文章编号: 1000-0887(2007 04-0487-10

具非线性传染率与生物化学控制的害虫管理 $S-I$ 模型*

焦建军[1,2], 陈兰荪[1]

(1. 大连理工大学 应用数学系, 辽宁 大连 116024;
2. 贵州财经学院 数学与统计学院, 贵阳 550004

(郭兴明推荐

摘要: 讨论了具有非线性传染率与脉冲控制的害虫管理 $S-I$ 传染病模型, 此模型考虑的是脉冲投放病虫和喷洒农药. 不但得到了系统的所有解的一致完全有界,而且得到了害虫灭绝的边界周期解的全局渐进稳定和系统的一致持久的条件. 为实际的害虫管理提供了可靠的理论依据.

关 键 词: 脉冲; 染病个体; 化学控制; 灭绝; 一致持久

中图分类号: O175.2; O175.6 文献标识码: A

引 言

根据世界粮农组织的报道, 人类和害虫之间的“战争”持续了数千年. 随着社会的发展和科学技术的进步, 人类已经采用了许多先进的现代的武器来对付害虫, 例如: 化学农药、生物农药、遥感和遥测、计算机技术、原子能技术等等. 也曾经取得过许多辉煌的“战果”, 但是“战争”远远没有结束, 并且将继续下去. 各种各样的大量的农药被用来控制害虫. 总的来说农药是有用的, 因为它能够迅速的杀死大量的害虫. 在虫害猖獗的时候, 喷洒农药可能是唯一的挽回经济损失的方法.

在害虫管理上的一种重要的方法是投入细菌、真菌、病毒等等来控制害虫. 比如 Bacillus thuringiensis 被用来控制大量的害虫[1-5]. 而这些细菌、真菌、病毒却对人类、畜类和益虫是安全的. 有许多的文献[3,5-8]研究了用微生物来控制害虫, 并且有许多好的文献致力疾病的研究[9-19], 但是很少有文献[20-23]用数学模型来研究这类现象. 在这篇论文我们把喷洒农药和投入病虫结合起来进行害虫管理, 其中病虫是通过实验室培育得到.

1 模型的建立

基本的 $S-I$ 传染病模型是

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t),\quad I'(t) = \beta S(t)I(t) - wI(t), \qquad (1$$

* 收稿日期: 2006-08-11; 修订日期: 2007-01-23
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471117
作者简介: 焦建军(1973— , 男, 湖南邵阳人, 讲师, 博士生(联系人. Tel: + 86-851-8193240; E-mail: jjj7311@126.com; lschen@amss.ac.cn .

其中 $S(t)$ 是易感者害虫的密度, $I(t)$ 是病虫的密度, $\beta > 0$ 是传染率系数, $w > 0$ 是病虫的死亡系数. 而文献[12]中的基本模型是下面的有控制变量的模型

$$S'(t) = -\beta S(t)I(t),\quad I'(t) = \beta S(t)I(t) - wI(t) + u(t), \tag{2}$$

其中 $u(t)$ 是实验室里培养的病虫的速率, 即是控制变量, 对于系统(3) 也有另外一些条件, 这里就不赘述. 但是我们认为在害虫管理的实际中此变量很难控制, 并且易感者害虫在理论上不会灭绝. 双线性和标准传染率经常在经典的流行病模型(Hethcote 的文献[19]) 中被采用. 这些模型的一些简单的动力学性质看上去与这些函数有关. 一些不同的传染率也被许多学者所研究. 对于一些人类和一些群居性动物, Anderson、May 等人[24-26] 认为标准传染率比双线性传染率更适合; Levin 等人[27-28] 采用了形如 $\beta S^q I^p$ 和 $\beta S^q I^p/N$ 的传染率; 陈兰荪等人[29] 阐述了传染率的饱和效应形如 $\beta S(t)/(1 + aS(t))$ 和传染率的拥挤效应形如 $\beta S(t)/[1 + aS(t) + bS^2(t)]$; 但是 V. Capasso, G. Serio[30] 首次采用形如 $f(I)S$ 的传染率形式; 最近阮世贵和王稳地[31] 研究了形如 $\beta I^2(t)/[1 + \alpha I^2(t)]$ 的传染率形式. 他们没有考虑脉冲. 考虑到害虫管理的实际情况, 我们研究的是脉冲投放病虫和喷洒农药. 在这些前提之下我们得到如下的模型

$$\begin{cases} S'(t) = rS(t)\left(1 - \dfrac{S(t) + \theta I(t)}{K}\right) - \dfrac{\beta S(t)I^2(t)}{1 + aI^2(t)}, & t \neq n\tau, \\ I'(t) = \dfrac{\beta S(t)I^2(t)}{1 + aI^2(t)} - wI(t), & t \neq n\tau, \\ \Delta S(t) = -\mu_1 S(t), & t = n\tau, \\ \Delta I(t) = -\mu_2 I(t) + \mu, & t = n\tau,\ n = 1, 2, \cdots, \end{cases} \tag{3}$$

其中 $\beta I^2(t)/[1 + aI^2(t)](a > 0)$ 是非线性饱和传染率, $r > 0$ 是易感者病虫的内禀增长率, $K > 0$ 是害虫的环境容纳量, $\Delta S(t) = S(t^+) - S(t)$, $\Delta I(t) = I(t^+) - I(t)$, $0 < \theta < 1$, $0 < l < 1$, $\mu \geqslant 0$ 是在 $t = n\tau$, $n \in \mathbf{Z}_+$ 病虫的投放量, $1 > \mu_1 \geqslant 0$, $1 > \mu_2 \geqslant 0$ 是在 $t = n\tau$, $n \in \mathbf{Z}_+$ 且 $\mathbf{Z}_+ = \{1, 2, \cdots\}$ 喷洒农药杀死易感者害虫和病虫的比例, τ 是喷洒农药的周期.

2 模型分析

系统(3) 的解 $\boldsymbol{x}(t) = (S(t), I(t))^{\mathrm{T}}$ 是分段连续函数. 即 $x: \mathbf{R}_+ \to R_+^2$. $\boldsymbol{x}(t)$ 在区间 $(n\tau, (n+1)\tau]$, $n \in \mathbf{Z}_+$ 上是连续的, 并且 $\boldsymbol{x}(n\tau^+) = \lim_{t\to n\tau^+} \boldsymbol{x}(t)$ 存在. 显然函数 f 的光滑性保证了系统(3) 的解的全局存在和唯一性. 而函数 f 是系统(3) 右边定义的映射(见 Lakshmikantham 等人的文献[32]). 在证明主要的结果之前, 我们需要下面的引理. 既然当 $S(t) = 0$ 有 $S'(t) = 0$, $t \neq n\tau$, 当 $I(t) = 0$ 有 $I'(t) = 0$, $t \neq n\tau$, 并且 $I(n\tau^+) = I(n\tau) + \mu$, $\mu \geqslant 0$.

所以我们容易得到

引理 1 假设 $\boldsymbol{x}(t)$ 是系统(3) 的一个解且初值 $\boldsymbol{x}(0^+) \geqslant 0$, 那么对任意的 $t \geqslant 0$ 有 $\boldsymbol{x}(t) \geqslant 0$, 和对任意的 $t \geqslant 0$ 且 $\boldsymbol{x}(0^+) > 0$ 有 $\boldsymbol{x}(t) > 0$.

引理 2(见文献[33]23, Lemma2.2) 设函数 $m \in PC'[\mathbf{R}^+, \mathbf{R}]$ 满足下面的不等式

$$\begin{cases} m'(t) \leqslant p(t)m(t) + q(t), & t \geqslant t_0,\ t \neq t_k,\ k = 1, 2, \cdots, \\ m(t_k^+) \leqslant d_k m(t_k) + b_k, & t = t_k, \end{cases} \tag{4}$$

其中 $p, q \in PC[\mathbf{R}^+, \mathbf{R}]$, 且 $d_k \geqslant 0$, b_k 是常数, 则

$$m(t) \leqslant m(t_0)\prod_{t_0<t_k<t} d_k \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s\right) + \sum_{t_0<t_k<t}\left(\prod_{t_k<t_j<t} d_j \exp\left(\int_{t_0}^{t} p(s)\mathrm{d}s\right)\right) b_k +$$
$$\int_{t_0}^{t}\prod_{s<t_k<t} d_k \exp\left(\int_{s}^{t} p(\sigma)\mathrm{d}\sigma\right) q(s)\mathrm{d}s, \qquad t \geqslant t_0.$$

下面我们将得到系统(3 的解的一致完全有界.

引理3　存在一个常数 $M > 0$, 对于足够大的 t, 使得系统(3) 的任意解$(S(t), I(t))$ 有 $S(t) \leqslant M, I(t) \leqslant M$.

证明　定义 $V(t) = S(t) + I(t)$. 所以 $t \neq n\tau$ 有

$$D^+ V(t) + wV(t) = (r+w)S(t) - \frac{rS^2(t)}{K} - \frac{r\theta S(t)I(t)}{K} \leqslant$$
$$(r+w)S(t) - \frac{rS^2(t)}{K} \leqslant M_0,$$

其中 $M_0 = K(r+w)^2/4r$, 当 $t = n\tau$, $V(n\tau^+) = (1-\mu_1)S(n\tau) + (1-\mu_2)I(n\tau) + \mu \leqslant V(n\tau) + \mu$. 由引理2, 对于 $t \in (n\tau, (n+1)\tau]$, 我们有

$$V(t) \leqslant V(0)\mathrm{e}^{-wt} + \int_0^t M_0 \mathrm{e}^{-w(t-s)}\mathrm{d}s + \sum_{0<n\tau<t}\mu \mathrm{e}^{-w(t-n\tau)} =$$
$$V(0)\mathrm{e}^{-wt} + \frac{M_0}{w}(1-\mathrm{e}^{-wt}) + \mu\frac{\mathrm{e}^{-w(t-\tau)} - \mathrm{e}^{-w(t-(n+1)\tau)}}{1-\mathrm{e}^{w\tau}} <$$
$$V(0)\mathrm{e}^{-wt} + \frac{M_0}{w}(1-\mathrm{e}^{-wt}) + \frac{\mu \mathrm{e}^{-w(t-\tau)}}{1-\mathrm{e}^{w\tau}} + \frac{\mu \mathrm{e}^{w\tau}}{\mathrm{e}^{w\tau}-1} \to$$
$$\frac{M_0}{w} + \frac{\mu \mathrm{e}^{w\tau}}{\mathrm{e}^{w\tau}-1}, \qquad \text{当 } t \to \infty.$$

所以 $V(t)$ 是一致完全有界的. 由 $V(t)$ 的定义我们可以知道, 对于足够大的 t, 存在一个常数 $M > 0$ 使得 $S(t) \leqslant M, I(t) \leqslant M$. 引理证明完毕.

如果 $S(t) = 0$, 我们可以得到系统(3 的如下的子系统

$$\begin{cases} I'(t) = -wI(t), & t \neq n\tau, \\ I(n\tau^+) = (1-\mu_2)I(n\tau) + \mu, & t = n\tau;\ n = 1, 2, \cdots, \\ I(0^+) = I(0) > 0, \end{cases} \tag{5}$$

显然有

$$\tilde{I}(t) = \frac{\mu \mathrm{e}^{-w(t-n\tau)}}{1-(1-\mu_2)\mathrm{e}^{-w\tau}}, \qquad t \in (n\tau, (n+1)\tau],\ n \in \mathbf{Z}_+,$$
$$\tilde{I}(0^+) = \tilde{I}(n\tau^+) = \frac{\mu}{1-(1-\mu_2)\mathrm{e}^{-w\tau}}$$

是系统(5 的一个正周期解. 所以(5 式的任意解可写成

$$I(t) = (1-\mu_2)\left(I(0^+) - \frac{\mu}{1-(1-\mu_2)\mathrm{e}^{-w\tau}}\right)\mathrm{e}^{-wt} + \tilde{I}(t),$$
$$t \in (n\tau, (n+1)\tau],\ n \in \mathbf{Z}_+.$$

于是我们得到:

引理4　系统(5 有一个正周期解 $\tilde{I}(t)$, 对于系统(5) 任意的解 $I(t)$, 当 $t \to \infty$ 时, 可以得到 $I(t) \to \tilde{I}(t)$.

从上面的讨论可知, 系统(3 有一个灭绝的周期解 $(0, \tilde{I}(t))$.

$$(0, I(t)) = \left(0, \frac{\mu e^{-w(t-n\tau)}}{1-(1-\mu_2)e^{-w\tau}}\right), \tag{6}$$

其中 $n\tau < t \leqslant (n+1)\tau$; $I(n\tau^+) = I(0^+) = \dfrac{\mu}{1-(1-\mu_2)e^{-w\tau}}$, $n \in \mathbf{Z}_+$.

从而我们可以得到下面的定理:

定理 1 设 $(S(t), I(t))$ 是系统(3 的任意解, 如果条件

$$\ln\frac{1}{1-\mu_1} > r\tau - \frac{r\mu\theta(1-e^{-w\tau})}{Kw(1-(1-\mu_2)e^{-w\tau})} - \frac{\beta}{2aw}\ln\frac{a\mu^2+(1-(1-\mu_2)e^{-w\tau})^2}{(1-(1-\mu_2)e^{-w\tau})^2+a\mu^2e^{-2w\tau}} \tag{7}$$

成立, 那么系统(3 的灭绝周期解 $(0, I(t))$ 是全局渐进稳定的.

证明 首先我们证明其局部稳定性. 定义 $s(t) = S(t)$, $i(t) = I(t) - I(t)$, 于是我们得到系统(3) 的如下关于周期解$(0, I(t))$ 的线性系统

$$\begin{pmatrix} s'(t) \\ i'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - \dfrac{r\theta}{K}I(t) - \dfrac{\beta I(t)^2}{1+aI(t)^2} & 0 \\ \dfrac{\beta I(t)^2}{1+aI(t)^2} & -w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s(t) \\ i(t) \end{pmatrix}.$$

我们很容易得到其基解矩阵是

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \exp\left(\displaystyle\int_0^t \left(r - \frac{r\theta}{K}I(t) - \frac{\beta I(t)^2}{1+aI(t)^2}\right)ds\right) & 0 \\ * & e^{-wt} \end{pmatrix},$$

上式中的* 与我们讨论的结果没有关系, 所以没有必要算出来. 系统(3 的第 3 和第 4 个方程的线性表出是

$$\begin{pmatrix} s(n\tau^+) \\ i(n\tau^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-\mu_1 & 0 \\ 0 & 1-\mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s(n\tau) \\ i(n\tau) \end{pmatrix}.$$

周期解 $(0, I(t))$ 的稳定性由下式的特征值决定

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 1-\mu_1 & 0 \\ 0 & 1-\mu_2 \end{pmatrix} \phi(\tau),$$

而其特征值分别是

$$\lambda_1 = (1-\mu_2)e^{-w\tau} < 1,\ \lambda_2 = (1-\mu_1)\exp\left(\int_0^\tau \left(r - \frac{r\theta}{K}I(t) - \frac{\beta I(t)^2}{1+aI(t)^2}\right)ds\right),$$

由乘子理论[14]得, 如果 $|\lambda_2| < 1$, 即

$$\ln\frac{1}{1-\mu_1} > r\tau - \frac{r\mu\theta(1-e^{-w\tau})}{Kw(1-(1-\mu_2)e^{-w\tau})} - \frac{\beta}{2aw}\ln\frac{a\mu^2+(1-(1-\mu_2)e^{-w\tau})^2}{(1-(1-\mu_2)e^{-w\tau})^2+a\mu^2e^{-2w\tau}},$$

那么周期解 $(0, I(t))$ 是局部稳定的.

下面我们将证明其是全局吸引的．选择任意小的 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\rho = (1-\mu_1)\exp\left(\int_0^\tau r - \frac{r\theta}{K}(I(t)-\varepsilon) - \frac{(\beta I(t)-\varepsilon)^2}{1+a(I(t)-\varepsilon)^2}\mathrm{d}t\right) < 1,$$

由系统(3 的第2个方程, 我们注意到 $I'(t) \geqslant -wI(t)$． 因此我们考虑下面的脉冲微分方程

$$\begin{cases} y'(t) = -wy(t), & t \neq n\tau, \\ y(t^+) = (1-\mu_2)y(t) + \mu, & t = n\tau, \\ y(0^+) = I(0^+). \end{cases} \tag{8}$$

从引理2和脉冲微分方程比较定理(见文献[13]定理3.1.1 得到 $I(t) \geqslant y(t)$ 和 $y(t) \to I(t)$ 当 $t \to \infty$. 则有

$$I(t) \geqslant y(t) \geqslant I(t) - \varepsilon, \tag{9}$$

对于所有充分大的 t, 为了方便讨论我们不妨假设(9)式对与所有的 $t > 0$ 成立． 由式(3), (9)式及函数 $y = x/(1+ax)$ 是递增函数, 我们得到

$$\begin{cases} S'(t) \leqslant S(t)\left(r - \frac{r\theta}{K}(I(t)-\varepsilon) - \frac{\beta(I(t)-\varepsilon)^2}{1+a(I(t)-\varepsilon)^2}\right), & t \neq n\tau, \\ S(n\tau^+) = (1-\mu_1)S(n\tau), & t = n\tau,\ n = 1, 2, \cdots, \end{cases} \tag{10}$$

所以有

$$S((n+1)\tau) \leqslant S(n\tau^+)(1-\mu_2)\times$$
$$\exp\left(\int_{n\tau}^{(n+1)\tau}\left(r - \frac{r\theta}{K}(I(t)-\varepsilon) - \frac{\beta(I(t)-\varepsilon)^2}{1+a(I(t)-\varepsilon)^2}\right)\mathrm{d}s\right),$$

因此 $S(n\tau) \leqslant S(0^+)\rho^n$ 与 $S(n\tau) \to 0$ 当 $n \to \infty$, 则 $S(t) \to 0$ 当 $t \to \infty$.

接着我们证明 $I(t) \to I(t)$ 当 $t \to \infty$. 假设 $0 < \varepsilon \leqslant w$, 那么存在一个 $t_0 > 0$ 使得 $0 < S(t) < \varepsilon$ 对所有 $t \geqslant t_0$. 不失一般性, 我们可以假设 $0 < S(t) < \varepsilon$ 对所有 $t \geqslant 0$, 则对于系统(3, 我们得到

$$-wI(t) \leqslant I'(t) \leqslant (-w+\varepsilon)I(t), \tag{11}$$

则有 $z_1(t) \leqslant I(t) \leqslant z_2(t)$ 和 $z_1(t) \to I(t)$, $z_2(t) \to I(t)$ 当 $t \to \infty$. 而 $z_1(t)$ 和 $z_2(t)$ 是下面两个方程的解:

$$\begin{cases} z_1'(t) = -wz_1(t), & t \neq n\tau, \\ z_1(t^+) = (1-\mu_2)z_1(t) + \mu, & t = n\tau, \\ z_1(0^+) = I(0^+) \end{cases} \tag{12}$$

与

$$\begin{cases} z_2'(t) = (-w+\varepsilon)z_2(t), & t \neq n\tau, \\ z_2(t^+) = (1-\mu_2)z_2(t) + \mu, & t = n\tau, \\ z_2(0^+) = I(0^+), \end{cases} \tag{13}$$

其中 $$z_2(t) = \frac{\mu e^{(-w+\varepsilon)(t-n\tau)}}{1-(1-\mu_2)e^{(-w+\varepsilon)\tau}}, \quad 对于\ n\tau < t \leqslant (n+1)\tau.$$

因此对于任意的 $\varepsilon_1 > 0$, 存在 t_1, $t > t_1$ 使得

$$I(t) - \varepsilon_1 < I(t) < z_2(t) + \varepsilon_1.$$

让 $\varepsilon \to 0$, 我们容易得到

$$I(t) - \varepsilon_1 < I(t) < I(t) + \varepsilon_1,$$

对于充分大的 t. 上式表明 $I(t) \to I(t)$ 当 $t \to \infty$. 证明完毕.

我们下面的工作是证明系统(3 的持久性, 在证明定理之前, 我们首先给出下面的定义:

定义 1 如果存在常数 $m, M > 0$(与初值不相关) 与某个有限时间 T_0, 使得对系统(3) 的所有具初值 $S(0^+) > 0, I(0^+) > 0$ 的解 $(S(t), I(t))$, 有 $m \leqslant S(t) \leqslant M$, $m \leqslant I(t) \leqslant M$ 且对所有 $t \geqslant T_0$ 成立, 那么系统(3) 是持久的. (其中 T_0 有可能依赖初值 $(S(0^+), I(0^+))$).

定理 2 设 $(S(t), I(t))$ 是系统(3 的任意解, 如果

$$\ln\frac{1}{1-\mu_1} < r\tau - \frac{r\mu\theta(1-e^{-w\tau})}{Kw(1-(1-\mu_2)e^{-w\tau})} - \frac{\beta}{2aw}\ln\frac{a\mu^2+(1-(1-\mu_2)e^{-w\tau})^2}{(1-(1-\mu_2)e^{-w\tau})^2+a\mu^2e^{-2w\tau}} \tag{14}$$

成立, 那么系统(3 是持久的.

证明 设系统(3 具初值 $S(0) > 0$、$I(0) > 0$ 的一个解是 $(S(t), I(t))$, 由引理 3, 我们已经证明了存在常数 $M > 0$ 使得 $S(t) \leqslant M$、$I(t) \leqslant M$ 对于充分大的 t. 再设 $S(t) \leqslant M$, $I(t) \leqslant M$ 且 $M > \sqrt{r/\beta}$ 对于 $t \geqslant 0$. 从式(9) 我们可得 $I(t) > I(t) - \varepsilon_2$ 对于充分大的 t 和 $\varepsilon_2 > 0$, 所以 $I(t) \geqslant \mu e^{-w\tau}/(1-e^{-w\tau}) - \varepsilon_2 = m_2$ 对充分大的 t. 因此我们只要能够找到一个常数 $m_1 > 0$ 使得 $S(t) \geqslant m_1$ 对充分大的 t, 我们将分两步来完成证明工作.

1° 由条件(14, 选择 $m_3 > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ 足够小, 使得 $m_3 < w/\beta$, $\delta = \beta M^2 < w$ 且

$$\begin{aligned}
\sigma = {} & r\tau - \frac{r}{K}m_3\tau - \frac{r\theta\varepsilon}{K}\tau - \frac{r\mu\theta(1-e^{(-w+\delta)\tau})}{K(w-\delta)(1-(1-\mu_2)e^{(-w+\delta)\tau})} - \\
& \frac{\beta\mu}{a(w-\delta)(a\varepsilon_1^2+1)}\ln\frac{a(\mu+b\varepsilon_1)^2+b^2}{a(\mu e^{(-w+\delta)\tau}+b\varepsilon_1)^2+b^2} - \\
& \frac{\beta\mu\varepsilon_1}{\sqrt{a}(w-\delta)(a\varepsilon_1^2+1)}\left(\arctan\frac{\sqrt{a}\mu}{b} - \arctan\frac{\sqrt{a}\mu}{b}e^{(-w+\delta)\tau}\right) - \\
& \frac{\beta\varepsilon_1^2}{(w-\delta)(a\varepsilon_1^2+1)}\ln\frac{\mu-b\varepsilon_1}{\mu e^{(-w+\delta)\tau}-b\varepsilon_1} - \\
& \frac{\beta\mu(1-\mu_2)}{a(w-\delta)(a\varepsilon_1^2+1)}\ln\frac{a(\mu(1-\mu_2)e^{(-w+\delta)\tau}+b\varepsilon_1)^2+b^2}{a(\mu e^{(-w+\delta)\tau}+b\varepsilon_1)^2+b^2} - \\
& \frac{\beta\varepsilon_1^2}{(w-\delta)(a\varepsilon_1^2+1)}\ln\frac{\mu(1-mu_2)e^{(-w+\delta)\tau}-b\varepsilon_1}{\mu(1-\mu_2)e^{(-w+\delta)\tau}-b\varepsilon_1} > 0,
\end{aligned}$$

其中 $c = 1-(1-\mu_2)e^{(-w+\delta)\tau})$, $b = (1-a\varepsilon_1)c$. 我们将证明 $S(t) < m_3$ 对于 $t \geqslant 0$ 不会成立. 否则

$$\begin{cases} I'(t) \leqslant (-w+\delta)I(t), & t \neq n\tau, \\ I(t^+) = (1-\mu_2)I(t) + \mu, & t = n\tau, \end{cases} \tag{15}$$

由引理 3 和 4, 我们可得 $I(t) \leqslant z(t)$ 和 $z(t) \to \overline{z(t)}$, $t \to \infty$, 其中 $z(t)$ 是下面方程的解:

$$\begin{cases} z'(t) = (-w+\delta)z(t), & t \neq n\tau, \\ z(t^+) = z(t) + \mu, & t = n\tau, \\ z(0^+) = I(0^+) \end{cases} \tag{16}$$

且 $$\overline{z(t)} = \frac{\mu e^{(-w+\delta)(t-n\tau)}}{1-(1-\mu_2)e^{(-w+\delta)\tau}},\qquad t\in(n\tau,(n+1)\tau].$$
那么存在一个 $T_1 > 0$ 使得
$$I(t)\leqslant z(t)\leqslant \overline{z(t)}+\varepsilon_1$$
与
$$\begin{cases} S'(t)\geqslant S(t)\left(r-\frac{r}{K}m_3-\frac{r\theta}{K}(\overline{z(t)}+\varepsilon_1)-\frac{\beta(\overline{z(t)}+\varepsilon_1)^2}{1+a(\overline{z(t)}+\varepsilon_1)^2}\right), \\ \qquad t\neq n\tau, \\ S(t^+)=(1-\mu_1)S(t),\qquad t=n\tau,\ n=1,2,\cdots \end{cases}\tag{17}$$
对于 $t\geqslant T_1$, 假设 $N_1\in\mathbf{N}$ 且 $N_1\tau > T_1$, 式(17) 在$(n\tau,(n+1)\tau)(n\geqslant N_1)$ 上积分得
$$S((n+1)\tau)\geqslant(1-\mu_1)S(n\tau^+)\exp\left(\int_{n\tau}^{(n+1)\tau}\left(r-\frac{r}{K}m_3-\right.\right.$$
$$\left.\left.\frac{r\theta}{K}(\overline{z(t)}+\varepsilon_1)-\frac{\beta(\overline{z(t)}+\varepsilon_1)^2}{1+a(\overline{z(t)}+\varepsilon_1)^2}\right)\mathrm{d}t\right)=(1-\mu_1)S(n\tau)e^{\sigma},$$
则 $S((N_1+k)\tau)\geqslant(1-\mu_1)^kS(N_1\tau^+)e^{k\sigma}\to\infty$, 当 $k\to\infty$, 这和 $S(t)$ 有界相矛盾. 因此存在某一个 $t_1>0$ 使得 $S(t)\geqslant m_3$.

2° 如果对于 $t\geqslant t_1$ 有 $S(t)\geqslant m_3$, 则我们的目的已经达到了. 因此我们只要考虑所有的解离开区域 $R=\left\{(S(t),\ I(t))\in R_+^2:\ S(t)<m_3\right\}$ 又回到此区域中来. 假设 $t^*=\inf_{t\geqslant t_1}\left\{S(t)<m_3\right\}$, 那么对于 t^* 有两种可能:

情形 1 $t^*=n\tau$, $n_1\in\mathbf{Z}_+$, 则 $S(t)\geqslant m_3$ 对于 $t\in[t_1,t^*)$ 和 $S(t^*)=m_3$, 且$(1-\mu_1)m_3\leqslant S(t^+)\leqslant(1-\mu_1)S(t)\leqslant m_3$. 选择 n_2, $n_3\in\mathbf{N}$ 使得
$$n_2\tau > T_2=\frac{\ln(\varepsilon_1/(M+\mu))}{-w+\delta},$$
$$(1-\mu_1)^{n_2}e^{n_3\sigma}e^{n_2\sigma_1\tau} > (1-\mu_1)^{n_2}e^{n_3\sigma}e^{(n_2+1)\sigma_1\tau} > 1,$$
其中 $$\sigma_1=r-\frac{rm_3}{K}-\frac{r\theta}{K}M-\frac{\beta M^2}{1+aM^2}<0.$$
设 $T=n_1\tau+n_2\tau$, 我们得到 $t_2\in[t^*,t^*+T]$ 使得 $S(t_2)>m_3$, 否则考虑到式(16) 且 $z(t^{*+})=I(t^{*+})$, 得到
$$z(t)=\left(z(t^{*+})-\frac{\mu}{1-(1-\mu_2)e^{(-w+\delta)\tau}}\right)e^{(-w+\delta)(t-t^*)}+\overline{z(t)},$$
$t\in(n\tau,(n+1)\tau]$, $n_1\leqslant n\leqslant n_1+n_2+n_3$, 则
$$|z(t)-\overline{z(t)}|<(\mu+M)e^{(-w+\delta)(t-(n_1+1)\tau)}<\varepsilon_1,$$
且 $I(t)\leqslant z(t)\leqslant\overline{z(t)}+\varepsilon_1$, $t^*+n_2\tau\leqslant t\leqslant t^*+T$, 此表明式(17) 对于 $t^*+n_2\tau\leqslant t\leqslant t^*+T$ 成立. 和第一步的证明一样, 可以得到
$$S(t^*+T)\geqslant S(t^*+n_2)\tau e^{n_3\sigma}.$$
从(3) 式的第 1 个方程得
$$\begin{cases} S'(t)\geqslant S(t)\left(r-\frac{r}{K}m_3-\frac{r\theta}{K}M-\frac{\beta M^2}{1+aM^2}\right)=\sigma_1S(t), & t\neq n\tau, \\ S(t^+)=(1-\mu_1)S(t), & t=n\tau. \end{cases}\tag{18}$$
式(18) 在区间 $[t^*,t^*+n_2\tau]$ 上积分得

$$S(t^* + n_2\tau) \geqslant m_3(1-\mu_1)^{n_2}\mathrm{e}^{\sigma_1 n_2\tau}.$$

因此得到

$$S(t^* + T) \geqslant m_3(1-\mu_1)^{n_2}\mathrm{e}^{\sigma_1 n_2\tau}e^{n_3\sigma} > m_3,$$

是一个矛盾. 设 $t = \inf_{t \geqslant t^*}\left\{S(t) \geqslant m_3\right\}$, 则有 $S(t) \geqslant m_3$ 当 $t \in [t^*, t]$, 从而得 $S(t) \geqslant (1-\mu_1)^{n_2+n_3}S(t^*)\mathrm{e}^{\sigma_1(t-t^*)} \geqslant (1-\mu_1)^{n_2+n_3}m_3\mathrm{e}^{\sigma_1(n_2+n_3)} = m_1$, $t \geqslant t$, 所以有 $S(t) \geqslant m_1$. 同样的讨论可以继续进行下去. 既然 $S(t) \geqslant m_3$, 那么对于 $t \geqslant t_1$ 有 $S(t) \geqslant m_1$.

情形 2 $t \neq n\tau, n \in \mathbf{Z}_+$, 则对 $t \geqslant t_1'$ 有 $S(t) \geqslant m_3$ 与 $S(t^*) = m_3$. 设 $t^* = \inf_{t \geqslant t_1'}\left\{S(t) < m_3\right\}$, 则对于 $t \in [t_1', t^*)$ 有 $S(t) \geqslant m_3$ 和 $S(t^*) = m_3$. 又设 $t^* \in [n_1'\tau, (n_1'+1)\tau)$, $n_1' \in \mathbf{N}$, 必存在一个 $t_2' \in [(n_1'+1)\tau, (n_1'+1)\tau + T]$. 考虑到(16) 式且 $z((n_1'+1)\tau^+) = I((n_1'+1)\tau^+)$, 于是得到

$$z(t) = (z(n_1+1)\tau^+) - \frac{\mu}{1-(1-\mu_2)\mathrm{e}^{(-w+\delta)\tau}}\mathrm{e}^{(-w+\delta)(t-(n_1'+1)\tau)} + \overline{z(t)},$$

$t \in (n\tau, (n+1)\tau]$, $n_1' + 1 \leqslant n \leqslant n_1' + 1 + n_2 + n_3$. 则

$$|z(t) - \overline{z(t)}| < (\mu + M)\mathrm{e}^{(-w+\delta)(t-(n_1'+1)\tau)} < \varepsilon_1,$$

且 $I(t) \leqslant z(t) \leqslant \overline{z(t)} + \varepsilon_1$, $(n_1' + 1 + n_2)\tau \leqslant t \leqslant (n_1' + 1 + T)\tau$. 此即表明对于 $(n_1'+1+n_2)\tau \leqslant t \leqslant (n_1'+1)\tau + T$, 有(17 式成立. 与第一步的证明一样, 易得

$$S((n_1'+1+n_2+n_3)\tau) \geqslant (1-\mu_1)^{n_3}S((n_1'+1+n_2)\tau)\mathrm{e}^{n_3\sigma}.$$

从系统(3 的第 1 个方程得

$$S'(t) \geqslant S(t)\left(r - \frac{r}{K}m_3 - \frac{r\theta}{K}M - \frac{\beta M^2}{1+aM^2}\right) = \sigma_1 S(t).$$

其在区间 $[t^*, (n_1'+1+n_2)\tau]$ 上积分得

$$S((n_1'+1+n_2)\tau) \geqslant (1-\mu_1)^{n_2+1}m_3\mathrm{e}^{\sigma_1(n_2+1)\tau}.$$

则 $$S((n_1'+1+n_2+n_3)\tau) \geqslant m_3\mathrm{e}^{\sigma_1(n_2+1)\tau}\mathrm{e}^{n_3\sigma} > m_3.$$

这样又得到矛盾. 设 $t' = \inf_{t \geqslant t^*}\left\{S(t) \geqslant m_3\right\}$, 则 $S(t') \geqslant m_3$, $t \in [t^*, t]$. 对于 $t \geqslant t'$, 我们得到 $S(t) \geqslant S(t^*)\mathrm{e}^{\sigma_1(t-t^*)} \geqslant m_3\mathrm{e}^{\sigma_1(1+n_2+n_3)} = m_1$. 同样的讨论可以继续. 既然 $S(t') \geqslant m_3$, 则对所有 $t \geqslant t_1$ 有 $S(t) \geqslant m_1$ 成立. 定理证毕.

注 1 令

$$f(\tau) = r\tau - \frac{r\mu\theta(1-\mathrm{e}^{-w\tau})}{Kw(1-(1-\mu_2)\mathrm{e}^{-w\tau})} - \frac{\beta}{2aw}\ln\frac{a\mu^2 + (1-(1-\mu_2)\mathrm{e}^{-w\tau})^2}{(1-(1-\mu_2)\mathrm{e}^{-w\tau})^2 + a\mu^2\mathrm{e}^{-2w\tau}} - \ln\frac{1}{1-\mu_1},$$

我们容易计算得到

$$f(0) = -\ln\frac{1}{1-\mu_1} < 0,\ f(\tau) \to \infty, \quad 当\ \tau \to \infty, 且\ f''(\tau) > 0.$$

所以 $f(\tau) = 0$ 有唯一的一个正根, 记作 $\tau_{\max}$. 由定理 1 和定理 2 知 $\tau_{\max}$ 是个阈值. 当 $\tau < \tau_{\max}$ 时, 系统(3) 的灭绝周期解 $(0, I(t))$ 是全局渐近稳定的; 当 $\tau > \tau_{\max}$ 时, 系统(3 是持久的.

注 2 当 $\mu = 0$, 即没有周期地释放病虫, 我们也很容易知道 $\tau_1 = \ln[1/(1-\mu_1)]$ 是个阈值. 显然, $\tau_{\max} > \tau_1$, 这说明了脉冲地释放病虫能够延长喷洒农药的周期, 从而减小害虫管理的成本.

3 讨 论

根据害虫管理的实际情况, 本文讨论了在固定时刻脉冲释放病虫与喷洒农药的 $S-I$ 模型.

我们分析了所讨论的系统的灭绝周期解的全局渐进稳定性和获得了此系统持久的条件. 我们的结论对于害虫管理是十分有益的. 通过分析此模型, 我们有些新的有趣的问题: 怎样优化农药的用量? 怎样去根据害虫的状态确定释放病虫的脉冲时刻? 脉冲释放病虫是怎样影响此系统的? 而在现实的害虫管理中, 虫害是季节性的, 所以我们怎样在有限的时间段上去讨论脉冲释放病虫? 基于这些问题, 我们今后将继续研究.

致谢 本文作者感谢贵州财经学院重点学科基金的资助.

[参 考 文 献]

[1] Falcon L A. Use of Bacteria for Microbial Control of Insects[M]. New York, N Y: Academic Press, 1971.

[2] Burges H D, Hussey N W. Microbial Control of Insects and Mites[M]. New York, N Y: Academic Press, 1971, 67-95.

[3] Falcon L A. Problems associated with the use of arthropod viruses in pest control[J]. Annu Rev Entomol, 1976, **21**: 305-324.

[4] Bailey N T J. The Mathematical Theory of Infectious Diseases and Its Applications[M]. London: Griffin, 1975, 413.

[5] Burges H D, Hussey N W. Microbial Control of Insections and Mites[M]. New York, N Y: Academic Press, 1971, 861.

[6] Fenner F, Ratcliffe F N. Myxomatosis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1965, 379.

[7] Davis P E, Myers K, Hoy J B. Biological control among vertebrates[A]. In: Huffaker C B, Messenger P S Eds. Theory and Practice of Biological Control[C]. New York, N Y: Plenum Press, 1976, 501-519.

[8] Tanada Y. Epizootiology of insect diseases[A]. In: Debach P Ed. Biological Control of Insect Pests and Weeds[C]. London: Chapman and Hall, 1964, 548-578.

[9] Barclay H J. Models for pest control using predator release, habitat management and pesticide release in combination[J]. J Appl Ecol, 1982, **19**(2): 337-348.

[10] Paneyya J C. A mathematical model of periodically pulse chemotherapy: tumor recurrence and metastasis in a competition environment[J]. Bull Math Biol, 1996, **58**(3): 425-447.

[11] d'Onofrio A. Stability properties of pulse vaccination strategy in SEIR epidemic model[J]. Math Biol, 2002, **179**(1): 57-72.

[12] Van Lanteren J C. Integrated pest managemant in protected crops[A]. In: Dent D Ed. Integrated Pest Management[C]. London: Chapman and Hall, 1995.

[13] Roberts M G, Kao R R. The dynamics of an infectious disease in a population with birth pulse[J]. Math Biol, 1998, **149**(1): 23-36.

[14] Xiao Y N, Chen L S. A ratio-depengent predator-prey model with disease in the prey[J]. Appl Math Comput, 2002, **131**: 397-414.

[15] Xiao Y N, Chen L S. An SIS epidemic model with stage structure and a delay[J]. Acta Math Appl English Series, 2002, **18**(4): 607-618.

[16] Xiao Y N, Chen L S, Bosh F V D. Dynamical behavior for stage-structured SIR infectious disease model[J]. Nonlinear Analysis: RWA, 2002, **3**(2): 175-190.

[17] Xiao Y N, Chen L S. On an SIS epidemic model with stage-structure[J]. Journal of System Science and Complexity, 2003, **16**(2): 275-288.

[18] Lu Z H, Gang S J, Chen L S. Analysis of an SI epidemic with nonlinear transmission and stage struecture[J]. Acta Math Science, 2003, **23**(4): 440-446.

[19] Hethcote H. The mathematics of infectious disease[J]. SIAM Review, 2002, **42**: 599-653.

[20] Anderson R M, May R M. Regulation and stability of host-parasite population interactions—Ⅰ Regu-

lartory processes[J]. J Anim Ecol, 1978, **47**(1): 219-247.
[21] Goh B S. The potential utility of control theory to pest management[J]. Proc Ecol Soc, 1971, **6**: 84-89.
[22] Gilbert N, Gutierrez A P, Frazer B D, et al. Ecological Relationships[M]. San Francisco, Calif: W H Freeman and Co, 1976.
[23] Wickwire K. Mathematical models for the control of pests and infectious diseases: a survey[J]. Theoret Population Biol, 1977, **11**(2): 182-238.
[24] Anderson R, May R. Population biological of infectious diseases[M]. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1982.
[25] Anderson R, May R. Infectious Diseases of Humen: Dynamics and Control[M]. Oxford: Oxford University Press, 1991.
[26] De Jong M C M, Diekmann O, Heesterbeek J A P. How dose tranmission depend on population size? in human infectious diseases[A]. Mollison D Ed. Epidemic Models[C]. Cambridge UK: Cambridge University Press, 1995, 84-94.
[27] LIU Wei-min, Levin S A, Iwasa Y. Influence of nonlinear incidence rates upon the behavior of SIRS Epidemiological models[J]. J Math Biol, 1986, **23**(2): 187-204.
[28] LIU Wei-min, Hethcote H W, Levin S A. Dynamical behavior of epidemiological models with nonlinear incidence rates[J]. J Math Biol, 1987, **25**(4): 359-380.
[29] 陈兰荪, 陈健. 非线性生物动力学系统[M]. 北京: 科学出版社, 1993.
[30] Capasso V, Serio G. A generalization of the Kermack-Mckendrick deterministic epidemic model[J]. Math Biosci, 1978, **42**: 43-61.
[31] Ruan S, Wang W. Dynamical behavior of an epidemic model with a nonlinear incidence rate[J]. J Differential Equations, 2003, **188**: 135-163.
[32] Lakshmikantham V, Bainov D D, Simeonov P. Theory of Impulsive Differential Equations[M]. Singapore: World Scientific, 1989.
[33] Bainov D, Simeonov P. Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications[M]. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics. **66**. Longman Scientific Technical, 1993.
[34] Sangoh Bean. Management and Analysis of Biological Populations[M]. Elsevier Scientific Press Company, 1980.

Nonlinear Incidence Rate of a Pest Management *S-I* Model With Biological and Chemical Control Concern

JIAO Jian-jun[1,2], CHEN Lan-sun[1]
(1. Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology, Dalian, Liaoning 116024, P.R. China;
2. School of Mathematics and Statistics, Guizhou College of Finance & Economics, Guiyang 550004, P.R. China

Abstract: A pest management S-I model with impulsive releases of infective pests and spraying pesticides is proposed and investigated. It was proved that all solutions of the model are uniformly ultimately bounded. The sufficient conditions of globally asymptotic stability periodic solution of pest-extinction and permanence of the model were also obtained. The approach of combining impulsive releasing infective pests with impulsive spraying pesticides provides reliable tactical basis for the practical pest management.

Key words: impulsive; infective; chemical control; uniform permanence; pest-extinction