文章编号: 1000-0887(2007) 04-0479-08

求解热传导反问题的一种正则化 Newton 型迭代法*

贺国强, 孟泽红

(上海大学 数学系, 上海 200444)

(鲁传敬推荐)

摘要: 讨论热传导方程求解系数的一个反问题. 把问题归结为一个非线性不适定的算子方程后, 考虑该方程的 Newton 型迭代方法. 对线性化后的 Newton 方程用隐式迭代法求解, 关键的一步是引入了一种新的更合理的确定(内) 迭代步数的后验准则. 对新方法及对照的 Tikhonov 方法和 Bakushiskii 方法进行了数值实验, 结果显示了新方法具有明显的优越性.

关 键 词: 反问题; 非线性不适定算子方程; Newton 型方法; 隐式迭代法; 迭代终止准则
中图分类号: O241 文献标识码: A

1 问题与 Newton 方程的推导

许多应用科学和工程中的问题会导致求解如下热传导方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(a(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) = f(x,t), & (x,t) \in (0,1)\times(0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in [0,1], \\ u(0,t) = r_0(t),\ u(1,t) = r_1(t), & t \in [0,T] \end{cases} \tag{1}$$

的反问题[1,2]. 本文考虑方程(1) 的求系数 $a(x)$ 的反问题, 为此需要补充信息. 假设给出的补充条件为

$$Bu = \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = r(t), \tag{2}$$

若 S 表示 $a \mapsto u$ 的非线性算子, 则上述反问题可用算子方程表示成

$$F(a) = B(S(a)) = r \tag{3}$$

的形式.

实际问题中(3) 式的右端往往有扰动, 从而变为

$$F(a) = r^{\delta}, \tag{4}$$

而扰动右端满足

$$\| r^{\delta} - r \| \leqslant \delta, \tag{5}$$

$\delta \geqslant 0$ 是已知的误差界. 方程(3) 与(4) 是不适定的非线性算子方程, 即解对方程的右端没有连

* 收稿日期: 2006-08-28; 修订日期: 2007-01-12
作者简介: 贺国强(1946—), 男, 浙江镇海人, 教授(联系人. Tel: + 86-21-66134464; E-mail: gqhe@staff.shu.edu.cn).

续相依性,所以在求解时必须引入正则化机制[3].

设算子 F 为 Fr chet 连续可微,求解非线性方程最有效的方法是 Newton 迭代法,对(4)式则为

$$F'(a_n^\delta)\delta a_n = r^\delta - F(a_n^\delta),\qquad n\geqslant 0,\ a_0^\delta \text{ 给定},\tag{6}$$
$$a_{n+1}^\delta = a_n^\delta + \delta a_n.$$

下面推导线性化方程(6)的形式. 为避免复杂的数学推导,我们采用更直观的 GPST 方法[4],并先设 $\delta = 0$.

设 $a_n(x)$ 已得,$u_n(x,t)$ 是正问题(1)当 $a(x) = a_n(x)$ 时的解,把精确的 $a^*(x)$ 和 $u^*(x,t)$ 表示成

$$a^* = a_n + \Delta a_n,\quad u^* = u_n + \Delta u.\tag{7}$$

代入(1)式,并注意到 u_n 满足的方程,可得

$$\frac{\partial \Delta u_n}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a_n\frac{\partial \Delta u_n}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta a_n\frac{\partial u_n}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\Delta a_n\frac{\partial \Delta u_n}{\partial x}\right) = 0.$$

假设 Δa_n、Δu_n 和 $\partial\Delta u_n/\partial x$ 都是小量,舍去二阶小量,得到 Δa_n、Δu_n 的近似 δa_n 和 v_n 满足的方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_n}{\partial t} - \dfrac{\partial}{\partial x}\left(a_n\dfrac{\partial v_n}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\delta a_n\dfrac{\partial u_n}{\partial x}\right), & (x,t)\in(0,1)\times(0,T),\\ v_n|_{t=0} = 0, & x\in[0,1],\\ v_n|_{x=0} = v_n|_{x=1} = 0, & t\in[0,T].\end{cases}\tag{8}$$

由(7)式和(2)式可得

$$\frac{\partial v_n(0,t)}{\partial x} = r(t) - \frac{\partial u_n(0,t)}{\partial x}.\tag{9}$$

用 $G_n(x,t;\xi,\zeta)$ 表示偏微分方程(8)的基本解,则有

$$v_n(x,t) = \int_0^t\int_0^1 G_n(x,t;\xi,\zeta)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\delta a_n(\xi)\frac{\partial u_n(\xi,\zeta)}{\partial\xi}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta.\tag{10}$$

利用补充条件(9)可得

$$\int_0^t\int_0^1\frac{\partial}{\partial x}G_n(0,t;\xi,\zeta)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\delta a_n(\xi)\frac{\partial u_n(\xi,\zeta)}{\partial\xi}\right)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta = r(t) - \frac{\partial u_n(0,t)}{\partial x}.$$

为简单计,设 $a(x)$ 端点值已知,即 $\delta a_n(0) = \delta a_n(1) = 0$,于是由上式可得(用 r^δ 取代 r)

$$-\int_0^t\int_0^1\left[\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial x}G_n(0,t;\xi,\zeta)\frac{\partial u_n(\xi,\zeta)}{\partial\xi}\right]\delta a_n(\xi)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\zeta = r^\delta(t) - \frac{\partial u_n(0,t)}{\partial x}.\tag{11}$$

在一定光滑性假设下可以证明(11)式即为(6)式(参阅文献[4]).

2 离 散 化

对(11)式离散,需要预先计算基本解 G_n,不方便. 下面采用文献[4]中的处理方法:把方程(1)和(8)离散化,然后把 δa_n"析出",这相当于用离散的基本解把 δa_n 表示出来.

设 $h = 1/M$、$\tau = T/N$,M、N 为正整数,$w_i^j = w(ih, j\tau)$ 是离散函数. 引入记号

$$w_{x,i}^j = \frac{1}{h}(w_{i+1}^j - w_i^j),\quad w_{\bar{x},i}^j = \frac{1}{h}(w_i^j - w_{i-1}^j),$$
$$w_{\mathring{x},i}^j = \frac{1}{2h}(w_{i+1}^j - w_{i-1}^j),\quad w_{t,i}^j = \frac{1}{\tau}(w_i^{j+1} - w_i^j),$$

于是可把方程(1)离散为

$$u_{t,i}^j - \frac{1}{4}\left[(au_{\bar{x}}^{j+1})_{x,i} + (au_x^{j+1})_{\bar{x},i} + (au_{\bar{x}}^j)_{x,i} + (au_x^j)_{\bar{x},i}\right] = f_i^{j+1/2},$$

$$i = 1, 2, \cdots, M-1; j = 0, 1, \cdots, N-1. \tag{12}$$

上述格式是具有二阶精度无条件稳定的隐式差分格式, 把(8) 式离散可得(为简明计, 略去足标 n)

$$v_{t,i}^j - \frac{1}{4}[(av_x^{j+1})_{x,i} + (av_x^{j+1})_{x,i} + (av_x^j)_{x,i} + (av_x^j)_{x,i}] =$$
$$\frac{1}{4}[(\delta a u_x^{j+1})_{x,i} + (\delta a u_x^{j+1})_{x,i} + (\delta a u_x^j)_{x,i} + (\delta a u_x^j)_{x,i}],$$
$$i = 1, 2, \cdots, M-1; j = 0, 1, \cdots, N-1. \tag{13}$$

(13) 式又可写成

$$\boldsymbol{A}_j \boldsymbol{v}^{j+1} = \boldsymbol{B}_j \boldsymbol{v}^j + \boldsymbol{E}_j \delta \boldsymbol{a}, \qquad j = 0, 1, \cdots, N-1, \tag{14}$$

其中 $\boldsymbol{v}^j = (v_1^j, v_2^j, \cdots, v_{M-1}^j)^{\mathrm{T}}$, $\delta \boldsymbol{a} = (d_1, d_2, \cdots, d_{M-1})^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{A}_j$、$\boldsymbol{B}_j$、$\boldsymbol{E}_j$ 都是 $(M-1) \times (M-1)$ 矩阵, 它们的元素可在 (12) 式求解后得到(其中 $a = a_n^\delta$). 假设 $\boldsymbol{A}_j$ 可逆, 则由(14) 式得

$$\boldsymbol{v}^{j+1} = \boldsymbol{W}_{j+1} \delta \boldsymbol{a}, \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{W}_{j+1} = (w_{ls}^{(j+1)})_{(M-1)\times(M-1)} = \boldsymbol{A}_j^{-1}(\boldsymbol{B}_j \boldsymbol{W}_j + \boldsymbol{E}_j), j = 0, 1, \cdots, N-1$, $\boldsymbol{W}_0 = 0$. 对于 $\partial v(0, j\tau)/\partial x$ 用下式逼近:

$$\frac{\partial v(0, j\tau)}{\partial x} \approx \frac{1}{2h}(-3v_0^j + 4v_1^j - v_2^j).$$

这样结合(9) 式, 就可得到一个求解 $\delta \boldsymbol{a}$ 的线性方程组

$$\frac{1}{2h}\sum_{s=1}^{M-1}(4w_{1s}^{(j)} - w_{2s}^{(j)}) d_s = r^\delta(j\tau) - \frac{1}{2h}(-3u_0^j + 4u_1^j - u_2^j),$$
$$j = 1, 2, \cdots, N. \tag{16}$$

或写成矩阵形式(恢复足标 n)

$$\boldsymbol{Z}_n \delta \boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}_n^\delta, \tag{17}$$

其中 $\boldsymbol{Z}_n$ 是 $N \times (M-1)$ 矩阵, (17) 式就是(11) 式的一种离散形式.

3 Newton 方程的求解

方程(11) 是关于 δa_n 的第一类积分方程, 所以它或(6) 式是不适定的, 从而它及离散形式(17) 式必须用正则化方法求解. 下面以 Newton 方程(6) 为模型讨论之.

设 $F: D(F) \subset X \to Y$ 是 Fr chet 连续可微算子, X、Y 是 Hilbert 空间, 并设 F' 在 $D(F)$ 上满足 Lipschitz 条件

$$\| F'(a_1) - F'(a_2) \| \leqslant L \| a_1 - a_2 \|, \qquad \forall a_1, a_2 \in D(F), \tag{18}$$

其中 L 是 Lipschitz 常数. 现设用某种正则化方法来求解(6) 式得

$$a_{n+1}^\delta = a_n^\delta + g_{\alpha_n}(A_n^* A_n) A_n^* (r^\delta - F(a_n^\delta)), \qquad n \geqslant 0, \tag{19}$$

其中 $A_n = F'(a_n^\delta)$, $g_{\alpha_n}(\lambda)$ 是正则化逼近函数, α_n 是正则化参数[3]. 现在关键的问题是怎样选取 α_n?由于(6) 式的右端应视作扰动数据, 而且扰动界又不知, 所以 α_n 的选取是一个棘手的问题. 另一方面, α_n 选取合适与否, 会本质地影响整个 Newton 算法的效果, 只有极少几种方法在文献中报导, “L-曲线”等与方程右端扰动界无关的选取 α_n 的方法是一种选择, 但这会大大增加计算量, 而且效果没有保证[5]. 一种实用的方法是如下的先验选取准则:

$$0 < q \leqslant \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \leqslant 1, \alpha_n \to 0, \qquad 当 n \to \infty 时. \tag{20}$$

1992 年, Bakushiskii 把 Tikhonov 正则化方法应用于(6) 式的一个等价形式, 得

$$a_{n+1}^{\delta} = a_0^{\delta} + (A_n^* A_n + \alpha_n I)^{-1}[A_n^*(r^{\delta} - F(a_n^{\delta})) + \alpha_n(a_n^{\delta} - a_0^{\delta})], \tag{21}$$

并且证明了收敛性, 由此引发了一系列的研究[6-8].

先验选取准则(20) 与具体问题无关, 一般来说, 只能求得(6) 式的不太理想的近似解. 下面我们将提出一种与问题相关的后验选取 α_n 的准则.

设精确解 $a^* = a_n^{\delta} + \Delta a_n$, 精确增量 Δa_n 满足显然的等式

$$F'(a_n^{\delta})\Delta a_n = F'(a_n^{\delta})\Delta a_n, \tag{22}$$

现把(6) 式看作是(22) 式的一个扰动方程, 则由 Lipschitz 条件(15), (6) 式右端满足如下的扰动界估计:

$$\begin{aligned}\| r^{\delta} - F(a_n^{\delta}) - F'(a_n^{\delta})\Delta a_n \| &\leqslant \delta + \| F(a^*) - F(a_n^{\delta}) - F'(a_n^{\delta})\Delta a_n \| \leqslant \\ &\delta + \frac{L}{2}\|\Delta a_n\|^2.\end{aligned} \tag{23}$$

$\|\Delta a_n\|$ 未知, 若用(6) 式的正则化解 $\delta a_n = \delta a_n(\alpha_n) = g_{\alpha_n}(A_n^* A_n)A_n^*(r^{\delta} - F(a_n^{\delta}))$ 的范数 $\|\delta a_n\|$ 代替 $\|\Delta a_n\|$, 并采用 Morozov 残差准则[3], 就可以得到如下确定 α_n 的方程:

$$\| F'(a_n^{\delta})\delta a_n(\alpha_n) - (r^{\delta} - F(a_n^{\delta})) \| = c_1\delta + c_2\|\delta a_n(\alpha_n)\|^2, \tag{24}$$

其中常数 $c_1 \geqslant 1$, $c_2 \geqslant L/2$.

后验选取 α_n 的准则(24) 式比较复杂, 不容易求解. 但若用求解线性不适定方程的隐式迭代法[9-10] 来求解(6) 式, 可得

$$\begin{aligned}&(A_n^* A_n + \alpha_n^{(j)} I)\delta a_n^{(j)} = A_n^*(r^{\delta} - F(a_n^{\delta})) + \alpha_n^{(j)}\delta a_n^{(j-1)}, \qquad j \geqslant 1, \\ &\delta a_n^{(0)} = 0,\end{aligned} \tag{25}$$

这里$\left\{\alpha_n^{(j)}\right\}_{j\geqslant 1}$是预先选定的一列正数. 现在迭代次数起正则化参数的作用, $j = j_n$ 是第一个满足终止准则

$$\| F'(a_n^{\delta})\delta a_n^{(j)} - (r^{\delta} - F(a_n^{\delta})) \| \leqslant c_1\delta + c_2\|\delta a_n^{(j)}\|^2 \tag{26}$$

的值, 并令 $\delta a_n = \delta a_n^{(j_n)}$, $a_{n+1}^{\delta} = a_n^{\delta} + \delta a_n$. 由于(26) 式的左端关于 j 是严格单调趋于零, 而右端严格单调递增[9], 所以当

$$\| r^{\delta} - F(a_n^{\delta}) \| > c_1\delta \tag{27}$$

时, j_n 存在, 并且 $j_n > 0$.

外层 Newton 迭代的终止准则则可用 Morozov 残差准则[3], 即迭代次数 $n = n(\delta) = n(\delta, r^{\delta})$ 是满足

$$\| F(a_{n(\delta)}^{\delta}) - r^{\delta} \| \leqslant c_3\delta < \| F(a_n^{\delta}) - r^{\delta} \|, \qquad \forall n < n(\delta) \tag{28}$$

的整数, 其中常数 $c_3 \geqslant c_1$, 此时取 $a_{n(\delta)}^{\delta}$ 作为方程(4) 的近似解. 由(28) 式的右边不等式, 当 $n < n(\delta)$ 时, (27) 式满足, 因此内迭代的终止准则(26) 式是有效的.

4 对离散方程的应用

对于离散方程(17), 隐式迭代法(25) 式变成

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{Z}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}_n + \alpha_n^{(j)}\boldsymbol{I})\delta\boldsymbol{a}_n^{(j)} = \boldsymbol{Z}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_n^{\delta} + \alpha_n^{(j)}\delta\boldsymbol{a}_n^{(j-1)}, \qquad j \geqslant 1, \\ &\delta\boldsymbol{a}_n^{(0)} = 0.\end{aligned} \tag{29}$$

它等价于下面的极值问题

$$\begin{aligned}&\|\boldsymbol{Z}_n\delta\boldsymbol{a}_n^{(j)} - \boldsymbol{b}_n^{\delta}\|^2 + \alpha_n^{(j)}\|\delta\boldsymbol{a}_n^{(j)} - \delta\boldsymbol{a}_n^{(j-1)}\|^2 = \min, \quad j \geqslant 1, \\ &\delta\boldsymbol{a}_n^{(0)} = 0.\end{aligned} \tag{30}$$

实际计算表明, 带有导数的正则化子往往效果更好, 例如(30) 式可换成

$$\| Z_n \delta a_n^{(j)} - b_n^\delta \|^2 + \alpha_n^{(j)} \| P_k(\delta a_n^{(j)} - \delta a_n^{(j-1)}) \|^2 = \min,$$
$$j \geqslant 1,\ k = 0, 1, 2, \tag{31}$$

其中 P_1, P_2 分别是一阶, 二阶微分算子的离散形式, $P_0 = I$. 若把 k 为1和2时的正则化参数分别换成 $\beta_n^{(j)}$ 和 $\gamma_n^{(j)}$, 则(31)式等价于方程

$$(Z_n^{\mathrm T} Z_n + \alpha_n^{(j)} I + \beta_n^{(j)} P_1^{\mathrm T} P_1 + \gamma_n^{(j)} P_2^{\mathrm T} P_2)\, \delta a_n^{(j)} =$$
$$Z_n^{\mathrm T} b_n^\delta + (\alpha_n^{(j)} I + \beta_n^{(j)} P_1^{\mathrm T} P_1 + \gamma_n^{(j)} P_2^{\mathrm T} P_2)\, \delta a_n^{(j-1)}, \tag{32}$$

其中

$$P_1^{\mathrm T} P_1 = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$P_2^{\mathrm T} P_2 = \frac{1}{h^4}\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix},$$

而 $\alpha_n^{(j)}$、$\beta_n^{(j)}$、$\gamma_n^{(j)}$ 中只有一个非零, 分别对应于(30) 式中的 $k = 0$, $k = 1$ 或 $k = 2$, 迭代次数 $j = j_n$ 由准则(26)确定. 相应地, Tikhonov 方法和 Bakushiskii 方法分别为

$$(Z_n^{\mathrm T} Z_n + \alpha_n I + \beta_n P_1^{\mathrm T} P_1 + \gamma_n P_2^{\mathrm T} P_2)\, \delta a_n = Z_n^{\mathrm T} b_n^\delta \tag{33}$$

和

$$(Z_n^{\mathrm T} Z_n + \alpha_n I + \beta_n P_1^{\mathrm T} P_1 + \gamma_n P_2^{\mathrm T} P_2)\, \delta a_n =$$
$$Z_n^{\mathrm T} b_n^\delta + (\alpha_n I + \beta_n P_1^{\mathrm T} P_1 + \gamma_n P_2^{\mathrm T} P_2)(a_n^\delta - a_0^\delta), \tag{34}$$

其中的正则化参数 α_n(或 β_n 或 γ_n) 满足(20)式.

5 数值例子

下面给出两个算例, 并把本文的新方法与 Tikhonov 方法和 Bakushiskii 方法(对应的 Newton 型方法也称为迭代正则化 Gauss-Newton 方法[6]) 进行了对照. 例中 $T = 1$、$M = 20$、$N = 40$, 故步长 $h = 0.05$, $\tau = 0.025$.

例 1 在(1)式中, $f(x, t) = 2x - 2$, $u_0(x) = x^2$, $r_0(t) = 0$, $r_1(t) = 2t + 1$, (2) 式中的 $r(t) = 2t$, 此时正问题(1) 的解为 $u(x, t) = x^2 + 2xt$, 反问题的解为 $a^* = 1$.

例 2 对应的

$$f(x, t) = \begin{cases} -2x - 2t - 20, & x \in [0, 1/2], \\ 6x + 2t - 22, & x \in (1/2, 1], \end{cases}$$

$u_0(x) = x^2$, $r_0(t) = 0$, $r_1(t) = 2t + 1$, $r(t) = 2t$. 此时方程(1) 的解为 $u(x, t) = x^2 + 2xt$, 而(3)式的解为

$$a^*(x) = \begin{cases} 10 + x, & x \in [0, 1/2], \\ 11 - x, & x \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

计算中扰动数据取为

$$r^{\delta}(t) = r(t) + \sqrt{2}\,\delta\sin 10\pi t, \qquad t \in [0, 1], \tag{35}$$

则 $\| r^{\delta} - r \|_{L_2} = \delta$. 当 $\delta = 0$ 时, 即数据精确时, 外迭代终止准则(此时不能应用(28)式)为

$$\| F(a_{n(\delta)}) - r \| \leqslant 10^{-8} < \| F(a_n) - r \|, \qquad \forall n < n(\delta). \tag{36}$$

表 1 例 1 的 3 种算法的迭代次数 $n = n(\delta)$ 及误差 $\| a_n^{\delta} - a^* \|$ 比较

		$a_0^{\delta} = 1 + 4x(1-x)$, $\| a_0^{\delta} - a^* \| = 0.7295$					
δ		T 方法	B 方法	隐式内迭代方法			
				$c_2 = 10$	$c_2 = 1$	$c_2 = 0.1$	$c_2 = 0.01$
10^{-3}	α	*	*	0.026 54(12)	0.023 55(6)	0.022 19(5)	0.020 42(4)
	β	0.004 50(5)	0.004 33(5)	0.007 40(4)	0.007 18(3)	0.005 20(3)	0.005 60(3)
	γ	0.007 93(7)	0.008 65(7)	0.008 08(5)	0.007 73(4)	0.008 04(3)	0.007 93(3)
10^{-4}	α	*	*	0.022 16(16)	0.021 97(8)	0.021 73(5)	0.020 53(4)
	β	0.002 85(7)	9.207E-4(6)	0.004 81(7)	0.003 68(4)	0.003 61(3)	0.003 57(3)
	γ	0.003 82(8)	0.004 09(8)	0.004 38(6)	0.004 44(4)	0.004 46(4)	0.002 44(4)
10^{-5}	α	*	*	0.021 81(21)	0.022 10(9)	0.021 38(6)	0.028 68(5)
	β	*	2.274E-4(7)	0.002 23(8)	0.002 34(5)	0.001 72(5)	0.002 14(4)
	γ	0.001 76(10)	0.001 86(10)	0.002 14(7)	0.002 01(5)	0.002 15(5)	0.001 14(4)
0	α	*	*	0.020 48(92)	0.021 51(37)	0.019 40(28)	0.003 92(13)
	β	2.176E-4(16)	4.564E-4(10)	5.780E-4(20)	3.943E-4(13)	3.509E-4(9)	2.824E-4(8)
	γ	2.946E-4(17)	2.985E-4(17)	5.436E-4(15)	3.912E-4(10)	3.083E-4(9)	4.858E-4(11)

表 2 例 2 的 3 种算法的迭代次数 $n = n(\delta)$ 及误差 $\| a_n^{\delta} - a^* \|$ 比较

		$a_0^{\delta} = 10 + 8x(1-x)$, $\| a_0^{\delta} - a^* \| = 1.17351$					
δ		T 方法	B 方法	隐式内迭代方法			
				$c_2 = 10$	$c_2 = 1$	$c_2 = 0.1$	$c_2 = 0.01$
10^{-3}	α	0.097 70(5)	0.104 57(5)	0.211 97(28)	0.200 19(9)	0.187 36(5)	0.135 23(3)
	β	0.036 01(5)	0.036 22(5)	0.042 30(10)	0.043 14(5)	0.035 99(3)	0.036 11(2)
	γ	0.035 74(7)	0.038 12(7)	0.048 52(12)	0.050 34(6)	0.034 22(3)	0.035 77(2)
10^{-4}	α	0.072 15(6)	0.088 98(7)	0.109 53(45)	0.106 99(15)	0.107 90(7)	0.079 38(4)
	β	0.033 82(6)	0.032 90(6)	0.034 06(14)	0.033 99(6)	0.034 08(3)	0.034 31(3)
	γ	0.028 68(8)	0.029 10(9)	0.028 64(16)	0.028 89(7)	0.028 78(3)	0.029 11(3)
10^{-5}	α	0.040 57(9)	0.040 55(9)	0.070 51(81)	0.070 40(18)	0.069 51(12)	0.067 24(5)
	β	0.032 36(7)	0.029 49(8)	0.032 05(18)	0.032 19(8)	0.029 41(4)	0.029 43(3)
	γ	0.028 61(9)	0.028 16(10)	0.028 84(19)	0.028 80(7)	0.028 60(4)	0.028 58(3)
0	α	0.036 13(16)	*	0.035 81(373)	0.036 79(74)	0.036 98(42)	0.037 95(14)
	β	0.027 30(12)	0.026 95(15)	0.027 32(67)	0.027 32(25)	0.027 29(11)	0.027 03(7)
	γ	0.026 70(18)	0.026 70(18)	0.028 39(53)	0.028 38(24)	0.027 35(12)	0.026 75(10)

表 1、表 2 给出了当迭代初始误差 $\| a_0^{\delta} - a^* \|$ 不是太大时, 3 种方法的计算结果, 其中"T 方法"、"B 方法"分别表示 Tikhonov 方法和 Bakushiskii 方法, 隐式内迭代法的终止准则(26)中 $c_1 = 1$, c_2 取了 4 种不同的值. 当 $\delta > 0$ 时, 外迭代终止准则(28)式中取 $c_3 = 1.1$. 表中第 2 列标有"α"的表示那一行的结果是取 $\alpha = \alpha_n \neq 0$, $\beta = \beta_n = \gamma = \gamma_n = 0$, 标有"β""γ"的行类

似．当 $\alpha_n \neq 0$ 时，取 $\alpha_1 = 0.1$，$\alpha_{n+1}/\alpha_n = 0.1(n \geqslant 1)$，所以(20)式满足．在隐式内迭代法(32)式中，当 $\alpha_n^{(j)} \neq 0$ 时，取 $\alpha_n^{(1)} = 0.1$，$\alpha_{n+1}^{(j)}/\alpha_n^{(j)} = 0.1(j \geqslant 1)$，对 β 和 γ 也采用上述取法．表中数据为近似解误差 $\| a_n^\delta - a^* \|$，括号内为(外)迭代次数 $n = n(\delta)$，打* 号表示不收敛.

我们还对迭代初始误差 $\| a_0^\delta - a^* \|$ 很大时进行了计算，结果见表 3、表 4，表中初始值 a_0^δ 后面括号内的值表示初始误差 $\| a_0^\delta - a^* \|$．为简明计，这里只给出了参数 $\gamma \neq 0$ 时的数值结果.

表 3　大初始误差时例 1 的 3 种算法的迭代次数 $n = n(\delta)$ 及误差 $\| a_n^\delta - a^* \|$ 比较

a_0^δ	δ	T 方法	B 方法	隐式内迭代方法		
				$c_2 = 10$	$c_2 = 1$	$c_2 = 0.1$
$1 + 10x(1 - x)$ (1.823 65)	10^{-4}	0.007 86(8)	0.007 10(9)	0.007 49(8)	0.007 68(5)	0.009 06(6)
	0	4.608E-4(21)	4.747E-4(20)	0.001 00(27)	9.442E-4(16)	3.545E-4(16)
$1 + 30x(1 - x)$ (5.470 94)	10^{-4}	*	0.015 47(11)	0.014 57(14)	0.014 84(8)	*
	0	*	*	0.002 59(48)	0.002 05(31)	*
$1 + 60x(1 - x)$ (10.941 88)	10^{-4}	*	*	0.016 49(22)	0.015 37(16)	*
	0	*	*	0.004 40(68)	0.003 07(46)	*

表 4　大初始误差时例 2 的 3 种算法的迭代次数 $n = n(\delta)$ 及误差 $\| a_n^\delta - a^* \|$ 比较

a_0^δ	δ	T 方法	B 方法	隐式内迭代方法		
				$c_2 = 10$	$c_2 = 1$	$c_2 = 0.1$
$10 + 100x(1 - x)$ (17.950 22)	10^{-4}	0.047 01(10)	0.051 12(10)	0.055 23(60)	0.054 39(23)	0.052 62(9)
	0	0.025 24(21)	*	0.029 07(199)	0.029 03(103)	0.027 90(28)
$10 + 500x(1 - x)$ (90.896 04)	10^{-4}	*	*	0.175 58(129)	0.173 34(61)	0.141 28(17)
	0	*	*	0.066 05(741)	0.066 09(211)	0.060 41(76)
$10 + 1\,000x(1 - x)$ (1.821E+2)	10^{-4}	*	*	0.161 99(214)	0.150 95(110)	0.122 69(27)
	0	*	*	0.097 20(915)	0.095 78(270)	0.085 90(89)

6　结论和评注

从这些数值例子可以得出下面的结论:

1) 虽然在隐式迭代法终止准则(24)时推导中要求 $c_2 \geqslant L/2$，但数值实验表明对相当大范围中的 c_2，新方法都是有效的．c_2 取得较大，外迭代次数较多，但总能算出结果．c_2 取得越小，外迭代次数越少，但太小时不会收敛.

2) 3 种算法都显示，取 $\beta \neq 0$ 或 $\gamma \neq 0$ 比取 $\alpha \neq 0$ 时效果明显要好；总的来说，$\beta \neq 0$ 时的效果比 $\gamma \neq 0$ 时的也要好些.

3) 用新方法求 δa_n，需要若干次内迭代，求第 1 个迭代值 $\delta a_n^{(1)}$ 所需计算量较大(与 T 方法或 B 方法的计算量相同)．但存在这样的处理方法，使得以后每次迭代只需增加很小计算量[3]，因此总的计算量与 T 方法和 B 方法相差不大.

4) 3 种算法比较，新方法具有明显的优越性．当初始误差不太大时，3 种算法基本能算出结果，但新方法(取合适的 c_2 值)迭代次数大大小于另两种算法，这可大大节省计算时间．对于大的初始误差，T 方法和 B 方法都无法应用，而新方法却仍然有效，这在应用中十分重要的.

综上所述，本文提出的新方法具有十分吸引人的性质，具有广泛的应用背景．我们将报告

进一步的工作, 特别是怎样选取合适的 c_2 的值.

[参 考 文 献]

[1] Bech J V, Blackwell B, Clair C St Jr. Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems[M]. New York: Wiley, 1985.

[2] Groetsch C W. Inverse Problems in the Mathematical Sciences[M]. Braunschweig: Vieweg, 1993.

[3] Engl H, Hanke M, Neubauer A. Regularization of Inverse Problems[M]. Dordrecht: Kluwer, 1996.

[4] HE Guo-qiang, Chen Y M. An inverse problem for the Burgers' equation[J]. Journal of Computational Mathematics, 1999, **11**(2): 275-284.

[5] Hansen P C. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve[J]. SIAM Review, 1992, **34**(4): 561-580.

[6] Bakushiskii A B. The problems of the convergence of the iteratively regularized Gauss-Newton method[J]. Comput Maths Math Phys, 1992, **32**(9): 1353-1359.

[7] Kaltenbacher B. A posteriori parameter choice strategies for some Newton type methods for the regularization of nonlinear ill-posed problems[J]. Numerical Mathematics, 1998, **79**(4): 501-528.

[8] Bauer F, Hohage T. A Lepskij-type stopping rule for regularized Newton methods[J]. Inverse Problems, 2005, **21**(6): 1975-1991.

[9] HE Guo-qiang, LIU Lin-xian. A kind of implicit iterative methods for ill-posed operator equations[J]. Journal of Computational Mathematics, 1999, **17**(3): 275-284.

[10] HE Guo-qiang, WANG Xin-ge, LIU Lin-xian. Implicit iterative methods with variable control parameters for ill-posed operator equations[J]. Acta Mathematica Scientia B, 2000, **20**(4): 485-494.

[11] Groetsch C W. The theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind[M]. Boston: Pitman, 1984.

A Newton Type Iterative Method for Heat-Conduction Inverse Problems

HE Guo-qiang, MENG Ze-hong
(Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, P.R. China)

Abstract: An inverse problem for identification of the coefficient in heat-conduction equation is considered. After reducing the problem to a nonlinear ill-posed operator equation, Newton type iterative methods were considered. The implicit iterative method was applied to the linearized Newton equation, and the key step in the process was that a new reasonable a posteriori stopping rule for the inner iteration was presented. Numerical experiments for the new method as well as for Tikhonov method and Bakushikskii method are given. And these results show the obvious advantages of the new method over the other ones.

Key words: inverse problems; nonlinear ill-posed operator equations; Newton type method; implicit iterative method; iteration stopping rule