

# 微极热弹性无限板的轴对称自由振动<sup>\*</sup>

R·库玛, G·帕塔泊

- (1. 库卢谢特拉大学 数学系, 哈里亚纳邦 库卢谢特拉 136119, 印度;  
2. Dr. B. R. 恩伯德卡国立技术学院 应用数学系, 旁遮普 贾郎达尔, 印度)

(程昌钧推荐)

**摘要:** 研究了在应力自由和刚性固定边界条件下, 无能量耗散的均匀、各向同性微极热弹性无限板的轴对称自由振动波的传播, 导出了相应的对称和斜对称模态波传播的闭合式特征方程和不同区域的特征方程. 对短波的情况, 应力自由热绝缘和等温板中对称和斜对称模态波传播的特征方程退化为 Rayleigh 表面波频率方程. 根据导出的特征方程得到了热弹性、微极弹性和弹性板的结果. 在对称和斜对称运动中计算了板的位移分量幅值、微转动幅值和温度分布, 给出了对称和斜对称模式的频散曲线, 并示出了位移分量和微转动幅值和温度分布的曲线. 能够发现理论分析和数值结论是非常一致的.

**关键词:** 微极热弹性板; 无能量耗散的热弹性理论; 环形波; 对称和斜对称振幅

**中图分类号:** 414.1      **文献标识码:** A

## 引 言

在 19 世纪 60 年代建立的广义热弹性理论消除了经典理论出现的热场中无速度传播的矛盾. 广义热弹性理论认为存在第二声效应, 使得热场中仅出现有限速度传播. 现在有两种不同的广义热弹性理论: 第一种理论由 Lord 和 Shulman<sup>[1]</sup> 提出, 他们发现了傅立叶定律, 这个新定律包含热流矢量和热流矢量对时间的导数, 还包含一个作为弛豫时间的新常数. 第二种理论由 Green 和 Lindsay<sup>[2]</sup> 提出, 这个理论包含两个弛豫时间常数, 它不仅修正了热传导方程而且对所有关联理论的方程进行了修正. 这两种理论都确保了热波以有限速度的传播.

19 世纪 90 年代, Green 和 Naghdi<sup>[3-6]</sup> 提出三种新的热弹性理论, 新理论基于熵等式而非通常的熵不等式. 每种理论中对热流矢量的本构假设都不一样, 从而这三种理论分别称为 I 型热弹性理论、II 型热弹性理论和 III 型热弹性理论. 对 I 型理论线性化得到经典热弹性理论; II 型理论不允许能量耗散, 通常被称为无能量耗散的热弹性理论, 该理论提出了两个耦合双曲线方程, 通过数学分析和物理分析可以阐明该理论的适用性; III 型理论存在有限速度热传输, 但也存在能量耗散的情况.

Chandrasekharaiah<sup>[7-8]</sup> 建立了无能量耗散热弹性理论的唯一性. Scott<sup>[9]</sup> 讨论了热弹性理论

\* 收稿日期: 2006-03-07; 修订日期: 2007-01-12

作者简介: R. 库玛, 教授 (E-mail: rajneesh\_kuk@rediffmail.com);

G. 帕塔泊, 讲师, 博士 (联系人, E-mail: pratapg@nitj.ac.in)

本文原文为英文, 海治译, 程昌钧校.

中非均匀平面波的能量耗散. Chandrasekharaiah<sup>[10]</sup>、Chandrasekharaiah 和 Srinath<sup>[11]</sup> 分别研究了具有圆柱形和球形孔穴无界体中的热弹性波. Iesan<sup>[12]</sup> 研究了无能量耗散的热弹性理论. Quintanilla<sup>[13]</sup> 研究了无能量耗散热弹性中的特殊行为. Wang 和 Slattery<sup>[14]</sup> 研究了初始受力体的无能量耗散的热弹性. Quintanilla<sup>[15]</sup> 研究了非简单材料的无能量耗散热弹性. Kumar 和 Deswal<sup>[16]</sup> 研究了表面波在无能量耗散广义微极热弹性介质的圆柱形孔中的传播. Kumar 和 Deswal<sup>[17]</sup> 还研究了无能量耗散的微极热弹性介质表面波的传播. 本文研究有限厚度、均匀、各向同性、无能量耗散的微极热弹性无限板中环形波的传播, 推导并讨论了微极热弹性 Lamb 波的一般频散方程. 导出不同条件下的特征方程, 在对称和斜对称模式下给出了频散方程的数值解, 并用图示出了位移分量幅值、微转动幅值、和温度分布的曲线.

## 1 基本方程

在无体力、无体力耦、无热源条件下, Eringen<sup>[18]</sup>、Green 和 Naghdi<sup>[5]</sup> 给出了无能量耗散微极热弹性固体的运动方程和本构关系.

$$(\lambda + 2\mu + K) \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - (\mu + K) \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} + K \nabla \times \boldsymbol{\phi} - \nu T = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma) \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\phi}) - \gamma \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\phi}) + K \nabla \times \mathbf{u} - 2K\boldsymbol{\phi} = \vartheta \frac{\partial^2 \boldsymbol{\phi}}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$K^* \nabla^2 T = \rho C^* \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \mathcal{V}_0 \frac{\partial^2 (\nabla \cdot \mathbf{u})}{\partial t^2}, \quad (3)$$

$$t_{kl} = \lambda u_{r,r} \delta_{kl} + \mu (u_{k,l} + u_{l,k}) + K (u_{l,k} - \epsilon_{klr} \phi_r) - \mathcal{V} \delta_{kl}, \quad (4)$$

$$m_{kl} = \alpha \phi_{r,r} \delta_{kl} + \beta \phi_{k,l} + \gamma \phi_{l,k}, \quad (5)$$

其中  $\mathbf{u} = (u_r, u_\theta, u_z)$  为位移分量,  $\boldsymbol{\phi} = (\phi_r, \phi_\theta, \phi_z)$  为微转动向量,  $\lambda, \mu, \alpha, \beta, \gamma, K$  为材料常数,  $\rho$  为密度,  $j$  为微惯量,  $t_{kl}$  和  $m_{kl}$  分别为应力和偶应力分量,  $T$  和  $T_0$  分别为温度的改变量和初始均匀温度,  $\delta_{kl}$  为 Kronecker delta 符号,  $\nu = (3\lambda + 2\mu + K)\alpha$ ,  $\alpha$  为线性热膨胀系数,  $C^*$  为恒应变时的比热,  $K^*$  为理论的材料特征常数.

## 2 问题的公式化与求解

考虑厚度为  $2d$  的均匀、各向同性、无能量耗散的微极热弹性无限大板, 设它关于  $z$  轴对称. 坐标系  $(r, \theta, z)$  的原点位于板的中心,  $z$  轴与中面正交并沿厚度方向. 表面  $z = \pm d$  处于不同的边界条件, 并取  $r-z$  平面为入射面.

对 2-维问题, 取

$$\mathbf{u} = (u_r, 0, u_z), \quad \boldsymbol{\phi} = (0, \phi_\theta, 0). \quad (6)$$

定义如下无量纲量

$$\left\{ \begin{array}{l} r' = \frac{r}{L}, \quad z' = \frac{z}{L}, \quad u'_r = \frac{\rho c_1^2}{L\mathcal{V}_0} u_r, \quad u'_z = \frac{\rho c_1^2}{L\mathcal{V}_0} u_z, \quad t' = \frac{c_1}{L} t, \\ \phi'_\theta = \frac{\rho c_1^2}{\mathcal{V}_0} \phi_\theta, \quad T' = \frac{T}{T_0}, \quad t'_{kl} = \frac{1}{\mathcal{V}_0} t_{kl}, \quad m'_{kl} = \frac{m_{kl}}{L\mathcal{V}_0}, \quad h' = \frac{h}{L}, \\ c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu + K}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{\mu + K}{\rho}, \quad c_4^2 = \frac{\gamma}{\vartheta}, \quad p = \frac{K}{\rho c_1^2}, \quad \delta^2 = \frac{c_2^2}{c_1^2}, \\ \delta_1^2 = \frac{c_4^2}{c_1^2}, \quad \delta^{*2} = \frac{KLj}{\gamma}, \quad C_T^2 = \frac{\rho c_1^2 C^*}{K^*}, \quad \epsilon_r = \frac{\nu T_0}{\rho K^*}, \end{array} \right. \quad (7)$$

其中  $L$  为标准长度,  $h$  为表面传热系数.

借助于无量纲量(7)式,并注意到(6)式,去掉撇之后(1)式至(3)式可化为无量纲形式

$$(1 - \delta^2) \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} \right) + \delta^2 \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) - p \frac{\partial \phi_0}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \quad (8)$$

$$(1 - \delta^2) \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial r \partial z} \right) + \delta^2 \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \frac{p}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \phi_0) - \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad (9)$$

$$\left[ \dots^2 - \frac{1}{r^2} \right] \phi_0 - 2\delta^{*2} \phi_0 + \delta^{*2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{\delta_1^2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial t^2}, \quad (10)$$

$$\dots^2 T = C_T^2 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \epsilon_r \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right), \quad (11)$$

其中  $\dots^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

引入势函数  $\phi$  和  $\psi$

$$u_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r}, \quad (12)$$

(8)式至(11)式可以表示为

$$\dots^2 \phi - \partial^2 \psi / \partial t^2 - T = 0, \quad (13)$$

$$\dots^2 \phi - \frac{\psi}{r^2} - p \frac{\phi_0}{\delta^2} - \frac{1}{\delta_1^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0, \quad (14)$$

$$\delta^{*2} \left[ \dots^2 - \frac{1}{r^2} \right] \psi = \frac{1}{\delta_1^2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial t^2} + 2\delta^{*2} \phi_0 - \left[ \dots^2 - \frac{1}{r^2} \right] \phi_0, \quad (15)$$

$$\dots^2 T = C_T^2 \partial^2 T / \partial t^2 + \epsilon_r \dots^2 \phi. \quad (16)$$

假设(13)式至(16)式的解有

$$(\phi, \psi, \phi_0, T) = [f(z)J_0(\xi r), g(z)J_1(\xi r), w(z)J_1(\xi r), h(z)J_0(\xi r)] e^{-i\omega t}, \quad (17)$$

其中,  $\omega$  为频率,  $\xi$  为波数,  $J_0(\xi r)$  和  $J_1(\xi r)$  分别为为 0-阶和 1-阶 Bessel 函数.

将(17)式代入(13)式、(14)式、(15)式和(16)式,得以下微分方程:

$$\left[ \left( \frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right)^2 + \xi^2 c^2 (1 + C_T^2 + \epsilon_r) \left( \frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right) + C_T^2 \xi^4 c^4 \right] f(z) = 0, \quad (18)$$

$$\left[ \left( \frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right)^2 + \xi^2 c^2 \left\{ \frac{1}{\delta_1^2} + \frac{1}{\delta^2} + \frac{\delta^{*2}}{\omega^2 \delta^2} (p - 2\delta^2) \right\} \left( \frac{d^2}{dz^2} - \xi^2 \right) + \frac{\xi^2 c^2}{\delta^2} \left( \frac{\omega^2}{\delta_1^2} - 2\delta^{*2} \right) \right] g(z) = 0. \quad (19)$$

求解上述微分方程,得到  $\phi$ 、 $\psi$ 、 $\phi_0$  和  $T$  的表达式

$$\phi = (A \cos m_1 z + B \sin m_1 z + C \cos m_2 z + D \sin m_2 z) J_0(\xi r) e^{-i\omega t}, \quad (20)$$

$$\psi = (A' \cos m_3 z + B' \sin m_3 z + C' \cos m_4 z + D' \sin m_4 z) J_1(\xi r) e^{-i\omega t}, \quad (21)$$

$$\phi_0 = \frac{\delta^2}{p} [(\beta^2 - m_3^2)(A' \cos m_3 z + B' \sin m_3 z) + (\beta^2 - m_4^2)(C' \cos m_4 z + D' \sin m_4 z)] J_1(\xi r) e^{-i\omega t}, \quad (22)$$

$$T = [(\alpha^2 - m_1^2)(A \cos m_1 z + B \sin m_1 z) +$$

$$(\alpha^2 - m_2^2)(C \cos m_2 z + D \sin m_2 z) J_0(\xi r) e^{-i\omega t}. \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} m_i^2 &= \xi^2(c^2 a_i^2 - 1), \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ \alpha^2 &= \xi^2(c^2 - 1), \quad \beta^2 = \xi^2(c^2/\delta^2 - 1), \\ (a_1^2, a_2^2) &= (1/2) \left\{ [1 + C_T^2 + \epsilon_T] \pm \left[ (1 - C_T^2 + \epsilon_T)^2 + 4C_T^2 \epsilon_T \right]^{1/2} \right\}, \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} (a_3^2, a_4^2) &= \frac{1}{2} \left\{ \left[ \frac{1}{\delta_1^2} + \frac{1}{\delta^2} + \frac{\delta^{*2}}{\omega^2 \delta^2} (p - 2\delta^2) \right] \pm \right. \\ &\quad \left. \left[ \left[ \frac{1}{\delta_1^2} - \frac{1}{\delta^2} + \frac{\delta^{*2}}{\omega^2 \delta^2} (p - 2\delta^2) \right]^2 + \frac{4\delta^{*2}}{\omega^2 \delta_1^2 \delta^2} (p - 2(\delta^2 - \delta_1^2)) \right]^{1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (24)$$

其中  $c = \omega/\xi$  为波的相速度.

由(12)式、(20)式至(23)式得到位移分量  $u_r$  和  $u_z$  为

$$\begin{aligned} u_r &= [-\xi(A \cos m_1 z + B \sin m_1 z + C \cos m_2 z + D \sin m_2 z) + \\ &\quad (-A' m_3 \sin m_3 z + B' m_3 \cos m_3 z - C' m_4 \sin m_4 z + D' m_4 \cos m_4 z)] J_1(\xi r) e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} u_z &= [(-m_1 A \sin m_1 z + m_1 B \cos m_1 z - m_2 C \sin m_2 z + m_2 D \cos m_2 z) - \\ &\quad \xi(A' \cos m_3 z + B' \sin m_3 z + C' \cos m_4 z + D' \sin m_4 z)] J_0(\xi r) e^{-i\omega t}, \end{aligned} \quad (26)$$

## 2.1 边界条件

考虑板表面  $z = \pm d$  处力学和热的边界条件.

### 1) 力学条件

在表面  $z = \pm d$  处无量纲力学边界条件分别为应力自由和刚性固定边界, 给定为

$$t_{zz} = 0, \quad t_{rz} = 0, \quad m_z \theta = 0 \quad (27)$$

和

$$u_r = 0, \quad u_z = 0, \quad \phi_0 = 0, \quad (28)$$

其中

$$\begin{aligned} t_{zz} &= (\lambda + 2\mu + K) \frac{\partial u_r}{\partial z} + \lambda \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) - \mathcal{V}, \\ t_{rz} &= \mu \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + K \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} - \phi_0 \right), \quad m_z \theta = \gamma \frac{\partial \phi_0}{\partial z}. \end{aligned}$$

### 2) 热条件

在  $z = \pm d$  处, 热的边界条件为

$$\partial T / \partial z + hT = 0. \quad (29)$$

这里,  $h \rightarrow 0$  相应与热绝缘边界,  $h \rightarrow \infty$  对应等温边界.

## 3 特征方程的推导

根据表面  $z = \pm d$  处的边界条件(27)式和(29)式以及(20)式至(26)式, 得到具有8个方程的方程组

$$P(Ac_1 + Bs_1 + Cc_2 + Ds_2) + Q \left\{ m_3(A's_3 - B'c_3) + m_4(C's_4 - D'c_4) \right\} = 0, \quad (30)$$

$$P(Ac_1 - Bs_1 + Cc_2 - Ds_2) + Q \left\{ m_3(-A's_3 - B'c_3) + m_4(-C's_4 - D'c_4) \right\} = 0, \quad (31)$$

$$Q \left\{ (-As_1 + Bc_1)m_1 + (-Cs_2 + Dc_2)m_2 \right\} + P(A'c_3 + B's_3 + C'c_4 + D's_4) = 0, \quad (32)$$

$$Q \left\{ (As_1 + Bc_1)m_1 + (Cs_2 + Dc_2)m_2 \right\} + P(A'c_3 - B's_3 + C'c_4 - D's_4) = 0, \quad (33)$$

$$f_3(-A's_3 + B'c_3)m_3 + f_4(-C's_4 + D'c_4)m_4 = 0, \quad (34)$$

$$f_3(A's_3 + B'c_3)m_3 + f_4(C's_4 + D'c_4)m_4 = 0, \quad (35)$$

$$g_1[(hc_1 - m_1s_1)A + (hs_1 + m_1c_1)B] + g_2[(hc_2 - m_2s_2)C + (hs_2 + m_2c_2)D] = 0, \quad (36)$$

$$g_1[(hc_1 + m_1s_1)A + (-hs_1 + m_1c_1)B] + g_2[(hc_2 + m_2s_2)C + (-hs_2 + m_2c_2)D] = 0, \quad (37)$$

其中

$$P = \beta^2 - \xi^2 + p\xi^2/\delta^2, \quad Q = -2\xi(1 - p/2\delta^2), \quad f_i = \beta^2 - m_i^2, \quad i = 3, 4, \\ g_i = \alpha^2 - m_i^2, \quad i = 1, 2; \quad s_i = \sin m_i z, \quad c_i = \cos m_i z, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

(30) 式至(37) 式具有非平凡解, 如果幅值的系数行列式  $[A, B, C, D, A', B', C', D']^T$  为零. 经过繁杂的推导得到具有应力自由热绝缘边界板 ( $h \rightarrow 0$ ) 的特征方程为

$$\left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm - \frac{m_1(\alpha^2 - m_1^2)}{m_2(\alpha^2 - m_2^2)} \left[ \frac{\tan m_2 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm - \frac{m_2(\beta^2 - m_2^2)}{m_4(\beta^2 - m_4^2)} \left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_4 d} \right]^\pm + \\ \frac{m_1 m_3(\alpha^2 - m_1^2)(\beta^2 - m_3^2)}{m_2 m_4(\alpha^2 - m_2^2)(\beta^2 - m_4^2)} \left[ \frac{\tan m_2 d}{\tan m_4 d} \right]^\pm = \\ - \frac{4\xi^2(1 - p/2\delta^2)^2 m_1 m_3(m_2^2 - m_1^2)(m_4^2 - m_3^2)}{(\beta^2 - \xi^2 + p\xi^2/\delta^2)^2(m_4^2 - \beta^2)(m_2^2 - \alpha^2)}, \quad (38)$$

同时, 应力自由等温边界板 ( $h \rightarrow \infty$ ) 的特征方程为

$$\left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm - \frac{m_2(\alpha^2 - m_1^2)}{m_1(\alpha^2 - m_2^2)} \left[ \frac{\tan m_2 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm + \\ \frac{(\beta^2 - \xi^2 + p\xi^2/\delta^2)^2(m_3^2 - \beta^2)(m_2^2 - m_1^2)}{4\xi^2(1 - p/2\delta^2)^2 m_1 m_4(\alpha^2 - m_2^2)(m_4^2 - m_3^2)} \left[ \frac{\tan m_4 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm = \\ \frac{(\beta^2 - \xi^2 + p\xi^2/\delta^2)^2(m_4^2 - \beta^2)(m_2^2 - m_1^2)}{4\xi^2(1 - p/2\delta^2)^2 m_1 m_3(m_2^2 - \alpha^2)(m_4^2 - m_3^2)}. \quad (39)$$

### 3.1 刚性固定边界

由板表面  $z = \pm d$  处的边界条件(28) 式、(29) 式和(20) 式至(26) 式得到幅值向量  $[A, B, C, D, A', B', C', D']^T$  的线方程组. 由该方程组的非平凡解的存在性条件分别得到刚性固定热绝缘边界和等温边界板的特征方程

$$\left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm - \frac{m_1(\alpha^2 - m_1^2)}{m_2(\alpha^2 - m_2^2)} \left[ \frac{\tan m_2 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm + \frac{m_1 m_4(m_2^2 - m_1^2)(m_3^2 - \beta^2)}{\xi^2(\alpha^2 - m_2^2)(m_4^2 - m_3^2)} \left[ \frac{\tan m_4 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm = \\ \frac{m_1 m_3(m_2^2 - m_1^2)(m_4^2 - \beta^2)}{\xi^2(\alpha^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}, \quad (40)$$

$$\left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm - \frac{m_2(\alpha^2 - m_1^2)}{m_1(\alpha^2 - m_2^2)} \left[ \frac{\tan m_2 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm - \frac{m_4(\beta^2 - m_3^2)}{m_3(\beta^2 - m_4^2)} \left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_4 d} \right]^\pm + \\ \frac{m_2 m_4(\alpha^2 - m_1^2)(m_3^2 - \beta^2)}{m_1 m_3(\alpha^2 - m_2^2)(m_4^2 - \beta^2)} \left[ \frac{\tan m_2 d}{\tan m_4 d} \right]^\pm = \frac{-\xi^2(m_2^2 - m_1^2)(m_4^2 - m_3^2)}{m_1 m_3(m_2^2 - \alpha^2)(m_4^2 - \beta^2)}, \quad (41)$$

式中, 上标+ 1 对应于斜对称模式, - 1 对应于对称模式. (38) 式和(39) 式为板的修正微极热弹性波的传播特征方程. 这些方程可视为无能量耗散的微极热弹性固体无限矩形板中对称和反对称模式波传播的 Rayleigh-Lamb 方程. 我们把这种波称为板的微极弹性波而不是 Lamb 波, Lamb<sup>[19]</sup> 给出了各向同性弹性固体中 Lamb 波的特性. 因此, Rayleigh-Lamb 方程也适用于微极热弹性板的环形波. 尽管频率波关系对直波还是环形波均成立, 但是对于大的径向坐标, 位移、微转动、温度和应力变化应该由 Bessel 函数而不是三角函数给出. 对于大的  $r$  值, 则有

$$J_0(\xi_r) \rightarrow \frac{\sin \xi_r + \cos \xi_r}{\sqrt{\pi \xi_r}}, \quad J_1(\xi_r) \rightarrow \frac{\sin \xi_r - \cos \xi_r}{\sqrt{\pi \xi_r}}.$$

从而随着  $r$  远离原点, 运动变成周期的. 实际上, 在 Bessel 函数的 4 到 5 个零点之内, “远离”的情况很快产生. 当  $r$  值变得很大时, 环形波的极限的情况变为直波. (40) 式和(41) 式退化为刚性固定热绝缘和等温边界的热弹性板的对称和斜对称模态波的特征方程.

### 3.2 特殊情况

#### 1) 微极弹性板

热-力耦合效应为零 ( $\epsilon_r = 0$ ), 致使  $\alpha_1^2 = 1$  和  $\alpha_2^2 = C_T^2$ , 从而有

$$m_1^2 = \alpha^2, \quad m_2^2 = \xi^2(C_T^2 c^2 - 1),$$

相应地, 特征方程(38) 式至(41) 式简化为

$$\left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm - \frac{m_3(\beta^2 - m_3^2)}{m_4(\beta^2 - m_4^2)} \left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_4 d} \right]^\pm = \frac{-4\xi^2(1 - p/2\delta^2)^2 \alpha m_3(m_4^2 - m_3^2)}{(\beta^2 - \xi^2 + p\xi^2/\delta^2)^2(m_4^2 - \beta^2)}, \quad (42)$$

$$\left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm - \frac{(\beta^2 - \xi^2 + p\xi^2/\delta^2)^2(\beta^2 - m_3^2)}{4\xi^2(1 - p/2\delta^2)^2 m_1 m_4(m_4^2 - m_3^2)} \left[ \frac{\tan m_4 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm = \frac{(\beta^2 - \xi^2 + p\xi^2/\delta^2)^2(m_4^2 - \beta^2)}{4\xi^2(1 - p/2\delta^2)^2 m_1 m_3(m_4^2 - m_3^2)}, \quad (43)$$

$$\left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm - \frac{m_1 m_4(m_3^2 - \beta^2)}{\xi^2(m_4^2 - m_3^2)} \left[ \frac{\tan m_4 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm = \frac{m_1 m_3(m_4^2 - \beta^2)}{\xi^2(m_4^2 - m_3^2)}, \quad (44)$$

$$\left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm - \frac{m_4(\beta^2 - m_3^2)}{m_3(\beta^2 - m_4^2)} \left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_4 d} \right]^\pm = \frac{-\xi^2(m_4^2 - m_3^2)}{m_1 m_3(m_4^2 - \beta^2)}. \quad (45)$$

#### 2) 热弹性板

微极效应为零 ( $K = p = 0$ ), 从而有

$$\alpha_3^2 = 1/\delta^2, \quad \alpha_4^2 = 1/\delta_1^2, \quad m_3^2 = \beta^2, \quad m_4^2 = \xi^2(c^2/\delta_1^2 - 1).$$

相应地, 绝缘和等温边界的特征方程(38) 式至(41) 式简化为

$$\left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm - \frac{m_1(\alpha^2 - m_1^2)}{m_2(\alpha^2 - m_2^2)} \left[ \frac{\tan m_2 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm = \frac{-4\xi^2 m_1 \beta(m_2^2 - m_1^2)}{(\beta^2 - \xi^2)^2(\alpha^2 - m_2^2)}, \quad (46)$$

$$\left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm - \frac{m_2(\alpha^2 - m_1^2)}{m_1(\alpha^2 - m_2^2)} \left[ \frac{\tan m_2 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm = \frac{(\beta^2 - \xi^2)^2(m_2^2 - m_1^2)}{4\xi^2 m_1 \beta(\alpha^2 - m_2^2)}, \quad (47)$$

$$\left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm - \frac{m_1(\alpha^2 - m_1^2)}{m_2(\alpha^2 - m_2^2)} \left[ \frac{\tan m_2 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm = \frac{m_1 \beta(m_2^2 - m_1^2)}{\xi^2(\alpha^2 - m_2^2)}, \quad (48)$$

$$\left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm - \frac{m_2(\alpha^2 - m_1^2)}{m_1(\alpha^2 - m_2^2)} \left[ \frac{\tan m_2 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm = \frac{-\xi^2(m_2^2 - m_1^2)}{m_1 \beta(\alpha^2 - m_2^2)}. \quad (49)$$

#### 3) 弹性板

微极效应为零 ( $K = p = 0$ ) 且热效应为零 ( $\epsilon_r = 0$ ), 特征方程(46) 式至(49) 式简化为

$$\left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm = \frac{-4\xi^2 \alpha \beta}{(\beta^2 - \xi^2)^2}, \quad (50)$$

$$\left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm = \frac{(\beta^2 - \xi^2)^2}{4\xi^2 \alpha \beta}, \quad (51)$$

$$\left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm = \frac{\alpha \beta}{\xi^2}, \quad (52)$$

$$\left[ \frac{\tan m_1 d}{\tan m_3 d} \right]^\pm = \frac{-\xi^2}{\alpha \beta}. \quad (53)$$

Graff<sup>[20]</sup> 对均匀、各向同性、应力自由弹性板进行过讨论, 方程(50) 式至(53) 式与其结论相

## 4 特征方程的讨论

### 4.1 特征方程的区域

这里,  $\alpha, \beta, m_i (i = 1, 2, 3, 4)$  是否为纯虚数、零或实数依据于是否  $c < \delta, 1/|\alpha| (i = 1, 2, 3, 4)$ . 如频率方程(38)式变为下面的情况.

### 4.2 区域 I

这个内区域满足  $c < \delta, 1/|\alpha| (i = 1, 2, 3, 4)$ . 因此, 将  $\alpha, \beta, m_i$  替换为  $i\alpha', i\beta'$  和  $i\alpha_i (i = 1, 2, 3, 4)$ , 特征方程(38)式变为

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\tanh \alpha_1 d}{\tanh \alpha_3 d} \right]^{\pm} - \frac{\alpha_1 (\alpha'^2 - \alpha_1^2)}{\alpha_2 (\alpha'^2 - \alpha_2^2)} \left[ \frac{\tanh \alpha_2 d}{\tanh \alpha_3 d} \right]^{\pm} - \frac{\alpha_3 (\beta'^2 - \alpha_2^2)}{\alpha_4 (\beta'^2 - \alpha_4^2)} \left[ \frac{\tanh \alpha_1 d}{\tanh \alpha_4 d} \right]^{\pm} + \\ & \frac{\alpha_1 \alpha_3 (\alpha'^2 - \alpha_1^2) (\alpha_3^2 - \beta'^2)}{\alpha_2 \alpha_4 (\alpha'^2 - \alpha_2^2) (\alpha_4^2 - \beta'^2)} \left[ \frac{\tanh \alpha_2 d}{\tanh \alpha_4 d} \right]^{\pm} = \\ & - \frac{4\xi^2 (1 - p/2\delta^2)^2 \alpha_1 \alpha_3 (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) (\alpha_4^2 - \alpha_3^2)}{(p\xi^2/\delta^2 - \beta'^2 - \xi^2)^2 (\alpha_4^2 - \beta'^2) (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)}. \end{aligned} \quad (54)$$

### 4.3 区域 II

这个区域内满足  $\delta < c < 1$ . 因此, 有  $\beta = \beta, m_3 = m_3, m_4 = m_4, m_i = i\alpha_i (i = 1, 2)$ , 特征方程(38)式变为

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{\tanh \alpha_1 d}{\tan \alpha_3 d} \right]^{\pm} - \frac{\alpha_1 (\alpha'^2 - \alpha_1^2)}{\alpha_2 (\alpha'^2 - \alpha_2^2)} \left[ \frac{\tanh \alpha_2 d}{\tan m_3 d} \right]^{\pm} - \frac{m_3 (\beta^2 - m_3^2)}{m_4 (\beta^2 - m_4^2)} \left[ \frac{\tanh \alpha_1 d}{\tan m_4 d} \right]^{\pm} + \\ & \frac{\alpha_1 m_3 (\alpha'^2 - \alpha_1^2) (m_3^2 - \beta^2)}{\alpha_2 m_4 (\alpha'^2 - \alpha_2^2) (m_4^2 - \beta^2)} \left[ \frac{\tanh \alpha_2 d}{\tan m_4 d} \right]^{\pm} = \\ & - \frac{4\xi^2 (1 - p/2\delta^2)^2 \alpha_1 m_3 (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) (m_4^2 - m_3^2)}{(\beta^2 - \xi^2 + p\xi^2/\delta^2)^2 (m_4^2 - \beta^2) (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)}. \end{aligned} \quad (55)$$

### 4.4 区域 III

这个区域满足  $\xi < \omega, c > 1$ . 特征方程由(38)式给出.

对频率方程(39)式可以做类似区域的划分.

## 5 薄板的结论

考虑相对于板的厚度, 横波波长大得很多的情况, 这时, 有  $\xi d \ll 1$ . 区域 I 和区域 II 均给出一些有趣的结论: 在区域 I 中对称情况无根; 在区域 II 中斜对称情况无根. 保留双曲正切展开式的前两项, 对称和斜对称的特征方程(54)式和(55)式简化为

$$\begin{aligned} & \left( \frac{p\xi^2}{\delta^2} - \beta'^2 - \xi^2 \right)^2 \left[ 1 - \frac{\alpha'^2 d^2}{3} \right] \left[ (\alpha_4^2 + \alpha_3^2 - \beta'^2) + \right. \\ & \left. (d^2/3) \left\{ \beta'^2 \alpha_4^2 + \beta'^2 \alpha_3^2 - (\alpha_4^2 + \alpha_3^2 + \alpha_3^2 \alpha_4^2) \right\} \right] = \\ & 4\xi^2 \left[ 1 - \frac{p}{2\delta^2} \right]^2 \alpha_3^2 \alpha_4^2 \left[ 1 - \frac{\alpha_3^2 d^2}{3} \right] \left[ 1 - \frac{\alpha_4^2 d^2}{3} \right], \end{aligned} \quad (56)$$

$$(\alpha_2^2 + \alpha_1^2 - \alpha'^2) = - \frac{4\xi^2 (1 - p/2\delta^2)^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 (\alpha_2^2 - \alpha_1^2)}{(\beta'^2 - \xi^2 + p\xi^2/\delta^2)^2}. \quad (57)$$

若忽略微极效应, 如 ( $K = p = 0$ ), 则(56)式和(57)式简化为

$$(\beta'^2 + \xi^2)^2 \left[ 1 - \frac{\alpha'^2 d^2}{3} \right] = 4\xi^2 \beta'^2 \left[ 1 - \frac{\beta'^2 d^2}{3} \right], \quad (58)$$

$$(\alpha_2^2 + \alpha_1^2 - \alpha'^2) = - \frac{4\xi^2 \alpha_1^2 \alpha_2^2 (\alpha_2^2 - \alpha'^2)}{(\beta'^2 - \xi^2)^2}. \quad (59)$$

一般而言, 波态与微极参数有关.

## 6 短波长的情况

当  $\xi \rightarrow \infty$  时, 可以得到渐进行为. 若  $\xi > \omega/\delta$ , 则有  $c < \delta, 1$ , 并且  $\alpha, \beta, m_i (i = 1, 2, 3, 4)$  的根位于区域 I, 特征方程(38)式和(39)式简化为

$$4\xi^2 \left[ 1 - \frac{p}{2\delta^2} \right]^2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 (\alpha_1 + \alpha_2) (\alpha_3 + \alpha_4) = \left[ \frac{p\xi}{\delta^2} - \beta'^2 - \xi^2 \right]^2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1 \alpha_2 - \alpha'^2) (\alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_3 \alpha_4 - \beta'^2), \quad (60)$$

$$4\xi^2 \left[ 1 - \frac{p}{2\delta^2} \right]^2 \alpha_3 \alpha_4 (\alpha'^2 + \alpha_1 \alpha_2) (\alpha_3 + \alpha_4) = \left[ \frac{p\xi}{\delta^2} - \beta'^2 - \xi^2 \right]^2 (\alpha_1 + \alpha_2) (\alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_3 \alpha_4 - \beta'^2), \quad (61)$$

(60)式和(61)式分别为应力和偶应力自由热绝缘和等温边界下无能量耗散的微极热弹性半空间 Rayleigh 表面波的方程.

若忽略微极效应如 ( $K = p = 0$ ),  $\alpha_3 = \beta'$ , 则(60)式和(61)式简化为应力自由热绝缘和等温无能量耗散热弹性板的特征方程

$$4\xi^2 \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 (\alpha_1 + \alpha_2) (\alpha_3 + \alpha_4) = (\beta'^2 + \xi^2)^2 (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_1 \alpha_2 - \alpha'^2) (\alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_3 \alpha_4 - \beta'^2), \quad (62)$$

$$4\xi^2 \alpha_3 \alpha_4 (\alpha'^2 + \alpha_1 \alpha_2) (\alpha_3 + \alpha_4) = (\beta'^2 + \xi^2)^2 (\alpha_1 + \alpha_2) (\alpha_3^2 + \alpha_4^2 + \alpha_3 \alpha_4 - \beta'^2). \quad (63)$$

(62)式和(63)式仅是 Rayleigh 表面波方程. 因在短波长的情况下有限厚度板如同半-无限介质, 从而能量主要通过板的表面传播.

## 7 Lamé 模式

Lamb<sup>[19]</sup> 首先给出了一类特殊的精确解, 称为 Lamé 模式, 它可以由考虑特殊情况而给出.

令  $\beta^2 = \xi^2(1 - p/\delta^2)$ , 这时区域 II 中的根和频率方程(55)式简化为

$$\text{对称模式: } m_3 d = \infty \Rightarrow m_3 = n\pi/2d, \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$\text{反对称模式: } m_3 d = 0, \Rightarrow m_3 = n\pi/2d, \quad n = 0, 2, 4, \dots$$

这里, 频率给定为

$$\omega = \frac{\sqrt{4\beta^2 d^2 + n^2 \pi^2 (1 - p/\delta^2)}}{2da_3 \sqrt{1 - p/\delta^2}}.$$

但是, 当忽略微极效应 ( $p = 0$ ),  $\beta = m_3$ , 频率相应地变为

$$\omega = n\pi\delta/\sqrt{2}d,$$

该式与 Graff<sup>[20]</sup> 的结论相符.

显然, 这种模式依赖微极参数 ( $K$  或  $p$ ) 和板的厚度.

## 8 位移、微转动和温度分布的幅值

下面计算板对称和斜对称模态波的位移、微转动和温度分布的幅值. 由(25)式、(26)式和



(30) 式至(37) 式得

$$\begin{aligned} (u_r)_{sy} &= \left\{ -\xi(\cos m_1 z + L \cos m_2 z) + M m_3 \cos m_3 z + N m_4 \cos m_4 z \right\} A J_1(\xi r) e^{-i\omega t}, \\ (u_r)_{asy} &= \left\{ -\xi(\sin m_1 z + L' \sin m_2 z) + M' m_3 \sin m_3 z + N' m_4 \sin m_4 z \right\} B J_1(\xi r) e^{-i\omega t}, \\ (u_z)_{sy} &= -\left\{ m_1 \sin m_1 z + L m_2 \sin m_2 z + \xi(M \sin m_3 z + N \sin m_4 z) \right\} A J_0(\xi r) e^{-i\omega t}, \\ (u_z)_{asy} &= \left\{ m_1 \cos m_1 z + L' m_2 \cos m_2 z - \xi(M' \cos m_3 z + N' \cos m_4 z) \right\} B J_0(\xi r) e^{-i\omega t}, \\ (\phi_\theta)_{sy} &= \frac{\delta^2}{p} \left\{ (\beta^2 - m_3^2) \cos m_3 z - (\beta^2 - m_4^2) \frac{f_3 m_3 s_3}{f_4 m_4 s_4} \cos m_4 z \right\} A' J_1(\xi r) e^{-i\omega t}, \\ (\phi_\theta)_{asy} &= \frac{\delta^2}{p} \left\{ (\beta^2 - m_3^2) \sin m_3 z - (\beta^2 - m_4^2) \frac{f_3 m_3 c_3}{f_4 m_4 c_4} \sin m_4 z \right\} B' J_1(\xi r) e^{-i\omega t}, \\ (T)_{sy} &= \left\{ (\alpha^2 - m_1^2) \cos m_1 z + (\alpha^2 - m_2^2) \cos m_2 z \right\} A J_0(\xi r) e^{-i\omega t}, \\ (T)_{asy} &= \left\{ (\alpha^2 - m_1^2) \sin m_1 z + (\alpha^2 - m_2^2) L' \sin m_2 z \right\} B J_0(\xi r) e^{-i\omega t}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} L &= -\frac{g_1 m_1 s_1}{g_2 m_2 s_2}, \quad L' = -\frac{g_1 m_1 c_1}{g_2 m_2 c_2}, \\ M &= \frac{P(g_2 m_2 T_1^{-1} - g_1 m_1 T_2^{-1}) f_4 s_1}{Q g_2 m_2 m_3 (f_4 - f_3) T_3^{-1} s_3}, \quad M' = \frac{P(g_2 m_2 T_1 - g_1 m_1 T_2) f_4 c_1}{Q g_2 m_2 m_3 (f_4 - f_3) T_3 c_3}, \\ N &= \frac{P(g_2 m_2 T_1^{-1} - g_1 m_1 T_2^{-1}) f_3 s_1}{Q g_2 m_2 m_4 (f_4 - f_3) T_4^{-1} s_4}, \quad N' = \frac{P(g_2 m_2 T_1 - g_1 m_1 T_2) f_3 c_1}{Q g_2 m_2 m_4 (f_4 - f_3) T_4 c_4}, \\ T_i &= \tanh m_i d, \quad i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

## 9 算例和结论

为了说明前节中的理论结果, 我们将给出一些数值算例, 并示于图中. 计算中选用的材料为铝-环氧合金, 其物理数据为

$$\begin{aligned} \rho &= 2.70 \times 10^3 \text{ kg/m}^3, \quad \lambda = 5.775 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad \mu = 2.646 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \\ K &= 0.0149 \times 10^{10} \text{ N/m}^2, \quad \nu = 0.268 \times 10^6 \text{ N}, \quad j = 0.196 \times 10^{-4} \text{ m}^2, \\ C_T^2 &= 0.5, \quad \epsilon_r = 1.0, \quad C^* = 0.216 \times 10^3 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}, \\ \alpha_0 &= 0.23 \times 10^{-2} (\text{m} \cdot \text{K})^{-1}, \quad T_0 = 300 \text{ K}, \quad d = 0.01 \text{ m}. \end{aligned}$$

根据应力自由热绝缘边界的特征方程(38)式和刚性固定热绝缘边界的特征方程(40)式, 对于不同波数, 计算了对称和斜对称模态波的无量纲的相速度. 对不同模态( $n = 0$ 到 $n = 4$ )的相速度的数值解被示在图1至图4; 实线表示微极热弹性板(简称为MTE), 短划线表示热弹性板(简称为TE), 长划线表示微极弹性板(简称为ME). 对称和斜对称位移、微转动和温度分布的幅值曲线示于图5至图12中.

### 9.1 应力自由热绝缘边界

对于应力自由热绝缘边界, 随着波数变化, 最低对称模态( $n = 0$ )的相速度保持常数. 最低斜对称模态的相速度在低波数段变化, 在高波数段为常数. 对称和斜对称高模态波的相速度在波数趋向于零时保持很高的数值, 但当波数增大时急速下降随后变得平稳. 这表明不同模态波传播的相速度从波数为零时的较大值开始, 然后出现强烈的频散现象直到变为较高波数时微极热弹性 Rayleigh 波速度, 这时曲线变得平坦. 形成渐近线的原因是: 对短波长而言(即高频)板材料很快表现为一个厚块, 上表面边界和下表面边界之间耦合减少, 结果是对称和斜对称波的特性越来越相似.

由图示可知, 对应力自由热绝缘边界的板的对称模态波有:

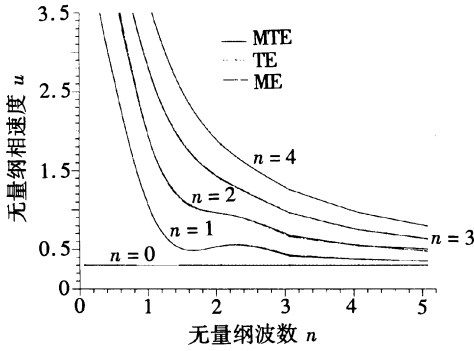


图1 应力自由热绝缘边界下对称模态波的相速度

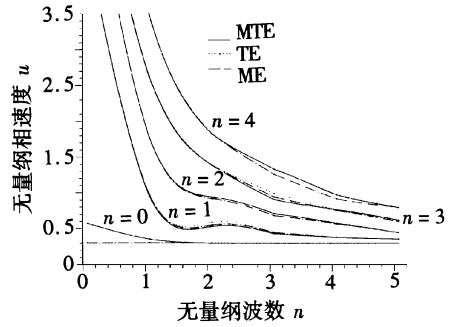


图2 应力自由热绝缘边界下斜对称模态波的相速度

(a) 对  $n = 0, n = 3, n = 4$ , MTE、TE 和 ME 的相速度在所有波数段上相同;

(b) 对  $n = 1$ , 波数在 2.6 和 3.6 之间时, ME 的相速度略大于 MTE 的相速度; 波数在  $\xi d \leq 2.6$  和  $\xi d \leq 3.6$  时, MTE、TE 和 ME 的相速度近似相同;

(c) 对  $n = 2$ , 波数在  $\xi d \leq 0.8$  时, ME 的相速度略大于 MTE 和 TE 的相速度; 波数在 2.6 和 5.0 之间时, ME 的相速度略小于 MTE 和 TE 的相速度.

由图示可知, 对应力自由热绝缘边界板的斜对称模态波的传播有:

(a) 对最低模态  $n = 0$  和波数在  $\xi d \leq 1.6$  时, ME 的相速度比 MTE 和 TE 的相速度小; 波数在  $\xi d \geq 1.6$ , MTE、TE 和 ME 的相速度近似相同;

(b) 对  $n = 1$ , 波数在  $\xi d \leq 1.2$  和  $\xi d \geq 3.8$ , MTE 的相速度小于 ME 和 TE 的相速度;

(c) 对  $n = 2$ , 波数在 1.6 和 4.2 之间时, ME 的相速度小于 MTE 和 TE 的相速度; 波数在  $\xi d \leq 1.6$  和  $\xi d \geq 4.2$  时, MTE、TE 和 ME 的相速度几乎相同;

(d) 对  $n = 3$ , 波数在  $\xi d \leq 2.2$ , MTE、TE 和 ME 的相速度几乎相同; 波数在 2.2 和 4.0 之间时, MTE 的相速度小于 ME 和 TE 的相速度; 波数在 4.0 和 5.0 之间时, MTE 的相速度大于 ME 和 TE 的相速度;

(e) 对  $n = 4$ , 波数在  $\xi d \leq 2.2$  时, MTE、TE 和 ME 的相速度几乎相同; 波数在 2.2 和 5.0 之间时, ME 的相速度小于 MTE 和 TE 的相速度.

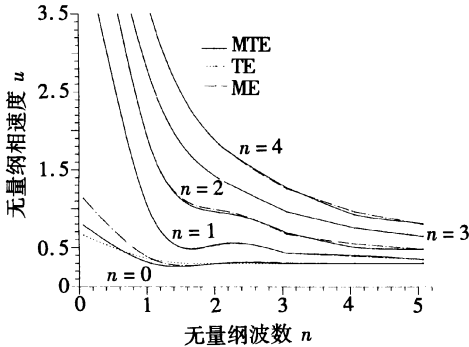


图3 刚性固定热绝缘边界下对称模态波的相速度

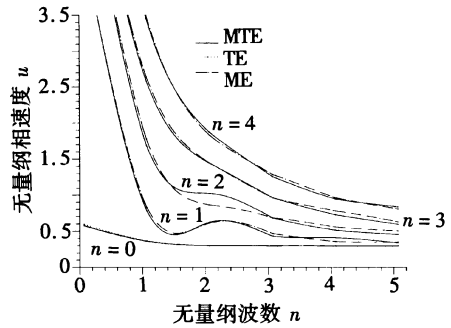


图4 刚性固定热绝缘边界下斜对称模态波的相速度

### 9.2 刚性固定热绝缘边界

对于刚性固定热绝缘边界, 在低波数段对称和斜对称模态的相速度不同, 随着波数增加变为常数.

由图示可知,对刚性固定热绝缘边界的板的对称模态波有:

(a) 对  $n = 0$ , 波数在  $\xi d \leq 0.6$ , TE 的相速度小于 MTE 和 ME 的相速度; 波数在 0.6 和 2.0 之间时, MTE 的相速度小于 TE 和 ME 的相速度;

(b) 对  $n = 2$ , 波数  $\xi d \leq 1.2$  和波数在 2.5 和 3.4 之间时, MTE、TE 和 ME 的相速度几乎相同; 波数  $\xi d \geq 3.4$  和波数在 1.2 和 2.5 之间时, ME 的相速度大于 MTE 和 TE 的相速度;

(c) 对  $n = 1, 3$ , MTE、TE 和 ME 的相速度几乎相同;

(d) 对  $n = 4$ , 波数在  $\xi d \leq 3.6$  时, MTE、TE 和 ME 的相速度几乎相同; 波数在  $\xi d \geq 3.6$  时, ME 的相速度大于 MTE 和 TE 的相速度。

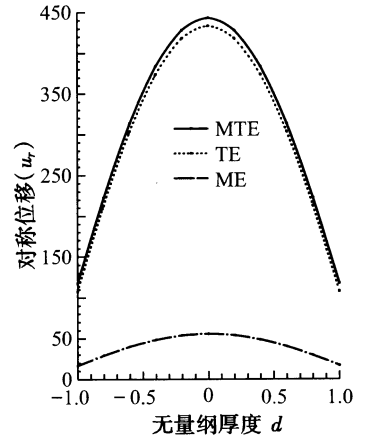


图5 对称位移幅值 ( $u_r$ )

由图示可知,对刚性固定热绝缘边界的板的斜对称模态波

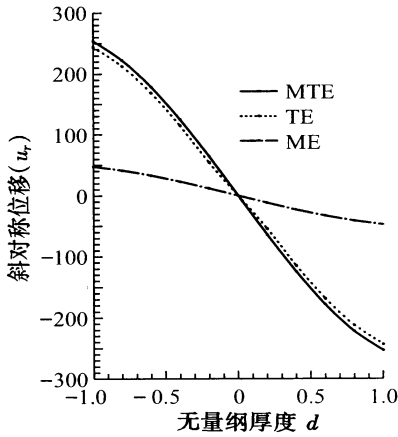


图6 斜对称位移幅值 ( $u_r$ )

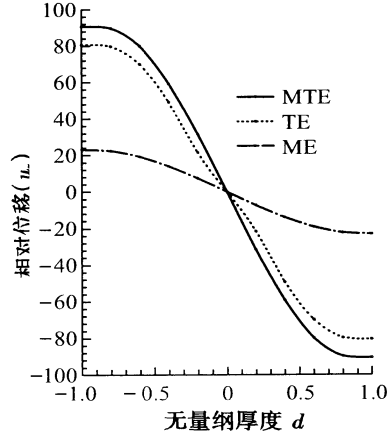


图7 对称位移幅值 ( $u_z$ )

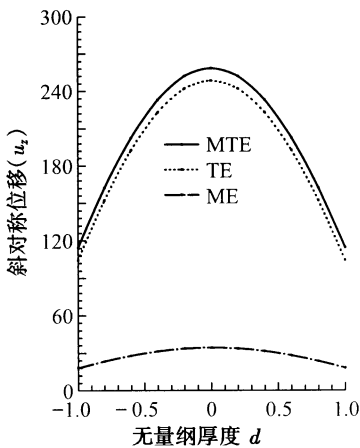


图8 斜对称位移幅值 ( $u_z$ )

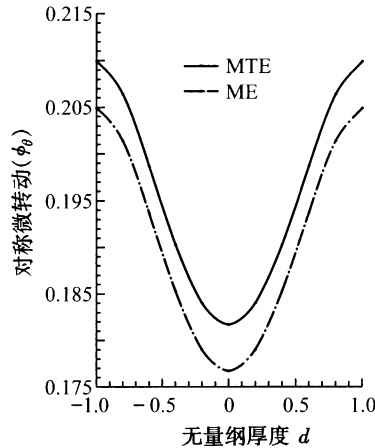


图9 对称微转动幅值 ( $\phi_0$ )

有:

(a) 对最低模态  $n = 0$  和波数在  $\xi d \leq 0.8$  时, TE 的相速度大于 MTE 和 TE 的相速度; 波数

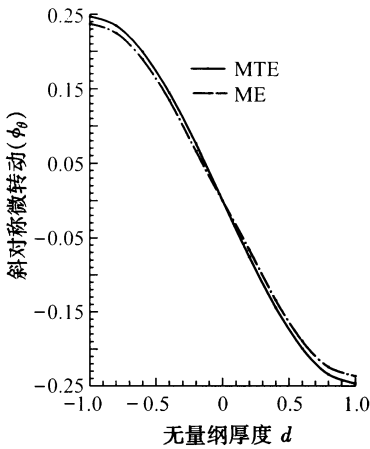


图 10 斜对称微转动幅值 ( $\phi_0$ )

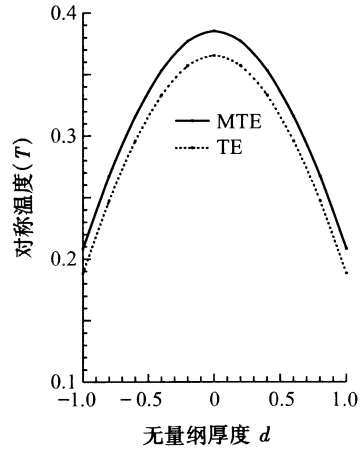


图 11 对称温度分布幅值 ( $T$ )

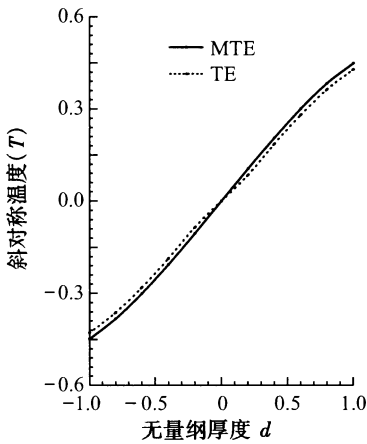


图 12 斜对称温度分布幅值 ( $T$ )

在  $\xi d \geq 0.8$  时, MTE、TE 和 ME 的相速度几乎相同;

(b) 对  $n = 1$ , 波数在  $\xi d \leq 1.6$  时, ME 的相速度大于 MTE 和 TE 的相速度; 波数在 1.6 和 2.4 之间时, MTE、TE 和 ME 的相速度几乎相同; 波数在 2.4 和 3.4 之间时, ME 的相速度大于 MTE 和 TE 的相速度; 波数在  $\xi d \geq 3.4$  时, ME 的相速度小于 MTE 和 TE 的相速度;

(c) 对  $n = 2$ , 波数在 1.4 和 3.0 之间时, ME 的相速度小于 MTE 和 TE 的相速度; 波数在  $\xi d \leq 1.4$  和  $\xi d \geq 3.0$  时, ME 的相速度大于 MTE 和 TE 的相速度;

(d) 对  $n = 3$ , 波数在 2.0 和 3.2 之间时, MTE、TE 和 ME 的相速度相同; 波数在  $\xi d \leq 2.0$  和  $\xi d \geq 3.2$  时, ME 的相速度大于 MTE 和 TE 的相速度;

(e) 对  $n = 4$ , 波数在  $\xi d \leq 1.4$  时, MTE、TE 和 ME 的相速度相同; 波数在 1.4 和 2.8 之间和  $\xi d \geq 4.4$  时, ME 的相速度小于 MTE 和 TE 的相速度; 波数在 2.8 和 4.4 之间时, ME 的相速度大于 MTE 和 TE 的相速度。

### 9.3 幅值

应力自由热绝缘边界的微极热弹性板(MTE)、热弹性板(TE)、微极弹性板(ME) 的对称模式的位移幅值  $u_r$  和斜对称模式的位移幅值  $u_z$  示于图 5 至图 8 中。

从图 5、图 6 可知, 对于对称模式, 位移  $u_r$  在中心处取最大值, 在表面处取最小值; 对于斜对称模式, 位移  $u_r$  在中心处为零, 在表面取最大值。从图 7、图 8 可知, 对于对称模式, 位移  $u_z$  在中心处为零, 在表面处取最大值; 对于斜对称模式, 位移  $u_z$  在中心处取最大值, 在表面取最小值。

图 9 至图 12 示出了微极热弹性板(MTE)、热弹性板(TE)、微极弹性板(ME) 的对称模式和斜对称模式的微转动  $\phi_0$  幅值和温度  $T$  分布。

从图 9 和图 10 可知, 对称模式中, 微转动幅值  $\phi_0$  在中间取最小值, 在表面取最大值; 斜对称模式中, MTE 和 ME 的微转动幅值  $\phi_0$  在中心处为零, 在表面取最大值, 而 TE 板的微转动幅值  $\phi_0$  为零。

从图 11 和图 12 可知, 对称模式中, MTE 和 TE 板的温度分布在中心处取最大值, 在表面取

最小值; 在斜对称模态中, 温度分布  $T$  在中心处为零, 在表面取最大值.  $(u_r)_{sy}$ 、 $(u_r)_{asy}$ 、 $(u_z)_{sy}$ 、 $(u_z)_{asy}$ 、 $(\phi_\theta)_{sy}$ 、 $(\phi_\theta)_{asy}$ 、 $(T)_{sy}$  和  $(T)_{asy}$  分别对应于对称模态和斜对称模态中  $(u_r)$ 、 $(u_z)$ 、 $(\phi_\theta)$  和  $(T)$  的值. 由图可知,  $(u_r)_{asy}$  的形态和趋势与  $(u_z)_{sy}$  相似,  $(u_r)_{sy}$  的形态和趋势与  $(u_r)_{asy}$  相似; 但  $(\phi_\theta)_{sy}$  和  $(\phi_\theta)_{asy}$  的形态和趋势分别与  $(T)_{sy}$  和  $(T)_{asy}$  相反. 对称和斜对称模态中, 微极弹性板(ME) 的位移  $(u_r)$  和  $(u_z)$  小于微极热弹性板(MTE) 和热弹性板(TE); 微极弹性板(ME) 的微转动  $\phi_\theta$  小于微极热弹性板(MTE); 热弹性板(TE) 的温度分布  $(T)$  小于微极热弹性板(MTE).

## 10 结 论

根据特征方程研究了在应力自由和刚性固定边界条件下, 均匀、各向同性、无能量耗散微极热弹性无限板中轴对称自由振动波的传播. 可以看到平面波的运动由 Rayleigh-Lamb 型特征方程给出. 讨论了特征方程的不同区域. 对于短波的极端情况, 由于有限厚度板表现为半无限空间, 振动能量沿着板表面传播, 因此应力自由、刚性固定矩形板的对称和斜对称模态波的特征方程退化为 Rayleigh 表面波频率方程. 当横波长相对于板厚大得多时, 区域 I 和区域 II 均给出了有趣的结论. 在区域 I 中, 斜对称模态的特征方程适合弯曲振动情况, 并在整个频谱中表现为有限频率范围的单振动模式; 在区域 II 中的对称模态特征方程, 相速度的表达式简化为薄板或者由微极热弹性杆理论的杆速度模拟的板应力, 作为简化结论的特例由 Graf<sup>[20]</sup> 得到. 举例分析了对称和斜对称模态下微极效应和热效应对相速度、位移幅值、微转动和温度分布的影响.

### [参 考 文 献]

- [1] Lord H W, Shulman Y A. A generalized dynamical theory of thermoelasticity[J]. J Mech Phys Solids, 1967, 15(5): 299-309.
- [2] Green A E, Lindsay K L. Thermoelasticity[J]. J Elasticity, 1992, 2(1): 1-7.
- [3] Green A E, Naghdi P M. A re-examination of the basic postulates of thermomechanics[J]. Proceeding of the Royal Society London Ser A, 1991, 432(1885): 171-194.
- [4] Green A E, Naghdi P M. On undamped heat waves in an elastic solid[J]. Journal of Thermal Stresses, 1992, 15(2): 253-264.
- [5] Green A E, Naghdi P M. Thermoelasticity without energy dissipation[J]. J Elasticity, 1993, 31(3): 189-208.
- [6] Green A E, Naghdi P M. A unified procedure for construction of theories of deformable media I. Classical continuum physics II. Generalized continua III, Mixtures of interacting continua[J]. Proceeding of the Royal Society London Ser A, 1995, 448(1934): 335-356, 357-377, 379-388.
- [7] Chandrasekharaiah D S. A uniqueness theorem in the theory of thermoelasticity without energy dissipation[J]. Journal of Thermal Stresses, 1966, 19(3): 267-272.
- [8] Chandrasekharaiah D S. A note on uniqueness of solution in the linear theory of thermoelasticity without energy dissipation[J]. J Elasticity, 1996, 43(3): 279-283.
- [9] Scott N H. Energy and dissipation of inhomogeneous plane waves in thermoelasticity[J]. Wave Motion, 1996, 23(4): 393-406.
- [10] Chandrasekharaiah D S, Srinath K S. Axisymmetric thermoelastic interaction without energy dissipation in an unbounded body with cylindrical cavity[J]. J Elasticity, 1997, 46(1): 19-31.
- [11] Chandrasekharaiah D S, Srinath K S. Thermoelastic waves without energy dissipation in an unbounded body with spherical cavity[J]. Int J Math Math Sci, 2000, 23(8): 555-562.

- [12] Iesan D. On the theory of thermoelasticity without energy dissipation[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 1998, **21**(3): 295-307.
- [13] Quintanilla R. On the spatial behavior in Thermoelasticity without energy dissipation[J]. *Journal of Thermal Stresses*, 1999, **22**(2): 213-224.
- [14] Wang J, Slattery S P. Thermoelasticity without energy dissipation for initially stressed bodies[J]. *Int J Math Math Sci*, 2002, **31**(6): 329-337.
- [15] Quintanilla R. Thermoelasticity without energy dissipation of nonsimple materials[J]. *Journal of Appl Math Mech (ZAMM)*, 2003, **83**(3): 172-180.
- [16] Kumar R, Deswal S. Surface wave propagation through a cylindrical bore in a micropolar generalized thermoelastic medium without energy dissipation[J]. *Proc Nat Acad Sci*, 2003, **73**(A)(3): 315-327.
- [17] Kumar R, Deswal S. Surface wave propagation in a micropolar thermoelastic medium without energy dissipation [J]. *J Sound and Vibration*, 2002, **256**(1): 173-178.
- [18] Eringen A C. *Linear theory of micropolar elasticity*[J]. *J Math Mech*, 1966, **15**(6): 909-923.
- [19] Lamb H. *On waves in an elastic plate*[J]. *Phil Trans Roy Soc, London, Ser A*, 1917, **93**: 114-128.
- [20] Gref K F. *Wave Motion in Elastic Solids*[M]. *New York: Dover publications Inc*, 1991.

## Axisymmetric Free Vibrations of an Infinite Micropolar Thermoelastic Plate

Rajneesh Kumar<sup>1</sup>, Geeta Partap<sup>2</sup>

(1. Department of Mathematics, Kurukshetra University,  
Kurukshetra 136119, Haryana, India ;

2. Department of Applied Mathematics, Dr. B. R. Ambedkar  
National Institute of Technology, Jalandhar, Punjab, India)

**Abstract:** The propagation of axisymmetric free vibrations in an infinite homogeneous isotropic micropolar thermoelastic plate without energy dissipation subjected to stress free and rigidly fixed boundary conditions is investigated. The secular equations for homogeneous isotropic micropolar thermoelastic plate without energy dissipation in closed form for symmetric and skew symmetric wave modes of propagation were derived. The different regions of secular equations were obtained. At short wavelength limits, the secular equations for symmetric and skew symmetric modes of wave propagation in a stress free insulated and isothermal plate reduce to Rayleigh surface wave frequency equation. The results for thermoelastic, micropolar elastic and elastic materials were obtained as particular cases from the derived secular equations. The amplitudes of displacement components, microrotation and temperature distribution were also computed during the symmetric and skew symmetric motion of the plate. The dispersion curves for symmetric and skew symmetric modes and amplitudes of displacement components, microrotation and temperature distribution in case of fundamental symmetric and skew symmetric modes were presented graphically. The analytical and numerical results are found to be in close agreement.

**Key words:** micropolar thermoelastic plate; thermoelasticity without energy dissipation; circular crested waves; symmetric and skew symmetric amplitudes