应用数学和力学, 第 28 卷 第 5 期
2007 年 5 月 15 日出版
Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 28, No. 5, May. 15, 2007

文章编号: 1000-0887(2007) 05-0521-11

关于海洋动力学中二维的大尺度原始方程组(Ⅰ)*

黄代文[1,2], 郭柏灵[1]

(1. 北京应用物理与计算数学研究所, 北京 100088;
2. 中国工程物理研究所 研究生部, 北京 100088)

(我刊编委郭柏灵来稿)

摘要: 考虑地球物理学中大尺度海洋运动的二维原始方程组的初边值问题. 先假定海洋的深度为正的常数. 首先, 当初始数据是平方可积时, 应用 Faedo-Galerkin 方法, 得到了这一问题整体弱解的存在性. 其次, 当初始数据及其它们关于垂直方向的导数均为平方可积时, 应用 Faedo-Galerkin 方法和各向异性不等式, 得到了上述初边值问题的整体弱强解的存在、唯一性.

关 键 词: 海洋的原始方程组; 整体弱强解; 存在性; 唯一性
中图分类号: O175 文献标识码: A

引 言

为了理解长期天气预报和气候变化的机制, 人们可以研究支配大气和海洋运动的数学方程组和模型. 在过去的 20 年中, 许多数学家(例如 Lions, Temam 和 Wang) 开始研究大气、海洋、耦合的大气海洋原始方程组(参见文献[1]至文献[5]).

在文献[2]中, Lions 等考虑大尺度海洋运动的三维原始方程组、带垂直粘性的三维海洋原始方程组、Boussinesq 方程组的数学表述和吸引子. 他们得到了这 3 个方程组的整体弱解的存在性. 而且, 在整体强解存在的假设下, 他们还研究了方程组动力系统的吸引子.

文献[6]至文献[8]的作者考虑与密度为常数的原始方程组对应的流体静力 Navier-Stokes 方程组. 在文献[8]中, Guill n-Gonzûlez 等得到了小初值的整体强解的存在性. 另外, 在弱解带有一定的正则性的前提下, 他们还证明了唯一性. 文献[6]在假设初始数据是平方可积的前提下考虑底部带有摩擦项的二维流体静力 Navier-Stokes 方程组的弱解的存在、唯一性. 在海底的深度为正的假设下, 文献[7]的作者研究底部带有 Dirichlet 边界条件的二维流体静力 Navier-Stokes 方程组. 他们不仅得到了整体强解的存在、唯一性, 而且还证明了能量随时间 t 是指数衰减的.

在文献[9]中, Petcu 等考虑带有周期边界条件的大尺度海洋二维原始方程组的一些正则性结论. 这里的方程组是在所有的未知函数与 y 无关的假设下由三维海洋原始方程组推导出

* 收稿日期: 2006-03-06; 修订日期: 2007-04-09
基金项目: 国家自然科学基金(重点) 资助项目(90511009)
作者简介: 黄代文(1977—), 男, 福建云霄人, 博士(联系人. Tel: + 86-10-62014411-2645; E-mail: hdw55@tom.com).

来的．他们证明了二维海洋原始方程组的强解和更光滑解的存在、唯一性．

受到文献[9]的启发，我们对大尺度海洋运动的二维原始方程组的研究产生了兴趣．由于在大尺度海洋运动中地球的曲率可以不予考虑，我们使用直角坐标系而不用球坐标系．文章的第1部分将给出二维海洋原始方程组．这里二维原始方程组的边界条件(见文章的第1部分)与文献[9]的边界条件不同．特别地，我们可以考虑海面上有风的吹动力和热通量的情形．对于这样的边界条件，为了证明弱强解(它的定义将在第1部分给出)的存在、唯一性，我们必须找到 u_z 在底部的相容条件．与文献[6]至文献[8]不同，我们没有密度为常数的假定．因此我们必须考虑温度和盐度．另外，我们的边界条件可以是非齐次的．然而我们也必须假设海洋的深度是严格正的．受文献[7]的启发，利用 Faedo-Galerkin 方法和各向异性不等式，我们得到了带有固定深度的大尺度海洋运动的二维原始方程组的初边值问题(用系统(I)来标注)的弱强解的存在、唯一性．在系列文章[10]中，我们将继续考虑深度不恒为常数的系统(I)，得到整体强解的存在、唯一性．同时，我们还将研究解的渐近行为，证明了能量随时间 t 是指数衰减的．

本文安排如下：在第1节，我们将给出大尺度海洋运动的二维原始方程组的具体表达式和我们的主要结果．第2节介绍系统(Ⅰ)的预备知识．而主要定理的证明则在第3节给出．

1 大尺度海洋运动的二维原始方程组

在这一部分，我们将给出大尺度海洋运动的二维原始方程组的物理背景和我们的主要结果．

在 Boussinesq 近似(密度的差别除在浮力项和状态方程外可以忽略)和流体静力近似 $\partial p/\partial z=-\rho g$ 下，大尺度海洋运动由下面的无量纲方程组来描绘(见参考文献[9]、文献[11]和文献[12])

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+\omega\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{1}{\varepsilon'}v+\frac{1}{\varepsilon'}\frac{\partial p}{\partial x}=\gamma_1\Delta_3 u, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+\omega\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{\varepsilon'}u+\frac{1}{\varepsilon'}\frac{\partial p}{\partial y}=\gamma_2\Delta_3 v, \tag{2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial z}=0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+\omega\frac{\partial T}{\partial z}=\gamma_3\Delta_3 T, \tag{5}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial x}+v\frac{\partial S}{\partial y}+\omega\frac{\partial S}{\partial z}=\gamma_4\Delta_3 S, \tag{6}$$

$$\rho=\rho_{\mathrm{ref}}(1-\beta_T(T-T_{\mathrm{ref}})+\beta_S(S-S_{\mathrm{ref}})), \tag{7}$$

其中未知的函数是 (u,v,ω)、ρ、p、S、T，(u,v,ω) 为三维的速度，ρ 为密度，p 为压强，S 为盐度，T 为温度，g 为重力加速度，ε' 为 Rossby 数，$\gamma_i>0(1\leqslant i\leqslant 4)$ 为粘性系数，ρ_{ref}、T_{ref}、S_{ref} 分别为密度、温度和盐度的参考值，β_T、β_S 为扩散系数，Δ_3 为三维的 Laplacian 算子．方程(7)是经验的近似(参见文献[12])．由于我们考虑大尺度海洋运动，所以地球的曲率可以不考虑．我们可以用直角坐标系，其中3个坐标轴为 Ox、Oy、Oz，Ox 为东西向，Oy 为南北向，Oz 为垂直方向．

如果我们假定所有的未知函数都与 y 无关而且函数 v 是非0的，我们可以得到下面的大尺度海洋运动的二维原始方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\omega\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{1}{\varepsilon'}v+\frac{1}{\varepsilon'}\frac{\partial p}{\partial x}=\gamma_1\Delta u, \tag{8}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+\omega\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{\varepsilon}u=\gamma_2\Delta v, \tag{9}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho, \tag{10}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial z}=0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+\omega\frac{\partial T}{\partial z}=\gamma_3\Delta T, \tag{12}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial x}+\omega\frac{\partial S}{\partial z}=\gamma_4\Delta S, \tag{13}$$

$$\rho=\rho_{\mathrm{ref}}(1-\beta_T(T-T_{\mathrm{ref}})+\beta_S(S-S_{\mathrm{ref}})). \tag{14}$$

上面方程组的空间区域为

$$\Omega=(0,1)\times(-h(x),0),$$

其中海洋深度 $h:[0,1]\to\mathbf{R}_+$ 表示$[0,1]$ 上非负连续函数且 $h\geqslant c>0$. Ω的边界定义为$\partial\Omega=s\cup l\cup b$, 这里

$$s=(0,1)\times\{0\},\quad l=\{0\}\times(-h(0),0)\cup\{1\}\times(-h(1),0),$$
$$b=\{(x,-h(x))\in\mathbf{R}^2;\,x\in(0,1)\}.$$

上述方程组的边界条件为

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\tau_u,\ \frac{\partial v}{\partial z}=\tau_v,\ \omega=0,\ \frac{\partial T}{\partial z}=q_s,\ \frac{\partial S}{\partial z}=0\qquad(\text{在 } s \text{ 上}), \tag{15}$$

$$(u,v,\omega)=0,\ T=T_{\mathrm{h}},\ S=S_{\mathrm{h}}\qquad(\text{在 } b \text{ 上}), \tag{16}$$

$$(u,v,\omega)=0,\ \frac{\partial T}{\partial x}=0,\ \frac{\partial S}{\partial x}=0\qquad(\text{在 } l \text{ 上}), \tag{17}$$

其中 τ_u、τ_v 是风的吹动力, q_{s} 为海面热通量, τ_u、τ_v、$q_{\mathrm{s}}\in C_0^2([0,1])$, T_{h}、S_{h} 分别为给定海底处的温度和盐度, 它们是变量 x 的充分光滑函数且 $\partial T_{\mathrm{h}}/\partial x\mid_{x=0,1}=\partial S_{\mathrm{h}}/\partial x\mid_{x=0,1}=0$.

由(10)式和(14)式, 我们可以得到

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p_{\mathrm{s}}}{\partial x}-\int_z^0\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x}-\mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right), \tag{18}$$

这里 p_{s} 为海面气压, $\mu_1=\rho_{\mathrm{ref}}\beta_T$, $\mu_2=\rho_{\mathrm{ref}}\beta_S$. 另一方面, 我们由(11)式和(15)式可得

$$\omega(x,z,t)=\int_z^0\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{19}$$

方程组(8)式至(14)式可以改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\int_z^0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{1}{\varepsilon}v+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p_{\mathrm{s}}}{\partial x}-\frac{1}{\varepsilon}\int_z^0\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x}-\mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right)=\gamma_1\Delta u, \tag{20}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+\left(\int_z^0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{1}{\varepsilon}u=\gamma_2\Delta v, \tag{21}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+\left(\int_z^0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial T}{\partial z}=\gamma_3\Delta T, \tag{22}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial x}+\left(\int_z^0\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial S}{\partial z}=\gamma_4\Delta S. \tag{23}$$

为了简单起见, 我们仅仅考虑二维大尺度方程组(20)式至(23)式带有齐次的边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial z}=0,\ \frac{\partial v}{\partial z}=0,\ \frac{\partial T}{\partial z}=0,\ \frac{\partial S}{\partial z}=0\qquad(\text{在 } s \text{ 上}), \tag{24}$$

$$(u,v)=0,\ T=0,\ S=0\qquad(\text{在 } b \text{ 上}), \tag{25}$$

$$(u,v)=0,\ \frac{\partial T}{\partial x}=0,\ \frac{\partial S}{\partial x}=0\qquad(\text{在 } l \text{ 上}) \tag{26}$$

和初始条件

$$(u, v, T, S)_{t=0} = (u_0, v_0, T_0, S_0) \tag{27}$$

的初边值问题, 并记为系统(Ⅰ).

在这篇文章中, 我们的主要结果是

定理 1.1 如果 $h \equiv 1$, $U_0 = (u_0, v_0, T_0, S_0) \in H$, 那么系统(Ⅰ)存在一个整体弱解 U, 使得

$$(u, v, T, S) \in L^\infty(0, \infty; H) \cap L^2(0, \infty; V),$$

这里 H、V 的定义将在第 2 节给出. 更进一步, 如果 $\partial_z u_0, \partial_z v_0, \partial_z T_0, \partial_z S_0 \in L^2(\Omega)$, 则解 U 是唯一的且

$$\partial_z u, \partial_z v, \partial_z T, \partial_z S \in L^\infty(0, \infty; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, \infty; H^1(\Omega)),$$

即 U 是系统(Ⅰ)唯一的整体弱强解.

注记 1.1 对于一般情况(15)式至(17)式, 通过齐次化边界条件(参见文献[2]), 我们同样可以解初边值问题(20)式至(23)式, (15)式至(17)式, (27)式. 当然这种情况的计算要复杂一些.

2 预 备 知 识

在这一部分, 我们将给出一些函数空间、整体弱解、整体弱强解、整体强解的定义和证明系统(Ⅰ)的整体弱强解的存在、唯一性的预备知识.

首先, 为了给出系统(Ⅰ)的函数框架, 我们引入下面函数空间:

$$C_{b,l}^\infty(\Omega) := \left\{u;\, u \in C^\infty(\Omega),\ \mathrm{supp}\,u \text{ 为 } \Omega \setminus b \cup l \text{ 的紧子集}\right\},$$

$$C_b^\infty(\Omega) := \left\{u;\, u \in C^\infty(\Omega),\ \mathrm{supp}\,u \text{ 为 } \Omega \setminus b \text{ 的紧子集}\right\},$$

$$\mathscr{K} := \left\{u;\, u \in C_{b,l}^\infty(\Omega),\ \int_{-h(x)}^0 u\,\mathrm{d}z = 0\right\},$$

$$\mathscr{V} := \mathscr{K} \times C_{b,l}^\infty(\Omega) \times C_b^\infty(\Omega) \times C_b^\infty(\Omega),$$

$$H_1 := \left\{u;\, u \in L^2(\Omega),\ \int_{-h(x)}^0 u\,\mathrm{d}z = 0\right\},$$

$$V_1 := \left\{u;\, u \in H^1(\Omega),\ \int_{-h(x)}^0 u\,\mathrm{d}z = 0,\ u|_{b\cup l} = 0\right\},$$

$$V_2 := \left\{u;\, u \in H^1(\Omega),\ u|_{b\cup l} = 0\right\},$$

$$V_3 := \left\{u;\, u \in H^1(\Omega),\ u|_b = 0\right\},$$

$V := V_1 \times V_2 \times V_3 \times V_3$, 其中的范数为

$$\|U\|_V^2 = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|T\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|S\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

$H := H_1 \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, 其中的范数为

$$\|U\|_H^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|T\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|S\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

定义 2.1 我们称 $U = (u, v, T, S)$ 为系统(Ⅰ)在$(0, \tau)$中的弱解, 如果 $U \in L^\infty(0, \tau; H) \cap L^2(0, \tau; V)$ 且满足下面式子: $\forall\, \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) \in C^1(0, \tau; \mathscr{V})$ 而且 $\varphi(\tau) = 0$,

$$-\int_0^\tau\!\!\int_\Omega (\partial_t \varphi_1 + u\partial_x \varphi_1 + \omega\partial_z \varphi_1) u - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\!\!\int_\Omega v\varphi_1 - \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\!\!\int_\Omega \varphi_1\left(\int_z^0\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x} - \mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right)\right) +$$
$$\gamma_1\int_0^\tau\!\!\int_\Omega (\partial_x u\partial_x \varphi_1 + \partial_z u\partial_z \varphi_1) = \int_\Omega u_0\varphi_1(0),$$

$$-\int_0^\tau\!\!\int_\Omega (\partial_t \varphi_2 + u\partial_x \varphi_2 + \omega\partial_z \varphi_2) v + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau\!\!\int_\Omega u\varphi_2 + \gamma_2\int_0^\tau\!\!\int_\Omega (\partial_x v\partial_x \varphi_2 + \partial_z v\partial_z \varphi_2) =$$
$$\int_\Omega v_0\varphi_2(0),$$

$$-\int_0^\tau\int_\Omega(\partial_t\varphi_3+u\partial_x\varphi_3+\omega\partial_z\varphi_3)T+\gamma_3\int_0^\tau\int_\Omega(\partial_xT\partial_x\varphi_3+\partial_zT\partial_z\varphi_3)=\int_\Omega T_0\varphi_3(0),$$

$$-\int_0^\tau\int_\Omega(\partial_t\varphi_4+u\partial_x\varphi_4+\omega\partial_z\varphi_4)S+\gamma_4\int_0^\tau\int_\Omega(\partial_xS\partial_x\varphi_4+\partial_zS\partial_z\varphi_4)=\int_\Omega S_0\varphi_4(0),$$

这里 $\omega(x,z,t)=\int_z^0\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $U=(u,v,T,S)$ 对几乎所有的 $t\in(0,\tau)$ 满足下面的能量不等式

$$\frac{1}{2}\|U(t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\gamma_1\int_0^t\|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^2}^2+\gamma_2\int_0^t\|\nabla v\|_{(L^2(\Omega))^2}^2+$$
$$\gamma_3\int_0^t\|\nabla T\|_{(L^2(\Omega))^2}^2+\gamma_4\int_0^t\|\nabla S\|_{(L^2(\Omega))^2}^2\leqslant$$
$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\int_\Omega\left(\int_z^0\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x}-\mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right)u\right)+C\|U(0)\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

其中 C 为正的常数. 我们称 U 为系统(Ⅰ)的整体弱解,如果对于 $\forall\tau<+\infty$, U 为系统(Ⅰ)在$(0,\tau)$ 中的弱解. 我们称 U 为系统(Ⅰ)的整体弱强解,如果 U 为系统(Ⅰ)的整体弱解且

$$\partial_zU=(\partial_zu,\partial_zv,\partial_zT,\partial_zS)\in L^\infty(0,\tau;L^2(\Omega)^4)\cap L^2(0,\tau;H^1(\Omega)^4).$$

更进一步,我们称 U 为系统(Ⅰ)的整体强解,如果整体弱解 U 还满足下面正则性

$$U\in L^\infty(0,\tau;V)\cap L^2(0,\tau;H^2(\Omega)^4\cap V),\qquad\forall\tau<+\infty.$$

注记 2.1 (20)式中海面气压 p_s 是由 de Rham 定理推得,与 Navier-Stokes 方程(见文献[13])的做法一样.

下面,我们将给出证明我们的主要结果的预备知识.

定义 2.2(各向异性空间[8]) 给定 $p,q\in[1,\infty]$,我们称函数 u 属于 $L_x^pL_z^q(\Omega)$,如果 $u(x)\in L^q(-h(x),0)$ 且 $\|u(x,\cdot)\|_{L^q(-h(x),0)}\in L^p(0,1)$. $L_x^pL_z^q(\Omega)$ 的范数为

$$\|u\|_{L_x^pL_z^q(\Omega)}=\|\,\|u(x,\cdot)\|_{L^q(-h(x),0)}\|_{L^p(0,1)}.$$

引理 2.1(两个各向异性不等式[8]) 对于 $u\in H^1(\Omega)$,

1) $\|u\|_{L_x^\infty L_z^2(\Omega)}^2\leqslant 2\|u_x\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}$, 若 $u|_l=0$,

2) $\|u\|_{L_x^2L_z^\infty(\Omega)}^2\leqslant 2\|u_z\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)}$, 若 $u|_b=0$,

更进一步,

3) $\|u\|_{L_x^2L_z^\infty(\Omega)}^2\leqslant C\|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^2}\|u\|_{L^2(\Omega)}$,

4) $\|u\|_{L_x^\infty L_z^2(\Omega)}^2\leqslant C\|\nabla u\|_{(L^2(\Omega))^2}\|u\|_{L^2(\Omega)}$,

这里 $C=C(\Omega)>0$.

引理 2.2(一般 Gronwall 引理) 假设 ϕ、ψ、φ 为$[t_0,+\infty)$ 上的 3 个局部可积正函数,若 φ' 在$[t_0,+\infty)$ 中局部可积而且对于 $t\geqslant t_0$, 有

$$\frac{\mathrm d\varphi}{\mathrm dt}\leqslant\phi\varphi+\psi,$$
$$\int_t^{t+r}\phi(s)\mathrm ds\leqslant a_1,\quad\int_t^{t+r}\psi(s)\mathrm ds\leqslant a_2,\quad\int_t^{t+r}\varphi(s)\mathrm ds\leqslant a_3,$$

其中 r、a_1、a_2、a_3 为正的常数,则

$$\varphi(t+r)\leqslant\left(\frac{a_3}{r}+a_2\right)\exp(a_1),\qquad\forall t\geqslant t_0.$$

引理 2.2 的证明可以参见文献[14]91.

3 定理 1.1 的证明

系统(Ⅰ)的整体解存在性的证明是按通常的 Faedo-Galerkin 方法(参见文献[13])而得到

的. 由于这一方法是标准的, 我们仅给出先验估计.

关于 u、v、T、S 的能量估计　在(20)式中选 u 做为实验函数, 再由

$$\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{0}\int_{0}^{1}\left(\int_{z}^{0}(\mu_1 T-\mu_2 S)\right)u_x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\right|\leqslant \varepsilon\|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2+c\|T\|_{L^2(\Omega)}^2+c\|S\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

我们可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2-\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega uv+\nu_1\int_\Omega|\nabla u|^2\leqslant \varepsilon\|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2+c\|T\|_{L^2(\Omega)}^2+c\|S\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{28}$$

在这篇文章中, c 将代表各种正的常数, 由具体位置决定. ε是充分小的正数. 在(21)式中选 v 做为实验函数, 我们得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v(t)\|_{L^2(\Omega)}^2-\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega uv+\nu_2\int_\Omega|\nabla v|^2\leqslant 0. \tag{29}$$

在(22)式和(23)式中分别选 T、S 做为实验函数, 我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|T(t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\nu_3\int_\Omega|\nabla T|^2\leqslant 0, \tag{30}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|S(t)\|_{L^2(\Omega)}^2+\nu_4\int_\Omega|\nabla S|^2\leqslant 0. \tag{31}$$

由(30)式、(31)式, 我们得到

$$\begin{cases} T\in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))\cap L^2(0,\infty;V_3),\\ S\in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))\cap L^2(0,\infty;V_3). \end{cases} \tag{32}$$

由(28)式、(29)式和(32)式, 我们可知

$$u\in L^\infty(0,\infty;H_1)\cap L^2(0,\infty;V_1),\ v\in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))\cap L^2(0,\infty;V_2). \tag{33}$$

一个相容性条件　为了保证系统(I)的整体弱强解的存在唯一性, 我们必须找到 u_z 在底部的相容性边界条件. 从-1到 0 积分(20)式, 我们得

$$2\int_{-1}^{0}u\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{0}v+\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p_s}{\partial x}-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{0}\left(\int_z^0\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x}-\mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right)\right)=-\nu_1 u_z|_{z=-1}.$$

(20)式取 $z=-1$ 的迹, 我们可得

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial p_s}{\partial x}-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{0}\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x}-\mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right)=\nu_1 u_{zz}|_{z=-1}.$$

由上面两式消去 $(1/\varepsilon)(\partial p_s/\partial x)$, 我们有下面的相容性条件

$$2\int_{-1}^{0}u_z\omega-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{0}v-\frac{1}{\varepsilon}\int_{-1}^{0}z\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x}-\mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right)+\nu_1 u_{zz}|_{z=-1}+\nu_1 u_z|_{z=-1}=0. \tag{34}$$

关于 u_z、v_z、T_z、S_z 的能量估计　方程组(20)式至(23)式关于 z 求导, 我们可以得到下面方程组

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+uu_{xz}+\left(\int_z^0\frac{\partial u}{\partial x}\right)u_{zz}-\frac{1}{\varepsilon}v_z+\frac{1}{\varepsilon}\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x}-\mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right)=\nu_1\Delta u_z, \tag{35}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t}+u_zv_x+uv_{xz}-u_xv_z+\left(\int_z^0\frac{\partial u}{\partial x}\right)v_{zz}+\frac{1}{\varepsilon}u_z=\nu_2\Delta v_z, \tag{36}$$

$$\frac{\partial T_z}{\partial t}+u_zT_x+uT_{xz}-u_xT_z+\left(\int_z^0\frac{\partial u}{\partial x}\right)T_{zz}=\nu_3\Delta T_z, \tag{37}$$

$$\frac{\partial S_z}{\partial t}+u_zS_x+uS_{xz}-u_xS_z+\left(\int_z^0\frac{\partial u}{\partial x}\right)S_{zz}=\nu_4\Delta S_z, \tag{38}$$

在(35)式中选 u_z 做为实验函数, 利用相容性条件(34), 我们有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_z\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{\varepsilon'}\int_\Omega v_z u_z + \gamma_1\int_\Omega |\nabla u_z|^2 = -\frac{1}{\varepsilon'}\int_\Omega\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x} - \mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right)u_z + \int_0^1 u_z|_{z=-1}\left(\gamma_1 u_z|_{z=-1} + 2\int_{-1}^0 u_z\omega - \frac{1}{\varepsilon'}\int_{-1}^0 v - \frac{1}{\varepsilon'}\int_{-1}^0 z\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x} - \mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right)\right). \tag{39}$$

令

$$I_1 = \gamma_1\int_0^1 |u_z|_{z=-1}|^2,\quad I_2 = 2\left|\int_0^1 u_z|_{z=-1}\left(\int_{-1}^0 u_z\,\omega\right)\right|,$$

$$I_3 = \left|\frac{1}{\varepsilon'}\int_\Omega\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x} - \mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right)u_z\right|,$$

$$I_4 = \left|\int_0^1 u_z|_{z=-1}\left(\frac{1}{\varepsilon'}\int_{-1}^0 v - \frac{1}{\varepsilon'}\int_{-1}^0 z\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x} - \mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right)\right)\right|.$$

首先,让我们来估计 I_1. 由

$$|u_z|_{z=-1}|^2 = -\int_{-1}^0 \partial_z(u_z^2)\,\mathrm{d}z = -2\int_{-1}^0 u_z u_{zz}\,\mathrm{d}z \leqslant 2\|u_z\|_{L^2_z}\|u_{zz}\|_{L^2_z},$$

可得

$$|u_z|_{z=-1}| \leqslant c\|u_z\|^{1/2}_{L^2_z}\|u_{zz}\|^{1/2}_{L^2_z}. \tag{40}$$

所以

$$I_1 \leqslant \varepsilon\|\nabla u_z\|^2_{L^2(\Omega)} + c\|u_z\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{41}$$

下面,我们来估计 I_2. 由引理 2.1, 我们有

$$\|u_z\|^2_{L^\infty_x L^2_z} \leqslant \|u_z\|_{L^2(\Omega)}\|u_{zx}\|_{L^2(\Omega)},$$

即

$$\|u_z\|^{1/2}_{L^\infty_x L^2_z} \leqslant \|u_z\|^{1/4}_{L^2(\Omega)}\|u_{zx}\|^{1/4}_{L^2(\Omega)}. \tag{42}$$

由 $$\left|\int_{-1}^0 u_z\omega\right| = \left|\int_{-1}^0 u\omega_z\right| \leqslant \|u\|_{L^2_z}\|\omega_z\|_{L^2_z},$$

和 $$\|\omega_z\|^2_{L^2_z} = \int_{-1}^0 \omega_z\omega_z = \int_{-1}^0 u_{zx}\omega \leqslant \|u_{zx}\|_{L^2_2}\|\omega\|_{L^2_z},$$

得到

$$\left|\int_{-1}^0 u_z\omega\right| \leqslant \|u\|_{L^2_z}\|u_{zx}\|^{1/2}_{L^2_z}\|\omega\|^{1/2}_{L^2_z}. \tag{43}$$

由(40)式、(42)式和(43)式,我们有

$$\begin{aligned} I_2 &\leqslant c\int_0^1 \|u_z\|^{1/2}_{L^2_z}\|u_{zz}\|^{1/2}_{L^2_z}\|u\|_{L^2_z}\|u_{zx}\|^{1/2}_{L^2_z}\|\omega\|^{1/2}_{L^2_z} \leqslant \\ &c\|u_z\|^{1/4}_{L^2(\Omega)}\|u_{zx}\|^{1/4}_{L^2(\Omega)}\int_0^1\|\nabla u_z\|_{(L^2_z)^2}\|u\|_{L^2_z}\|\omega\|^{1/2}_{L^2_z} \leqslant \\ &c\|u_z\|^{1/4}_{L^2(\Omega)}\|u_{zx}\|^{1/4}_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_z\|_{(L^2(\Omega))^2}\left(\int_0^1\|u\|^4_{L^2_z}\right)^{1/4}\|\omega\|^{1/2}_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{44}$$

由引理2.1

$$\int_0^1\|u\|^4_{L^2_z} \leqslant \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\|u\|^2_{L^\infty_x L^2_z} \leqslant c\|u\|^3_{L^2(\Omega)}\|u_x\|_{L^2(\Omega)}.$$

得

$$\begin{aligned} I_2 &\leqslant c\|u_z\|^{1/4}_{L^2(\Omega)}\|u_{zx}\|^{1/4}_{L^2(\Omega)}\|\nabla u_z\|_{(L^2(\Omega))^2}\|u\|^{3/4}_{L^2(\Omega)}\|u_x\|^{1/4}_{L^2(\Omega)}\|\omega\|^{1/2}_{L^2(\Omega)} \leqslant \\ &\varepsilon\|\nabla u_z\|^2_{(L^2(\Omega))^2} + c\|u\|^2_{L^2(\Omega)}\|u_x\|^2_{L^2(\Omega)}\|u_z\|^{2/3}_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{45}$$

让我们来估计 I_3,

$$
\begin{aligned}
I_3 = &\left|\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega\left(\mu_1\frac{\partial T}{\partial x}-\mu_2\frac{\partial S}{\partial x}\right)u_z\right| \leqslant \\
&c\|u_z\|_{L^2(\Omega)}^2+\varepsilon\left\|\frac{\partial T}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\varepsilon\left\|\frac{\partial S}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 .
\end{aligned}
\tag{46}
$$

由(40)式,我们有

$$
\begin{aligned}
I_4 \leqslant\ & c\int_0^1\|u_z\|_{L_z^2}^{1/2}\|u_{zz}\|_{L_z^2}^{1/2}\left(\|v\|_{L_z^2}+\left\|\frac{\partial T}{\partial x}\right\|_{L_z^2}+\left\|\frac{\partial S}{\partial x}\right\|_{L_z^2}\right) \leqslant \\
& c\|u_z\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\|\nabla u_z\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\left(\|v\|_{L^2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial T}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)}+\left\|\frac{\partial S}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)}\right) \leqslant \\
& \varepsilon\|\nabla u_z\|_{(L^2(\Omega))^2}^2+c\|u_z\|_{L^2(\Omega)}^2+\varepsilon\|v\|_{L^2(\Omega)}^2+ \\
& \varepsilon\left\|\frac{\partial T}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\varepsilon\left\|\frac{\partial S}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)}^2 .
\end{aligned}
\tag{47}
$$

由(39)式、(41)式和(45)式至(47)式,我们得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_z\|_{L^2(\Omega)}^2-\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega v_z u_z+\gamma_1\int_\Omega|\nabla u_z|^2 \leqslant \\
&\quad 3\varepsilon\|\nabla u_z\|_{(L^2(\Omega))^2}^2+2\varepsilon\left\|\frac{\partial T}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+2\varepsilon\left\|\frac{\partial S}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+ \\
&\quad c\|u_z\|_{L^2(\Omega)}^2+c\|u\|_{L^2(\Omega)}^2\|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2\|u_z\|_{L^2(\Omega)}^{2/3}+\varepsilon\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 .
\end{aligned}
\tag{48}
$$

与(48)式的推导类似,我们可以得到

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v_z\|_{L^2(\Omega)}^2+\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega u_z v_z+\gamma_2\int_\Omega|\nabla v_z|^2 \leqslant \\
&\quad 2\varepsilon\|\nabla v_z\|_{(L^2(\Omega))^2}^2+\varepsilon\|\nabla u_z\|_{(L^2(\Omega))^2}^2+c\|v_x\|_{L^2(\Omega)}^2\|u_z\|_{L^2(\Omega)}^2+ \\
&\quad c\left(\|v_x\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\|v_z\|_{L^2(\Omega)}^2 ,
\end{aligned}
\tag{49}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|T_z\|_{L^2(\Omega)}^2+\gamma_3\int_\Omega|\nabla T_z|^2 \leqslant \\
&\quad \varepsilon\|\nabla u_z\|_{(L^2(\Omega))^2}^2+2\varepsilon\|\nabla T_z\|_{(L^2(\Omega))^2}^2+c\|T_x\|_{L^2(\Omega)}^2\|u_z\|_{L^2(\Omega)}^2+ \\
&\quad c\left(\|T_x\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u\|_{L^2(\Omega)}^2\|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\|T_z\|_{L^2(\Omega)}^2 ,
\end{aligned}
\tag{50}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|S_z\|_{L^2(\Omega)}^2+\gamma_4\int_\Omega|\nabla S_z|^2 \leqslant \\
&\quad \varepsilon\|\nabla u_z\|_{(L^2(\Omega))^2}^2+2\varepsilon\|\nabla S_z\|_{(L^2(\Omega))^2}^2+c\|S_x\|_{L^2(\Omega)}^2\|u_z\|_{L^2(\Omega)}^2+ \\
&\quad c\left(\|S_x\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u\|_{L^2(\Omega)}^2\|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\|S_z\|_{L^2(\Omega)}^2 .
\end{aligned}
\tag{51}
$$

由(48)式至(51)式和 Poincar 不等式,我们得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|u_z\|_{L^2(\Omega)}^2+\|v_z\|_{L^2(\Omega)}^2+\|T_z\|_{L^2(\Omega)}^2+\|S_z\|_{L^2(\Omega)}^2\right)+ \\
&\quad \frac{1}{2}\min\{\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\gamma_4\}\left(\int_\Omega|\nabla u_z|^2+\int_\Omega|\nabla v_z|^2+\right. \\
&\quad \left.\int_\Omega|\nabla T_z|^2+\int_\Omega|\nabla S_z|^2\right) \leqslant \\
&\quad c\|u\|_{L^2(\Omega)}^2\|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2\|u_z\|_{L^2(\Omega)}^{2/3}+c\left(\|v_x\|_{L^2(\Omega)}^2+\|S_x\|_{L^2(\Omega)}^2+\right. \\
&\quad \left.\|T_x\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\|u_z\|_{L^2(\Omega)}^2+c\left(\|v_x\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\|v_z\|_{L^2(\Omega)}^2+ \\
&\quad c\left(\|T_x\|_{L^2(\Omega)}^2+\|u\|_{L^2(\Omega)}^2\|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\|T_z\|_{L^2(\Omega)}^2+c\left(\|S_x\|_{L^2(\Omega)}^2+\right. \\
&\quad \left.\|u\|_{L^2(\Omega)}^2\|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\|S_z\|_{L^2(\Omega)}^2+c\|u_z\|_{L^2(\Omega)}^2+\varepsilon\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 .
\end{aligned}
\tag{52}
$$

因此

$$
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|U_z\|_{L^2(\Omega)}^2 + c\int_\Omega|\nabla U_z|^2 \leqslant
\xi_1(t)\|U_z\|_{L^2(\Omega)}^{2/3} + \xi_2(t)\|U_z\|_{L^2(\Omega)}^2 + c\|U_z\|_{L^2(\Omega)}^2 + \xi_3(t), \tag{53}
$$

其中

$$
\xi_1(t) = c\|u\|_{L^2(\Omega)}^2\|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2,
$$

$$
\xi_2(t) = c(\|U_x\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2\|u_x\|_{L^2(\Omega)}^2),
$$

$$
\xi_3(t) = \varepsilon\|v\|_{L^2(\Omega)}^2.
$$

由(32)式和(33)式,我们知道

$$
\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3 \in L^1(0,\ +\infty).
$$

由引理2.2和Poincaré不等式,我们可以推得

$$
\partial_z u,\ \partial_z v,\ \partial_z T,\ \partial_z S \in L^\infty(0,\ \infty; L^2(\Omega)) \cap L^2(0,\ \infty; H^1(\Omega)). \tag{54}
$$

弱强解唯一性的证明　设 $U_1 = (u_1, v_1, T_1, S_1)$, $U_2 = (u_2, v_2, T_2, S_2)$ 为系统(Ⅰ)的两个弱强解,我们有

$$
\frac{\partial(u_1 - u_2)}{\partial t} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} - u_2\frac{\partial u_2}{\partial x} + \omega_1\frac{\partial u_1}{\partial z} - \omega_2\frac{\partial u_2}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon}(v_1 - v_2) -
\frac{1}{\varepsilon}\int_z^0\left(\mu_1\frac{\partial T_1}{\partial x} - \mu_2\frac{\partial S_1}{\partial x}\right) + \frac{1}{\varepsilon}\int_z^0\left(\mu_1\frac{\partial T_2}{\partial x} - \mu_2\frac{\partial S_2}{\partial x}\right) = \nu_1\Delta(u_1 - u_2), \tag{55}
$$

$$
\frac{\partial(v_1 - v_2)}{\partial t} + u_1\frac{\partial v_1}{\partial x} - u_2\frac{\partial v_2}{\partial x} + \omega_1\frac{\partial v_1}{\partial z} - \omega_2\frac{\partial v_2}{\partial z} + \frac{1}{\varepsilon}(u_1 - u_2) =
\nu_2\Delta(v_1 - v_2), \tag{56}
$$

$$
\frac{\partial(T_1 - T_2)}{\partial t} + u_1\frac{\partial T_1}{\partial x} - u_2\frac{\partial T_2}{\partial x} + \omega_1\frac{\partial T_1}{\partial z} - \omega_2\frac{\partial T_2}{\partial z} = \nu_3\Delta(T_1 - T_2), \tag{57}
$$

$$
\frac{\partial(S_1 - S_2)}{\partial t} + u_1\frac{\partial S_1}{\partial x} - u_2\frac{\partial S_2}{\partial x} + \omega_1\frac{\partial S_1}{\partial z} - \omega_2\frac{\partial S_2}{\partial z} = \nu_4\Delta(S_1 - S_2), \tag{58}
$$

在(55)式中选 $u_1 - u_2$ 做实验函数,我们得

$$
\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \nu_1\int_\Omega|\nabla(u_1 - u_2)|^2 =
-\int_\Omega(\omega_1 - \omega_2)(u_1 - u_2)\partial_z u_2 - \int_\Omega(u_1 - u_2)^2\partial_x u_2 +
\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega(v_1 - v_2)(u_1 - u_2) +
\frac{1}{\varepsilon}\int_\Omega\left(\int_z^0\left(\mu_1\frac{\partial(T_1 - T_2)}{\partial x} - \mu_2\frac{\partial(S_1 - S_2)}{\partial x}\right)\right)(u_1 - u_2). \tag{59}
$$

利用引理2.1,我们可以得到

$$
\left|\int_\Omega(\omega_1 - \omega_2)(u_1 - u_2)\partial_z u_2\right| \leqslant
\|\omega_1 - \omega_2\|_{L_x^2L_z^\infty}\|u_1 - u_2\|_{L_x^\infty L_z^2}\|\partial_z u_2\|_{L^2(\Omega)} \leqslant
\|\partial_z(\omega_1 - \omega_2)\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\|\omega_1 - \omega_2\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \times
\|\partial_x(u_1 - u_2)\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\|\partial_z u_2\|_{L^2(\Omega)} \leqslant
\varepsilon\|\partial_x(u_1 - u_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 + c\|\partial_z u_2\|_{L^2(\Omega)}^4\|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{60}
$$

$$
\left|\int_\Omega(u_1 - u_2)^2\partial_x u_2\right| \leqslant
\|u_1 - u_2\|_{L_x^2L_z^\infty}\|u_1 - u_2\|_{L_x^\infty L_z^2}\|\partial_x u_2\|_{L^2(\Omega)} \leqslant
$$

$$\|\partial_z(u_1-u_2)\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\times$$
$$\|\partial_x(u_1-u_2)\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\|\partial_x u_2\|_{L^2(\Omega)}\leqslant$$
$$\varepsilon\|\nabla(u_1-u_2)\|_{(L^2(\Omega))^2}^2+c\|\partial_x u_2\|_{L^2(\Omega)}^2\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{61}$$

由 Hölder 不等式和 Young 不等式, 我们有

$$\left|\frac{1}{\varepsilon'}\int_\Omega\left(\int_z^0\left(\mu_1\frac{\partial(T_1-T_2)}{\partial x}-\mu_2\frac{\partial(S_1-S_2)}{\partial x}\right)\right)(u_1-u_2)\right|\leqslant$$
$$\varepsilon\left\|\frac{\partial(T_1-T_2)}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\varepsilon\left\|\frac{\partial(S_1-S_2)}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+c\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{62}$$

由(59)式至(62)式, 我们可得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)}^2+\gamma_1\int_\Omega|\nabla(u_1-u_2)|^2-\frac{1}{\varepsilon'}\int_\Omega(v_1-v_2)(u_1-u_2)\leqslant$$
$$2\varepsilon\|\nabla(u_1-u_2)\|_{(L^2(\Omega))^2}^2+\varepsilon\left\|\frac{\partial(T_1-T_2)}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+\varepsilon\left\|\frac{\partial(S_1-S_2)}{\partial x}\right\|_{L^2(\Omega)}^2+$$
$$c(\|\partial_z u_2\|_{L^2(\Omega)}^4+\|\partial_x u_2\|_{L^2(\Omega)}^2)\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)}^2+c\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{63}$$

与(63)式的推导类似, 我们可以得到

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|v_1-v_2\|_{L^2(\Omega)}^2+\gamma_2\int_\Omega|\nabla(v_1-v_2)|^2+\frac{1}{\varepsilon'}\int_\Omega(u_1-u_2)(v_1-v_2)\leqslant$$
$$2\varepsilon\|\nabla(u_1-u_2)\|_{(L^2(\Omega))^2}^2+2\varepsilon\|\nabla(v_1-v_2)\|_{(L^2(\Omega))^2}^2+$$
$$c\|\partial_x v_2\|_{L^2(\Omega)}^2\|v_1-v_2\|_{L^2(\Omega)}^2+$$
$$c\|\partial_x v_2\|_{L^2(\Omega)}^2\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)}^2+c\|\partial_z v_2\|_{L^2(\Omega)}^4\|v_1-v_2\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{64}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|T_1-T_2\|_{L^2(\Omega)}^2+\gamma_3\int_\Omega|\nabla(T_1-T_2)|^2\leqslant$$
$$2\varepsilon\|\nabla(T_1-T_2)\|_{(L^2(\Omega))^2}^2+3\varepsilon\|\partial_x(u_1-u_2)\|_{L^2(\Omega)}^2+$$
$$c\|\partial_x T_2\|_{L^2(\Omega)}^2\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)}^2+$$
$$c(\|\partial_z T_2\|_{L^2(\Omega)}^4+\|\partial_x T_2\|_{L^2(\Omega)}^2)\|T_1-T_2\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{65}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|S_1-S_2\|_{L^2(\Omega)}^2+\gamma_3\int_\Omega|\nabla(S_1-S_2)|^2\leqslant$$
$$2\varepsilon\|\nabla(S_1-S_2)\|_{(L^2(\Omega))^2}^2+3\varepsilon\|\partial_x(u_1-u_2)\|_{L^2(\Omega)}^2+$$
$$c\|\partial_x S_2\|_{L^2(\Omega)}^2\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)}^2+$$
$$c(\|\partial_z S_2\|_{L^2(\Omega)}^4+\|\partial_x S_2\|_{L^2(\Omega)}^2)\|S_1-S_2\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{66}$$

由(33)式和(54)式, 我们可以知道

$$\|\partial_x u_2\|_{L^2(\Omega)}^2,\ \|\partial_x v_2\|_{L^2(\Omega)}^2,\ \|\partial_x S_2\|_{L^2(\Omega)}^2,\ \|\partial_x T_2\|_{L^2(\Omega)}^2\in L^1(0,+\infty),$$
$$\|\partial_z u_2\|_{L^2(\Omega)}^4,\ \|\partial_z v_2\|_{L^2(\Omega)}^4,\ \|\partial_z S_2\|_{L^2(\Omega)}^4,\ \|\partial_z T_2\|_{L^2(\Omega)}^4\in L^1(0,+\infty). \tag{67}$$

由(63)式至(67)式, 利用 Gronwall 不等式, 我们得

$$\|u_1-u_2\|_{L^2(\Omega)}^2,\ \|v_1-v_2\|_{L^2(\Omega)}^2,\ \|T_1-T_2\|_{L^2(\Omega)}^2,\ \|S_1-S_2\|_{L^2(\Omega)}^2=0,$$

即, 整体弱强解 $U=(u,v,T,S)$ 是唯一的.

[参 考 文 献]

[1] Lions J L, Teman R, Wang S. New formulations of the primitive equations of atmosphere and applications[J]. Nonlinearity, 1992, **5**: 237-288.

[2] Lions J L, Teman R, Wang S. On the equations of the large scale ocean[J]. Nonlinearity, 1992, **5**: 1007-1053.

[3] Lions J L, Teman R, Wang S. Models of the coupled atmosphere and ocean(CAO I)[J]. Computational Mechanics Advance, 1993, **1**: 1-54.

[4] Lions J L, Teman R, Wang S. Mathematical theory for the coupled atmosphere-ocean models(CAO Ⅲ)[J]. J Math Pures Appl, 1995, **74**: 105-163.

[5] Wang S. On the 2D model of large-scale atmosphic motion: well-posedness and attractors[J]. Nonlinear Anal, TMA, 1992, **18**: 17-60.

[6] Bresch D, Guill n-Gonzûlez F, Masmoudi N, et al. On the uniqueness for the two-dimensional primitive equations[J]. Diff Int Equ, 2003, **16**(1): 77-94.

[7] Bresch D, Kazhikhov A, Lemoine J. On the two-dimensional hydrostatic Navier-Stokes equations[J]. SIAM J Math Anal, 2004, **36**(3): 796-814.

[8] Guill n-Gonzûlez F, Masmoudi N, Rodr guez-Bellido M A. Anisotropic estimates and strong solutions for the primitive equations[J]. Diff Int Equ, 2001, **14**(11): 1381-1408.

[9] Petcu M, Temam R, Wirosoetisno D. Existence and regularity results for the primitive equations in the two dimensions[J]. Comm on Pure and Appl Anal, 2004, **3**(1): 115-131.

[10] 黄代文, 郭柏灵, 关于海洋动力学中二维的大尺度原始方程组(Ⅱ)[J]. 应用数学和力学, 2007, **28**(5): 532-538.

[11] Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics[M]. 2nd Edition. Berhn/New York: Springer-Verlag, 1987.

[12] Washington W M, Parkinson C L. An Introduction to Three-Dimensional Climate Modelling[M]. England: Oxford Univ Press, 1986.

[13] Lions J L. Quelques M thodes de R solutions Des Probl mes aux Limites Nonlin aires[M]. Paris: Dunod, 1969.

[14] Teman R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics[M]. Appl Math Ser Vol **68**. 2nd Edition. Berlin: Springer-Verlag, 1997.

On the Two-Dimensional Large-Scale Primitive Equations in Oceanic Dynamics (Ⅰ)

HUANG Dai-wen[1,2], GUO Bo-ling[1]

(Institute of Applied Physics and Computational Mathematics,

Beijing 100088, P.R.China;

2. Graduate School, China Academy of Engineering Physics, Beijing 100088, P.R.China)

Abstract: The initial boundary value problem for the two-dimensional primitive equations of large-scale oceanic motion in geophysics is considered. It was assumed that the depth of the ocean is a positive constant. First, if the initial data are square integrable, then, by Fadeo-Galerkin method, the existence of the global weak sohctions for the problem was obtained. Second, if the initial data and their vertical derivatives are all square integrable, then by Faedo-Galerkin method and anisotropit inequahites, the existerce and uniqueness of the global weakly strong solution for the above initial boundary problem was obtained.

Key words: primitive equations of the ocean; global weakly strong solution; existence; uniqueness