

# 寿命服从对数正态分布、有置信度时概率 疲劳 $S-N$ 曲线的合理重构\*

赵永翔, 杨冰, 彭佳纯

(西南交通大学 牵引动力国家重点实验室, 成都 610031)

(王银邦推荐)

摘要: 当概率疲劳  $S-N$  曲线以特定存活概率( $P$ )和置信度( $C$ )的方式给出并无法重做试验时, 除特定  $P-C$  外无法做其它概率水平的可靠性分析. 因此, 需要广泛适用的曲线模型. 建立了疲劳寿命服从对数正态分布时疲劳试验  $S-N$  数据及广义曲线的 Monte Carlo 模拟重构方法. 为了避免现有人为放大样本到数千给出偏危险评价, 从实际试验情况出发, 采用了材料小试样每组样本 7 至 20、结构试样每组样本至多 10 个、还原统计参量误差小于 5% 的模拟策略. 然后, 依据模拟数据利用回归法重建了可实现任意  $P-C$  水平可靠性分析的  $P-C-S-N$  曲线. 铁路 60Si2Mn 高强度弹簧钢概率曲线的重构实践说明了方法的有效性与适用性.

关键词: 疲劳; 概率  $S-N$  曲线; 重构; Monte Carlo 模拟

中图分类号: O346.2; TB114.3; U270.331 文献标识码: A

## 引 言

试验测定概率疲劳  $S-N$  曲线, 需要花费许多时间和财力、物力, 目的是实现任意概率水平的疲劳可靠性分析. 可是由于种种原因, 一些历史曲线仅以特定存活概率( $P$ )和置信度( $C$ )的方式给出<sup>[1]</sup>, 除给定  $P-C$  水平外无法做其它概率水平的可靠性分析. 在无原试验数据情况下, 要实现任意  $P-C$  水平的可靠性设计、寿命预测和评价, 就需要发展曲线的重构技术.

不少研究者做过疲劳性能与疲劳断裂行为的模拟研究<sup>[2-14]</sup>. 为了精确表征原统计特征参数, 往往模拟样本过大<sup>[2-4]</sup>. 无异于人为放大样本, 使评价结果偏于危险. 为了克服这一缺陷, 应当采用材料小试样样本数 7 至 20、产品结构试样至多 10、还原统计参数误差小于 5% 的模拟策略<sup>[15]</sup>. 按照这一策略, 这里探索疲劳寿命服从对数正态分布下  $S-N$  数据和概率  $S-N$  曲线的 Monte Carlo 重构方法.

\* 收稿日期: 2005-12-13; 修订日期: 2007-01-30

基金项目: 863 计划资助项目(2006AA04Z406); 国家自然科学基金资助项目(50375130; 50323003; 50575189); 全国优秀博士学位论文作者专项资金资助项目(200234); 教育部新世纪人才培养计划资助项目(NCET-04-0890)

作者简介: 赵永翔(1963-), 男, 四川金堂人, 教授, 博士, 博导(联系人. Tel: + 86-28-87600935; + 86-28-87600868; E-mail: yxzhao@home.swjtu.edu.cn).

# 1 方 法

## 1.1 已知条件

依照 Basquin  $S-N$  方程, 任意概率水平的疲劳  $S-N$  曲线可用如下模型来表征

$$(\lg N)_{P-C} = A_{P-C} + B_{P-C} \lg S_a, \quad (1)$$

式中:  $N$ 、 $S_a$  分别为疲劳寿命和疲劳强度幅,  $A_{P-C}$  和  $B_{P-C}$  为材料常数. 已知情况可分为如下 2 种:

- 1) 情况 1<sup>[2]</sup>: 已知  $(P-C)_i$  下参数  $(A_{P-C})_i$  和  $(B_{P-C})_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_P$ ;  $n_P \geq 2$ ;
- 2) 情况 2<sup>[5]</sup>: 已知强度幅  $S_{ak}$  及  $(P-C)_i$  下  $(N_{P-C})_{ki}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n_L$ ;  $n_L \geq 2$ .

## 1.2 模拟参数

当  $N$  服从对数正态分布,  $S_{ak}$  下任意  $P-C$  水平的  $\lg N$  可表示为

$$(\lg N)_{P-C} = (\lg N)_{av} - [Z_P + t_{1-C}(n_g - 1)](\lg N)_{rms}, \quad (2)$$

式中:  $(\lg N)_{av}$  和  $(\lg N)_{rms}$  分别是对数疲劳寿命均值与均方差;  $Z_P$  是概率水平  $P$  时正态分布的百分点函数值,  $n_g$  是该组试样数,  $t_{1-C}(n_g - 1)$  是置信水平  $C$  下自由度为  $n_g - 1$  时的  $t$  分布函数值. 这说明  $S_{ak}$  所对应的模拟参数就是  $(\lg N)_{av}$ 、 $(\lg N)_{rms}$  和样本数  $n_g$ .  $(\lg N)_{av}$  和  $(\lg N)_{rms}$  分别由如下方程获得<sup>[16]</sup>

$$(\lg N)_{av} = A_{av} + B_{av} \lg S_a, \quad (3)$$

$$(\lg N)_{rms} = A_{rms} + B_{rms} \lg S_a. \quad (4)$$

式(3)和(4)分别表示均值与均方差  $\lg S - \lg N$  关系,  $A_{av}$  和  $B_{av}$  是均值关系中的材料常数,  $A_{rms}$  和  $B_{rms}$  是均方差关系中的材料常数. 区分 2 种情况如下:

### 1.2.1 情况 1

- 1) 已知均值  $(\lg N)_{av} - \lg S_a$  关系参数  $A_{av}$  和  $B_{av}$  且  $n_P = 2$ .  $A_{rms}$  和  $B_{rms}$  的计算式为

$$A_{rms} = \frac{A_{av} - (A_{P-C})_2}{(Z_P)_2 + t_{1-C}(n_g - 1)}, \quad (5)$$

$$B_{rms} = \frac{B_{av} - (B_{P-C})_2}{(Z_P)_2 + t_{1-C}(n_g - 1)}, \quad (6)$$

其中  $n_g$  在模拟过程中按照式(2)符合上述模拟策略的条件下获得.

- 2) 已知均值  $(\lg N)_{av} - \lg S_a$  关系且  $n_P \geq 3$ .  $A_{rms}$ 、 $B_{rms}$  和  $t_{1-C}(n_g - 1)$  由下面公式求解:

$$A_{rms} = \sum_{i=2}^{n_P} \frac{A_{av} - (A_{P-C})_i}{(Z_P)_i + t_{1-C}(n_g - 1)}, \quad (7)$$

$$B_{rms} = \sum_{i=2}^{n_P} \frac{B_{av} - (B_{P-C})_i}{(Z_P)_i + t_{1-C}(n_g - 1)}, \quad (8)$$

$$t_{1-C}(n_g - 1) = \frac{1}{n_P - 2} \sum_{i=3}^{n_P} \frac{(Z_P)_2(A_{av} - (A_{P-C})_2) - (Z_P)_i(A_{av} - (A_{P-C})_i)}{(A_{P-C})_2 - (A_{P-C})_i}. \quad (9)$$

求解获得  $t_{1-C}(n_g - 1)$  后,  $n_g$  可根据  $t$  分布函数(表)获得.

- 3) 未知均值  $(\lg N)_{av} - \lg S_a$  关系但  $n_P \geq 3$ .  $A_{rms}$  和  $B_{rms}$  由下面公式求解:

$$A_{rms} = \frac{1}{n_P - 1} \sum_{i=2}^{n_P} \frac{(A_{P-C})_i - (A_{P-C})_1}{(Z_P)_1 - (Z_P)_i}, \quad (10)$$

$$B_{rms} = \frac{1}{n_P - 2} \sum_{i=1}^{n_P} \frac{(B_{P-C})_i - (B_{P-C})_1}{(Z_P)_1 - (Z_P)_i}, \quad (11)$$

$A_{av}$ 、 $B_{av}$  和  $t_{1-c}(n_g - 1)$  则在模拟过程中按照下面公式在符合模拟策略下获得:

$$A_{av} = \frac{1}{n_P} \sum_{i=1}^{n_g} (A_{P-C})_i + [(Z_P)_i + t_{1-c}(n_g - 1)] A_{mss}, \quad (12)$$

$$B_{av} = \frac{1}{n_P} \sum_{i=1}^{n_g} (B_{P-C})_i + [(Z_P)_i + t_{1-c}(n_g - 1)] B_{mss}. \quad (13)$$

### 1.2.2 情况 2

1) 已知  $S_a$  下的均值  $(\lg N)_{av}$  及  $n_P = 2$ . 首先利用式(3) 和(1) 回归得到均值 S-N 曲线与  $(P-C)_2$  水平 S-N 曲线方程. 然后利用情况 1 中已知均值  $(\lg N)_{av} - \lg S_a$  关系且  $n_P = 2$  时方法求得模拟参数.

2) 已知  $S_a$  下的均值  $(\lg N)_{av}$  及  $n_P \geq 3$ . 首先利用式(3) 和(1) 回归得到均值 S-N 曲线与  $(P-C)_2$  及  $(P-C)_3$  水平 S-N 曲线方程. 然后, 利用情况 1 中已知均值  $(\lg N)_{av} - \lg S_a$  关系且  $n_P \geq 3$  时方法求得模拟参数.

3) 未知  $S_a$  下的均值  $(\lg N)_{av}$  但  $n_P \geq 3$ . 首先利用式(1) 回归得到  $(P-C)_1$ 、 $(P-C)_2$  及  $(P-C)_3$  水平 S-N 曲线方程. 然后, 利用情况 1 中未知均值  $(\lg N)_{av} - \lg S_a$  关系但  $n_P \geq 3$  时方法求得模拟参数.

### 1.3 Monte Carlo 模拟

在  $S_{ak}$  水平,  $N$  服从对数正态分布时的模拟函数可表示为<sup>[15]</sup>

$$\lg N_i = (\lg N)_{av} - Z(r_i) (\lg N)_{mss}, \quad (14)$$

式中,  $r_i$  是符合  $U[0, 1]$  的伪随机变量,  $Z(r_i)$  是概率水平  $r_i$  下的标准正态分布函数. 通常, 各种计算机高级语言编制有  $r_i$  发生器, 可以直接使用. 可是, 要满足材料小试样模拟样本数  $\leq 20$ 、产品结构试样  $\leq 10$ 、还原统计参数误差  $\leq 5\%$  的模拟策略, 现有随机数发生器不一定满足要求. 这里建议采用混合乘同余法. 随机数可通过调整基本参数而变化. 产生随机数的公式如下:

$$r_i = \frac{X_i}{M_2}, \quad (15)$$

$$X_i = \text{mod}(M_1 X_{i-1} + Q, M_2), \quad (16)$$

式中,  $X_0$ 、 $M_1$ 、 $M_2$  和  $Q$  是经验常数, 通常  $X_0$  取为非负整数、 $M_1 = 5^{2K+1}$ 、 $M_2 = 2^K$ 、 $Q$  取为奇数,  $K$  为正整数, 可产生周期  $T \leq M_2$  的伪随机数.

### 1.4 重构

实践证明, 按照上述方法模拟获得各组 S-N 数据样本数  $n_g$  相等. 依照 Basquin S-N 方程, 当  $N$  服从对数正态分布时重构的 P-C-S-N 曲线可表示为

$$(\lg N)_{P-C} = A_{av} - [Z_P + t_{1-c}(n_g - 1)] A_{mss} + \left\{ B_{av} - [Z_P + t_{1-c}(n_g - 1)] B_{mss} \right\} \lg S_a, \quad (17)$$

$$(\lg N)_{P-C} = A_{P-C} + B_{P-C} \lg S_a. \quad (18)$$

$A_{P-C}$  和  $B_{P-C}$  由下面公式求解:

$$A_{P-C} = A_{av} - [Z_P + t_{1-c}(n_g - 1)] A_{mss}, \quad (19)$$

$$B_{P-C} = B_{av} - [Z_P + t_{1-c}(n_g - 1)] B_{mss}. \quad (20)$$

应用式(17) 可做任意该水平的可靠性分析与评价.

## 2 举 例

### 2.1 已知条件与要求

已知4级强度水平下60Si2Mn弹簧钢7.5 mm直径光滑圆棒试样的历史 $P-S-N$ 曲线参数见表1<sup>[1]</sup>,现要求根据已知信息重构获得 $P-C-S-N$ 曲线.

表1 60Si2Mn弹簧钢的历史 $P-S-N$ 曲线参数<sup>[1]</sup>

$S_d/\text{MPa}$	$N_{av}/\text{cycle}$	$N_{0.95-95\%}/\text{cycle}$
730	1 101 000	377 000
775	662 000	348 000
810	274 000	156 000
840	181 000	72 000

### 2.2 解

该例子属于前述情况2已知 $S_a$ 下均值 $(\lg N)_{av}$ 及 $n_p = 2$ 情形.根据已知的 $S_a - (\lg N)_{av}$ 和 $S_a - ((\lg N)_{P-C})_2$ 数据可回归得到如下均值与 $(P-C)_2$ 时 $S-N$ 曲线方程

$$(\lg N)_{av} = 44.4068 - 13.3849 \lg S_a \quad (21)$$

$$(\lg N)_{0.95-95\%} = 39.5953 - 11.8436 \lg S_a \quad (22)$$

这两个方程拟合表1中数据的相关系数分别为0.9858和0.9211,效果见图1;4个强度水平对应的曲线统计参数及预测值 $N_{pr}$ 与原参数的误差 $e_1$ 见表2.这些误差的存在,说明模拟目标统计参数宜根据回归曲线参数确定.

表2 60Si2Mn弹簧钢历史数据的回归统计参数及与原参数的误差

$S_d/\text{MPa}$	$N_{av}$		$N_{0.95-95\%}$	
	$N_{pr}/\text{cycle}$	$e_1/(\%)$	$N_{pr}/\text{cycle}$	$e_1/(\%)$
730	1 206 550	-9.59	482 194	-27.90
775	541 779	18.16	237 432	31.77
810	299 955	-9.47	140 715	9.80
840	184 353	-1.85	91 470	-27.04

表3 60Si2Mn弹簧钢的重构 $S-N$ 曲线、统计参数及与目标统计参数的误差

$S_d/\text{MPa}$	$n_g$	$N_{av}$		$N_{0.95-95\%}$		$N_i/\text{cycle} (i = 1, 2, \dots, n_g)$
		$N_{si}/\text{cycle}$	$e_2/(\%)$	$N_{si}/\text{cycle}$	$e_2/(\%)$	
730	11	1 218 082	0.96	484 068	0.39	1 874 549, 1 352 533, 1 058 439, 1 215 472, 661 202, 1 392 139, 1 238 126, 1 502 348, 1 010 079, 1 391 616, 1 115 732
775	11	546 434	0.86	238 261	0.35	805 264, 600 396, 481 571, 545 381, 315 405, 616 187, 554 515, 659 895, 461 733, 615 979, 504 955
810	11	302 319	0.79	141 166	0.32	431 488, 329 602, 269 225, 301 784, 182 596, 337 547, 306 418, 359 451, 259 033, 337 442, 281 196
840	11	185 698	0.73	91 741	0.30	258 149, 201 166, 166 797, 185 394, 116 426, 205 652, 188 029, 217 980, 160 941, 205 593, 173 653

以表2中统计参数为目标参数,重构获得 $S-N$ 数据见表3.采用回归方法,获得重构概率疲劳 $S-N$ 曲线基本参数 $A_{av}$ 、 $B_{av}$ 、 $A_{mns}$ 、 $B_{mns}$ 和 $n_g$ 分别为44.4567、-13.4009、1.4002、-0.4485和

11. 4 个强度水平重构曲线的统计参数重构值  $N_{si}$  及与目标统计参数的误差  $e_2$  见表 3, 重构概率曲线效果见图 2. 从图表中可知, 重构曲线在给出完善概率 S-N 曲线的同时, 较好地还原了目标统计参数.

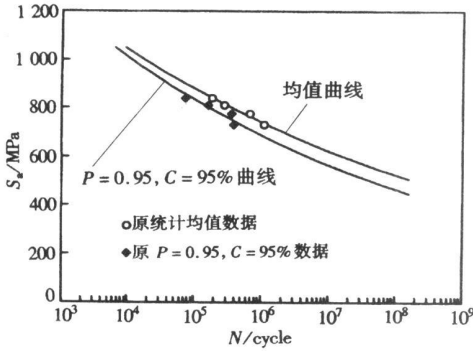


图 1 回归特定概率 S-N 曲线

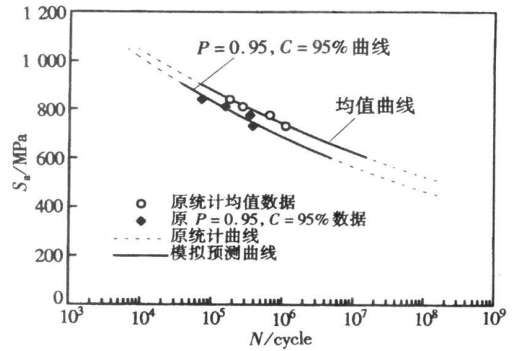


图 2 重构与原概率 S-N 曲线

### 3 结 论

- 1) 提出了疲劳寿命服从对数正态分布、历史概率疲劳 S-N 曲线以特定 P-C 水平给出时 P-C-S-N 曲线的重构方法.
- 2) 所重构的 P-C-S-N 曲线可完成任意概率水平的疲劳可靠性分析.
- 3) 铁路 60Si2Mn 弹簧钢可靠性 S-N 曲线重构实例, 说明了重构方法的有效性和可行性.

#### [参 考 文 献]

- [1] 铁道部科学研究院金属及化学研究所. 铁路常用材料 P-S-N 曲线及 Goodman 图手册[R]. 北京: 铁道部科学研究院金属及化学研究所, 1999.
- [2] Chanis C C. Probabilistic simulation of multi-scale composite behavior[J]. Theoretical and Applied Fracture Mechanics, 2004, 41(1/3): 51-61.
- [3] Todinov M T. Probability distribution of fatigue life controlled by defects[J]. Computers and Structures, 2001, 79(3): 313-318.
- [4] Mao H Y, Mahadevan S. Reliability analysis of creep-fatigue failure[J]. International Journal of Fatigue, 2000, 22(9): 789-797.
- [5] Sun Z, Daniel I M, Luo J J. Modeling of fatigue damage in a polymer matrix composite[J]. Materials Science and Engineering, A 2003, 361(1/2): 302-311.
- [6] Rajasankar J, Iyer N R, Rao T V S R A. Structural integrity assessment of offshore tubular joints based on reliability analysis[J]. International Journal of Fatigue, 2003, 25(7): 609-619.
- [7] Luo J, Bowen P. A probabilistic methodology for fatigue life prediction[J]. Acta Materialia, 2003, 51(12): 3537-3550.
- [8] Lassen T, Sørensen J D. A probabilistic damage tolerance concept for welded joints—Part 1: data base and stochastic modeling[J]. Marine Structures, 2002, 15(6): 599-613.
- [9] Khaleel M A, Simonen F A. A model for predicting vessel failure probabilities including the effects of service inspection and flaw sizing errors[J]. Nuclear Engineering and Design, 2000, 200(3): 353-369.
- [10] Siddiqui N A, Ahmad S. Fatigue and fracture reliability of TLP tethers under random loading[J].

- Marine Structures, 2001, **14**(3): 331-352.
- [11] 魏建锋, 郑修麟, 丁召荣. 变幅载荷下疲劳寿命预测及其模拟结果[J]. 机械强度, 1999, **21**(1): 66-68.
- [12] 濮进. 长寿命区疲劳寿命概率分布[J]. 机械强度, 2001, **23**(1): 43-46.
- [13] 叶乃全, 胡毓仁, 陈伯真. 超静定结构系统疲劳可靠性分析的蒙特卡洛方法[J]. 上海交通大学学报, 1998, **32**(11): 8-12.
- [14] 丁克勤, 柳春图. 海洋平台 E362Z35 钢表面疲劳裂纹扩展速率的蒙特卡洛模拟[J]. 海洋工程, 1998, **16**(2): 90-95.
- [15] 赵永翔, 杨冰, 彭佳纯, 等. 概率疲劳极限与可靠性曲线的 Monte Carlo 模拟重构技术[R]. 成都: 西南交通大学牵引动力实验室, 2005.
- [16] 赵永翔, 高庆, 王金诺. 估计三种常用应力-寿命模型概率设计 S-N 曲线的统一方法[J]. 核动力工程, 2001, **22**(1): 42-52.

## Reconstruction of the Probabilistic $S-N$ Curves Under Fatigue Life Following Lognormal Distribution With a Given Confidence

ZHAO Yong-xiang, YANG Bing, PENG Jia-chun

(State Key Laboratory of Traction Power, Southwest Jiaotong University,  
Chengdu 610031, P. R. China)

**Abstract:** When the historic probabilistic  $S-N$  curves were given under special survival probability and confidence levels and there is no possibility to re-test, fatigue reliability analysis at other levels can not be done except for the special levels. Therefore, the widely applied curves are expected. Monte Carlo reconstruction methods of the test data and the curves are investigated under fatigue life following lognormal distribution. To overcome the non-conservative assessment of existent man-made enlarging the sample size up to thousands, a simulation policy is employed to address the true production which the sample size is controlled less than 20 for material specimens, 10 for structural component specimens and the errors matching the statistical parameters less than 5%. Availability and feasibility of the present methods have been indicated by the reconstruction practice of the test data and curves for 60Si2Mn high strength spring steel of railway industry.

**Key words:** fatigue; probabilistic  $S-N$  curves; reconstruction; Monte Carlo simulation