambda) \in \boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta), \exists S \in E_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta),$$
$$X \in \boldsymbol{E}_{n,m,k}(\Gamma, \Delta), Y \in \boldsymbol{E}_{m,k}(\Gamma, \Delta), \Lambda \in \boldsymbol{E}_k(\Delta),$$

使得

$$g(x, y, \lambda) = S(x, y, \lambda)f(x, y, \lambda) + (D_x f)X(x, y, \lambda) + (D_y f)Y(y, \lambda) + (D_\lambda f)\Lambda(\lambda). \tag{8}$$

定理 2.3 设分歧问题 $f \in \boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta)$, 则下列条件等价:

a) f 是 $\kappa(\Gamma, \Delta)$-稳定的;

b) f 是 $\kappa(\Gamma, \Delta)$-无穷小稳定的;

c) 存在实数 q, 使得对某个(从而对任意) $r \geqslant q$, 有 $J^r f$ 与 $\kappa^r(\Gamma, \Delta)\cdot f$ 横截.

为证明这一定理, 先介绍一些引理(本文中未加说明的记号可参看文献[6]).

引理 2.4 记 DA-代数和 Jacobson 理想系 $\left\{(R_{x,y,\lambda,\alpha}, J_{x,y,\lambda,\alpha})\right\} \equiv \left\{(\varepsilon_\alpha, \mu_\alpha), (\varepsilon_{\lambda,\alpha}(\Delta), \mu_\alpha\varepsilon_{\lambda,\alpha}(\Delta)), (\varepsilon_{y,\lambda,\alpha}(\Gamma, \Delta), \mu_\alpha\varepsilon_{y,\lambda,\alpha}(\Gamma, \Delta)), (\varepsilon_{x,y,\lambda,\alpha}(\Gamma, \Delta), \mu_\alpha\varepsilon_{x,y,\lambda,\alpha}(\Gamma, \Delta))\right\}$, 设 M、N 是有限生成的$\left\{R_{x,y,\lambda,\alpha}\right\}$-模, $\Psi: N \to M$ 是$\left\{R_{x,y,\lambda,\alpha}\right\}$上的模同态. 若 $\Psi(N) + \mu_\alpha \cdot M = M$, 则 $\Psi(N) = M$.

这是文献[6][33]中推论 6.16 的特殊情形.

引理 2.5 (见文献[3][196]引理 2.4, 或文献[6][35]引理 7.3) 设 $\varphi: N \to M$ 是有限生成的$\left\{R_{x,y,\lambda}\right\}$-模间的同态, $M_0 \subset M$ 是余维为 s 的$\left\{R_{x,y,\lambda}\right\}$-子模. 则存在数 t, 它依赖于 s 和群作用, 使得 $M_0 \subset \varphi(N) + \left\{(m_{x,y,\lambda})^t\right\} \cdot M_0$ 蕴含 $M_0 \subset \varphi(N)$.

对于 DA-代数系$\left\{R_{x,y,\lambda,\alpha}\right\}$, 有类似的结论.

引理 2.6 设 $f \in \boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta)$, 则下列条件等价:

a) 存在数 t, 使得 $\boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta) \subset T(f, \Gamma, \Delta) + \theta^t_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta)$;

b) $\boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta) = T(f, \Gamma, \Delta)$.

证明 令 $N = T\kappa(\Gamma, \Delta)$, $M = \boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta)$, φ 为轨道映射 a_f 的导数 $\mathrm{d}a_f$, 在引理 2.5 中, 令 $M_0 = M$, 则引理得证.

若 $\boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta) \subset T(f, \Gamma, \Delta) + \theta^t_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta)$, 则称 f 是 t 阶 $\kappa(\Gamma, \Delta)$-无穷小稳定的. 由引理 2.6, 得:

命题 2.7 $f \in \boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta)$ 是 $\kappa(\Gamma, \Delta)$-无穷小稳定的当且仅当 f 是 t 阶 $\kappa(\Gamma, \Delta)$-无穷小稳定的.

下面证明定理 2.3. 首先证明 a) 与 b) 等价.

a) ⇒ b) 设 f 是 $\kappa(\Gamma, \Delta)$-稳定的, 考虑 f 的 1-参数开折 $F(x, y, \lambda, t) = f(x, y, \lambda) + tp(x, y, \lambda)$, 其中 $p \in \boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta)$, 则 F 是 $\kappa(\Gamma, \Delta)$-同构于 f 的 1-参数常值开折 $(x, y, \lambda, t) \to f(x, y, \lambda)$. 故存在 $S \in \boldsymbol{E}_{n,m,k,1;p}(\Gamma, \Delta)$, $X \in \boldsymbol{E}_{n,m,k,1}(\Gamma, \Delta)$, $Y \in \boldsymbol{E}_{m,k,1}(\Gamma, \Delta)$, $\Lambda \in \boldsymbol{E}_{k,1}(\Delta)$, 使得

$$F(x, y, \lambda, t) = S(x, y, \lambda, t) f(X(x, y, \lambda, t), Y(y, \lambda, t), \Lambda(\lambda, t)), \tag{9}$$

其中 $S(x, y, \lambda, 0) = I_p$, $X(x, y, \lambda, 0) = x$, $Y(y, \lambda, 0) = y$, $\Lambda(\lambda, 0) = \lambda$. 上式两端对 t 微分并在 $t = 0$ 处取值, 得 $p(x, y, \lambda) = \dot{S}_t(x, y, \lambda, 0) f(x, y, \lambda) + (D_x f)\dot{X}_t(x, y, \lambda, 0) + (D_y f)\dot{Y}_t(y, \lambda, 0) + (D_\lambda f)\dot{\Lambda}_t(\lambda, 0) \in T(f, \Gamma, \Delta)$. 故 f 是无穷小稳定的.

b) ⇒ a) 设 f 是无穷小稳定的, 即 $\boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta) = T(f, \Gamma, \Delta)$. 对任意正整数 r, 记 F 为 f 的 r-参数常值开折, 则 $F(x, y, \lambda, \alpha) \equiv f(x, y, \lambda)$, 其中 $\alpha \in (R^r, 0)$. 由 Theorem 2.7[7], F 是 f 的通用开折, 从而 f 的任一 r-参数开折 G 都可由 F 导出. 因此, 存在 $S \in E_{n,m,k,r;p}(\Gamma, \Delta)$,

$$X \in \boldsymbol{E}_{n,m,k,r}(\Gamma, \Delta),\ Y \in \boldsymbol{E}_{m,k,r}(\Gamma, \Delta),\ \Lambda \in \boldsymbol{E}_{k,r}(\Delta)$$

及映射芽 $A: (R^r, 0) \to R^r$ 使得

$$\begin{aligned} G(x, y, \lambda, \alpha) &= S(x, y, \lambda, \alpha) F(X(x, y, \lambda, \alpha), Y(y, \lambda, \alpha), \Lambda(\lambda, \alpha), A(\alpha)) = \\ &\quad S(x, y, \lambda, \alpha) f(X(x, y, \lambda, \alpha), Y(y, \lambda, \alpha), \Lambda(\lambda, \alpha)). \end{aligned}$$

这说明 G 是 $\kappa(\Gamma, \Delta)$-平凡的, 从而 f 是 $\kappa(\Gamma, \Delta)$-稳定的.

下证 b) 与 c) 等价.

由于 $J^r_{(x_0, y_0, \lambda_0)} f = ((x_0, y_0, \lambda_0), j^r_{(x_0, y_0, \lambda_0)} f)$, 因此,

$$J^r f \text{ 与 } \kappa^r(\Gamma, \Delta) \cdot f \text{ 横截当且仅当 } j^r f \text{ 与 } \kappa^r_0(\Gamma, \Delta) \cdot f \text{ 横截}. \tag{10}$$

将中介 jet 空间等同于其切空间, 则 $D(j^r f)_{(0,0,0)}: (R^n)^{\Gamma} \times (R^m)^{\Gamma} \times (R^k)^{\Delta} \to j^r_{x,y,\lambda}(\Gamma, \Delta)$ 可表示为

$$D(j^r f)_{(0,0,0)}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = j^r_0[(D_x f)\eta_1 + (D_y f)\eta_2 + (D_\lambda f)\eta_3] \tag{11}$$

或者

$$D(j^r f)_{(0,0,0)}(\eta_1, \eta_2, \eta_3) = (D_x f)\eta_1 + (D_y f)\eta_2 + (D_\lambda f)\eta_3 \text{ modulo } \theta^{r+1}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta). \tag{12}$$

由(10)式及命题 2.7, 只须证明下列条件等价:

d) f 是 t- 阶 $\kappa(\Gamma, \Delta)$- 无穷小稳定的;

e) $j^r f$ 与 $\kappa_0(\Gamma, \Delta) \cdot f$ 横截.

一方面, 由 d) 知, 对所有 $r \geqslant t$ 及任意 $g \in \boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta)$, 有

$$g = S \cdot f + (D_x f)X + (D_y f)Y + (D_\lambda f)\tilde{\Lambda} \text{ modulo } \theta^{r+1}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta),$$

其中 $S \in E_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta)$, $X \in \boldsymbol{E}_{n,m,k}(\Gamma, \Delta)$, $Y \in \boldsymbol{E}_{m,k}(\Gamma, \Delta)$, $\tilde{\Lambda} \in \boldsymbol{E}_k(\Delta)$, 分离出 X、Y、$\tilde{\Lambda}$ 中的常数项, 得

$$X(x, y, \lambda) = X(x, y, \lambda) + \eta_1,\ Y(y, \lambda) = Y(y, \lambda) + \eta_2,\ \tilde{\Lambda}(\lambda) = \Lambda(\lambda) + \eta_3,$$

其中 $X \in \boldsymbol{M}_{n,m,k}(\Gamma, \Delta)$, $Y \in \boldsymbol{M}_{m,k}(\Gamma, \Delta)$, $\Lambda \in \boldsymbol{M}_k(\Delta)$, $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in (R^n)^{\Gamma} \times (R^m)^{\Gamma} \times (R^k)^{\Delta}$. 故 g 又可写为

$$g = S \cdot f + (D_x f)X + (D_y f)Y + (D_\lambda f)\Lambda + (D_x f)\eta_1 + (D_y f)\eta_2 + (D_\lambda f)\eta_3 \text{ modulo } \theta^{r+1}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta). \tag{13}$$

另一方面, 由 e) 知,

$$D(j^r f)_{(0,0,0)}[T_{(0,0,0)}((R^n)^{\Gamma} \times (R^m)^{\Gamma} \times (R^k)^{\Delta})] + T^r_0(f, \Gamma, \Delta) = T_{j^r_{(0,0,0)}f}[j^r_{x,y,\lambda}(\Gamma, \Delta)]. \tag{14}$$

由(12)式及引理 1.4, (14)式可以等价地表示成: 对任意 $g \in \boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta)$, 有

$$g = S \cdot f + (D_x f)X + (D_y f)Y + (D_\lambda f)\Lambda + (D_x f)\eta_1 + (D_y f)\eta_2 + (D_\lambda f)\eta_3 \text{ modulo } \theta^{r+1}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta), \tag{15}$$

其中 $S \in E_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta)$, $X \in \boldsymbol{M}_{n,m,k}(\Gamma, \Delta)$, $Y \in \boldsymbol{M}_{m,k}(\Gamma, \Delta)$, $\Lambda \in \boldsymbol{M}_k(\Delta)$, $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in (R^n)^{\Gamma} \times (R^m)^{\Gamma} \times (R^k)^{\Delta}$. 由于(15)式即(13)式, 所以 d) 与 e) 等价, 因此 b) 与 c) 等价.

3 开折的稳定性

定义 3.1 设 $F(x, y, \lambda, \alpha)$ 是分歧问题 $f \in \boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma, \Delta)$ 的 l- 参数开折, 其中 α 表示开折参数.

1) 设 $G(x, y, \lambda, \alpha, \beta)$ 是 F 的 s- 参数开折, 其中 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ 表示 G 的开折参数, G $\kappa(\Gamma, \Delta)$- 同构于 F 的 s_参数常值开折是指下式成立:

$$G(x, y, \lambda, \alpha, \beta) = S(x, y, \lambda, \alpha, \beta)F(X(x, y, \lambda, \alpha, \beta), Y(y, \lambda, \alpha, \beta), \Lambda(\lambda, \alpha, \beta), \varphi(\alpha, \beta)),$$

其中 $\varphi: (R^l \times R^s, 0) \to (R^l, 0)$ 为光滑映射芽, $S \in E_{n,m,k,l,s;p}(\Gamma, \Delta)$, $X \in \boldsymbol{E}_{n,m,k,l,s}(\Gamma, \Delta)$, $Y \in \boldsymbol{E}_{m,k,l,s}(\Gamma, \Delta)$, $\Lambda \in \boldsymbol{E}_{k,l,s}(\Delta)$ 且 $S(x, y, \lambda, 0) = I_p$, $X(x, y, \lambda, \alpha, 0) = x$, $Y(y, \lambda, \alpha, 0) = y$, $\Lambda(\lambda, \alpha, 0) = \lambda$, $\varphi(\alpha, 0) = \alpha$.

2) 开折 F 称为 $\kappa(\Gamma, \Delta)$- 稳定的是指 F 的任一 s- 参数开折 G $\kappa(\Gamma, \Delta)$- 同构于 F 的 s- 参

数常值开折.

由 $\mathcal{K}_{un}(\Gamma,\ \Delta)$ 与 $\mathcal{K}(\Gamma,\ \Delta)$ 的相似性质知: F 是 $\mathcal{K}(\Gamma,\ \Delta)$- 稳定的等价于 $T_{un}(F,\ \Gamma,\ \Delta) = \boldsymbol{E}_{n,m,k,l;p}(\Gamma,\ \Delta)$, 由文献[7] 中引理 3.1, 这又等价于 F 的通用性, 故有下面的定理.

定理 3.2　设 $F \in \boldsymbol{E}_{n,m,k,l;p}(\Gamma,\ \Delta)$ 是分歧问题 $f \in \boldsymbol{E}_{n,m,k;p}(\Gamma,\ \Delta)$ 的 l- 参数开折, 则下列条件等价:

a) F 是 $\mathcal{K}(\Gamma,\ \Delta)$- 稳定的;

b) $T_{un}(F,\ \Gamma,\ \Delta) = \boldsymbol{E}_{n,m,k,l;p}(\Gamma,\ \Delta)$;

c) F 是通用的.

[参　考　文　献]

[1] Gervais J J. Stability of unfoldings in the context of equivariant contact equivalence[J]. Pacific J Math, 1988, **132**(2): 283_291.

[2] Lari_Lavassani A, Lu Y C. On the stability of equivariant bifurcation problems and their unfoldings [J]. Can Math Bull, 1992, **35**(2): 237_246.

[3] Lari_lavassani A, Lu Y C. Equivariant multiparameter bifurcations via singularity theory[J]. J Dynamics Differential Equations, 1993, **5**(2): 189_218.

[4] Golubitsky M, Stewart I, Schaeffer D C. Singularities and Groups in Bifurcation Theory [M]. Vol **2**. New York: Springer_Verlag, 1988.

[5] Arnold V I, Gusein_Zade S M, Varchenko A N. Singularities of Differentiable Maps [M]. Vol **1**. Basel/ Stuttgart: Birk Hauser, 1985.

[6] Damon J. The unfolaling and determinacy theorem for subgroups of A and K [R]. Vol **50**, No 306. Memoirs AMS 306, Providence: AMS, 1984: 1_88.

[7] CUI Deng_lan, LI Yang_cheng. The unfolding of equivariant bifurcation problems with two types of state variables in the presence of parameter symmetry[J]. Acta Mathematica Sinica A, 2006, **22**(5): 1433_1440.

Stability of Equivariant Bifurcation Problems With Two Types of State Variables and Their Unfoldings in the Presence of Parameter Symmetry

CUI Deng_lan[1,2], LI Yang_cheng[1]

(1. School of Mathematical Science and Computing Technology, Central South University, Changsha 410083, P.R. China;

2. College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha 410081, P.R. China)

Abstract: Based on the contact equivalent relation of smooth map_germs in singularity theory, the stability of equivariant bifurcation problems with two types of state variables and their unfoldings in the presence of parameters symmetry was discussed. Some basic results are obtained. Transversality condition was used to characterize the stability of equivariant bifurcation problems.

Key words: equivariant bifurcation problem; unfolding; stability; infinitesimal stability