文章编号: 1000-0887(2007) 04-0401-05

一维有限元后处理的 EEP 法的数学分析*

赵庆华[1], 周叔子[1], 朱起定[2]

(1. 湖南大学 数学与计量经济学院, 长沙 410082;
2. 湖南师范大学 数学与计算机科学学院, 长沙 410081)

(傅衣铭推荐)

摘要: 利用一维投影型插值与有限元超收敛基本估计, 对一类两点边值问题, 严格证明了袁驷等人由单元能量投影(EEP)法获得的节点恢复导数, 当有限元空间的次数不超过 4 时, 具有最佳阶超收敛. 理论分析圆满地解释了已有的数值结果.

关 键 词: 超收敛应力; 单元能量投影法; 有限元; 两点边值问题; 投影型插值
中图分类号: O242.21 文献标识码: A

引 言

在有限元发展史上, 有许多关于导数恢复技巧的研究. 对于一维问题, 最近的工作包括张铁[1]的导数小片插值恢复技巧, 朱起定、赵庆华[2]提出的整体强超收敛的校正格式, 陈传淼等人[3]基于新误差展开式获得的强超收敛点等.

2004 年袁驷等人[4]基于力学原理提出了所谓的"单元能量投影法", 由此导出的节点导数恢复公式很简单. 令人惊异的是数值例子显示, 当有限元空间的次数 $k \leqslant 4$ 且式(1a)中 $p = 1$ 时, 节点恢复导数精度为 $O(h^{2k})$. 本文的目的是对这一现象给出严格的数学理论证明. 我们将证明, 对一类两点边值问题, 文献[4]的节点恢复导数精度为 $O(h^{\min\{2k, k+4\}})$, 从而当 $k \leqslant 4$ 时为 $O(h^{2k})$.

我们用 C 表示一般常数, 它在不同的地方可以有不同的值, 同时我们使用标准的 Sobolev 空间及其上的模的记号[5].

1 问题描述

考虑如下的两点边值问题:

$$\begin{cases} Lu = -(pu')' + qu = f, \quad x \in (0,1) = I, & (1\mathrm{a}) \\ u(0) = u(1) = 0, & (1\mathrm{b}) \end{cases}$$

其中 $p(x) \geqslant c > 0$, $q(x) > 0$, p、q、f 充分光滑.

记 $J_h: 0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$ 为一拟一致剖分, $h_i = x_{i+1} - x_i$, $h = \max h_i$. 仿文献[4],

* 收稿日期: 2006-05-31; 修订日期: 2007-02-06
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10571046; 10371038)
作者简介: 赵庆华(1971—), 男, 湖南人, 讲师, 博士生(联系人. Tel: +86-731-8684835; Fax: +86-731-8823056; E-mail: qhzhao@hun.cn).

考虑 J_h 上任意一个单元 e, 记其两端点坐标为 x_1, x_2. 式(1) 的弱形式是: 找 $u \in H_0^1(I)$ 使得

$$a(u, v) = (f, v), \qquad \forall v \in H_0^1(I), \tag{2}$$

其中

$$a(u, v) = \int_0^1 (p u' v' + quv)\,\mathrm{d}x.$$

问题(1) 的有限元逼近是: 找 $u_h \in S_h$ 使得

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \qquad \forall v_h \in S_h,$$

其中 $S_h \subset H_0^1$ 是剖分 J_h 上的k 次 Lagrange 型有限元空间. 文献[4] 得到如下的结点应力恢复公式:

$$u'^*(x_i) = u_h'(x_i) + (-1)^{i-1}\frac{1}{p(x_i)}\int_{x_1}^{x_2}(f - Lu_h)N_i\,\mathrm{d}x, \qquad i = 1, 2. \tag{3}$$

其中 $N_i(x)$ 为线性单元形函数, 满足

$$N_i(x_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2.$$

我们的主要结果是:

定理 1 设 $u \in W^{k+1,\infty}(I)$, $p \equiv 1$, 方程(1) 的后处理格式(3), 当 $k \leqslant 4$ 时具有 $O(h^{2k})$ 阶精度, 当 $k \geqslant 5$ 时具有 $O(h^{k+4})$ 阶精度, 即

$$|u'(x_i) - u'^*(x_i)| \leqslant Ch^{\min\langle 2k, k+4\rangle}\|u\|_{k+1,\infty}, \qquad k \geqslant 1,\ i = 1, 2. \tag{4}$$

2 一维投影型插值

对任一单元 $e = (x_1, x_2)$, 记 $x_e = (x_1 + x_2)/2$, $h_e = (x_2 - x_1)$, $h_e = h_e/2$. 则

$$e = (x_e - h_e, x_e + h_e).$$

我们可将一维投影型插值理论(参见文献[5]) 用于单元 e.

引进 $L^2(e)$ 上的完备的规范正交多项式系:

$$\begin{cases} L_0(x) = \sqrt{\dfrac{1}{2}}h_e^{-1/2}, \\ L_i(x) = \sigma_i\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^i[A(x)]^i, \qquad i \geqslant 1, \\ \sigma_i = \sqrt{\dfrac{2i+1}{2}}\,\dfrac{1}{i!}h_e^{-i-1/2} = O(h_e^{-i-1/2}), \end{cases} \tag{5}$$

其中 $A(x) = [(x - x_e)^2 - h_e^2]/2$, 同时引进标准化 Lobatto 多项式系:

$$\begin{cases} \omega_0 = 1, \\ \omega_{i+1} = h_e^{-1/2}\displaystyle\int_{I_x} L_i(x)\,\mathrm{d}x = h_e^{-1/2}\sigma_i\left(\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{i-1}[A(x)]^i, \qquad i \geqslant 1, \end{cases} \tag{6}$$

其中 $I_x = (x_e - h_e, x)$.

现在假设 $v \in H^1(e)$, 则 $v' \in L^2(e)$, 故我们有 Fourier 展开[5]:

$$v' = \alpha_0 + \alpha_1 L_1(x) + \alpha_2 L_2(x) + \cdots + \alpha_k L_k(x) + \cdots, \tag{7}$$

其中 $\alpha_k = (v', L_k)_e$. 从而

$$v(x) = \sum_{j=0}^{\infty}\beta_j\,\omega_j(x), \qquad \forall v \in H^1(e), \tag{8}$$

其中

$$\begin{cases}\beta_0 = v(x_e - h_e),\\ \beta_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}(v(x_e + h_e) - v(x_e - h_e)),\\ \beta_j = h_e^{1/2}\alpha_{j-1}, \quad j \geqslant 2.\end{cases} \tag{9}$$

定义 k 次插值算子

$$i_k: H^1(I) \to P_k(e), i_k v(x) = \sum_{j=0}^{k}\beta_j \varphi_j(x), \qquad \forall x \in e. \tag{10}$$

算子 i_k 具有下列性质[5]:

$$\| v - i_k v \|_{0,\infty,e} \leqslant Ch^{k+1} | v |_{k+1,\infty}, \qquad \forall v \in W^{k+1,\infty}(e); \tag{11}$$

$$\| v - i_k v \|_{0,1,e} \leqslant Ch^{k+1} | v |_{k+1,1}, \qquad \forall v \in W^{k+1,1}(e); \tag{12}$$

$$(v - i_k v, p)_e = 0, \qquad \forall p \in P_{k-2}(e), v \in H^1(e). \tag{13}$$

记 u_h 为问题(1) 的 k 次有限元解, 当 $p = 1$ 时我们有强超接近关系:

$$\| u_h - i_k u \|_{0,\infty} \leqslant Ch^{k+3} | u |_{k+1,\infty}, \qquad k \geqslant 3. \tag{14}$$

3 定理 1 的证明

为证明定理 1, 我们需要以下两个已有的结果:

首先, 我们有经典的最大模误差估计

$$\| u - u_h \|_{0,\infty,e} \leqslant Ch^{k+1} \| u \|_{k+1,\infty}, \qquad k \geqslant 1, \tag{15}$$

此外, 对 $e_h = u - u_h$ 我们有如下的高精度结果[6]:

$$\max_j | e_h(x_j) - e_h(x_{j-1}) | \leqslant Ch^{2k+1} \| u \|_{k+1,\infty}, \qquad k \geqslant 1. \tag{16}$$

定理 1 的证明

只对 $i = 1$ 证明, $i = 2$ 的证明类似.

易知对 $x \in e$ 有

$$f - Lu_h = Le_h. \tag{17}$$

$$u'^*(x_1) = u_h'(x_1) + \frac{1}{p(x_1)}\int_{x_1}^{x_2}(f - Lu_h)N_1 \mathrm{d}x = u_h'(x_1) + \frac{1}{p(x_1)}(Le_h, N_1)_e,$$

从而由 $p(x) = 1$ 有

$$\begin{aligned} u'^*(x_1) &= u_h'(x_1) + [(LN_1, e_h)_e - e_h' N_1 |_{x_1}^{x_2} + e_h N_1' |_{x_1}^{x_2}] = \\ &u_h'(x_1) + (qN_1, e_h)_e + e_h'(x_1) - \frac{1}{x_2 - x_1}[e_h(x_2) - e_h(x_1)] = \\ &u'(x_1) + (e_h, qN_1)_e - \frac{1}{x_2 - x_1}[e_h(x_2) - e_h(x_1)]. \end{aligned} \tag{18}$$

由(16) 式及剖分的拟一致性知

$$\left|\frac{1}{x_2 - x_1}[e_h(x_2) - e_h(x_1)]\right| \leqslant h_e^{-1}. Ch^{2k+1} \| u \|_{k+1,\infty} \leqslant Ch^{2k} \| u \|_{k+1,\infty}. \tag{19}$$

现在估计 $(e_h, qN_1)_e$. 由式(15) 知

$$\begin{aligned} | (e_h, qN_1)_e | &\leqslant \| e_h \|_{0,\infty,e}. \| qN_1 \|_{0,1,e} \leqslant Ch^{k+1} \| u \|_{k+1,\infty}. Ch \leqslant \\ &Ch^{k+2} \| u \|_{k+1,\infty}, \qquad k \geqslant 1. \end{aligned} \tag{20}$$

当 $k \geqslant 3$ 时, 有

$$|(e_h, qN_1)_e| \leqslant |(u - i_k u, qN_1)_e| + |(i_k u - u_h, qN_1)_e| \leqslant$$
$$|(u - i_k u, qN_1 - i_{k-2}(qN_1))_e| + |(i_k u - u_h, qN_1)_e| .$$

由 Hölder 不等式, 式(11) 及式(12) 知

$$|(u - i_k u, qN_1 - i_{k-2}(qN_1))_e| \leqslant$$
$$\| u - i_k u \|_{0,\infty,e} \cdot \| qN_1 - i_{k-2}(qN_1) \|_{0,1,e} \leqslant$$
$$Ch^{k+1} \| u \|_{k+1,\infty} \cdot h^{k-1} \| qN_1 \|_{k-1,1,e} \leqslant$$
$$Ch^{2k} \| u \|_{k+1,\infty}.$$

另一方面, 由式(14) 我们知道

$$|(i_k u - u_h, qN_1)_e| \leqslant \| i_k u - u_h \|_{0,\infty,e} \cdot \| qN_1 \|_{0,1,e} \leqslant$$
$$Ch^{k+3} \| u \|_{k+1,\infty} \cdot h \leqslant Ch^{k+4} \| u \|_{k+1,\infty},$$

因此对于 $k \geqslant 3$ 我们有

$$|(e_h, qN_1)_e| \leqslant Ch^{2k} \| u \|_{k+1,\infty} + Ch^{k+4} \| u \|_{k+1,\infty} =$$
$$Ch^{\min\langle 2k, k+4\rangle} \| u \|_{k+1,\infty}. \tag{21}$$

由式(20) 与式(21) 我们有

$$|(e_h, qN_1)_e| \leqslant Ch^{\min\langle 2k, k+4\rangle} \| u \|_{k+1,\infty}, \qquad k \geqslant 1. \tag{22}$$

最后, 综合式(18)、(19) 和(22) 我们得到

$$|u'(x_1) - u'^*(x_1)| \leqslant Ch^{\min\langle k+4, 2k\rangle} \| u \|_{k+1,\infty}, \qquad k \geqslant 1.$$

证毕.

4 结 论

对于常系数两点边值问题, 我们严格证明了文献[4] 基于 EEP 法的节点导数恢复公式的精度为 $O(h^{\min\langle 2k, k+4\rangle})$, 完全解释了文献[4] 的数值结果.

注 本文的方法与结论适用于混合边界条件问题. (算例见下节)

5 补 充 算 例

考虑如下的两点边值问题

$$\begin{cases} -u'' + u = 1, & x \in I = (0, 1), \\ u(0) = u'(1) = 0. \end{cases} \tag{23}$$

真解 $u = (1 + e^2)^{-1}(e^x + e^{2-x}) + 1$. 我们用 $k = 4, 5$ 次元在均匀网格 $h = 1/N$, $N = 2, 4, \ldots, 32$ 上解方程(23), 结果列于表1, 可见当 $k = 5$ 时, 误差 $e'^*(0) = u'(0) - u'^*(0)$ 仍保持 $O(h^{2k})$ 的精度.

表1 恢复导数端点误差($k = 4, 5$ 次元)

N	$e'^*(0)(k = 4)$	收敛率	$e'^*(0)(k = 5)$	收敛率
2	−2.412 8 E−11	7.60	−5.619 4 E−14	9.92
4	−1.004 8 E−13	7.91	−5.572 1 E−17	9.98
8	−3.987 2 E−16	7.98	−5.462 7 E−20	9.99
16	−1.563 6 E−18	7.99	−5.339 9 E−23	10.00
32	−6.113 8 E−21	8.00	−5.216 0 E−26	10.00

致谢 本文作者感谢湖南大学科学基金(521108161)的资助.

[参 考 文 献]

[1] ZHANG Tie. The derivative patch interpolating recovery technique and superconvergence[J]. Chinese J Numer Math Appl, 2001, (2): 1-10.

[2] ZHU Qi-ding, ZHAO Qing-hua. SPR technique and finite element correction[J]. Numer Math, 2003, **96**(4): 185-196.

[3] CHEN Chuan-miao, XIE Zi-qing, LIU Jing-hong. New error expansion for one dimensional finite element and ultraconvergence[J]. Numer Math J Chinese Univ, 2005, **14**(4): 296-304.

[4] 袁驷, 王玫. 一维有限元后处理超收敛解答的 EEP 法[J]. 工程力学, 2004, **21**(2): 1-9.

[5] 林群, 朱起定. 有限元预处理与后处理理论[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1994.

[6] Douglas J, Dupont T. Galerkin approximations for the two point boundary problems using continuous, piecewise polynomial spaces[J]. Numer Math, 1974, **22**: 99-109.

Mathematical Analysis of EEP Method for One-Dimensional Finite Element Postprocessing

ZHAO Qing-hua[1], ZHOU Shu-zi[1], ZHU Qi-ding[2]

(1. College of Mathematics and Economatics, Hunan University, Changsha 410082, P. R. China;
2. College of Mathematics and Computer Science, Hunan Normal University, Changsha 410081, P. R. China)

Abstract: For a class of two-point boundary value problems, by virtue of one-dimensional projection interpolation and finite element superconvergence fundamental estimations, it was proved that the nodal recovery derivative obtained by Yuan's element energy projection (EEP) method had the optimal order superconvergence on condition that the degree of finite element space is no more than 4. The theoretical analysis coincides with the reported numerical results.

Key words: superconvergence stress; element energy projection method; finite element; two-point boundary value problems; projection interpolation