

具有两个弛豫时间的热弹性立方晶体 材料中平面波的传播*

R·库玛¹, M·辛

(1. 库卢谢特拉大学 数学系, 库卢谢特拉 136119, 印度;
2. S. U. S. 公立学院 数学系, 哈里亚纳, 卡纳纳尔, 印度)

(皓江推荐)

摘要: 研究具有两个弛豫时间的、两个不同弹性和热性质的、广义传热立方晶体固体半空间的有缺陷结合面上, 热弹性平面波的反射和折射问题. 具有两个弛豫时间的广义热弹性理论, 是 1972 年由 Green 和 Lindsay 提出并应用于问题的研究. 对有缺陷边界, 给出了反射系数和折射系数(即反射波和折射波振幅与入射波振幅之比)的表达式, 并推演了法向刚性边界、横向刚性边界、接触传热边界、滑动边界和结合面边界时的表达式. 给出了在不同边界条件及出射角时, 不同的反射波和折射波的振幅比, 在不同的入射波时的变化图. 发现反射波和折射波振幅比受到介质刚性和热性质的影响.

关键词: 广义热弹性; 法向刚度; 横向刚度; 接触传热; 立方晶体; 振幅比
中图分类号: O343.6 **文献标识码:** A

引 言

一个理想的边界界面, 横跨该面上的牵引力和位移是连续的. 因此, 在两个不同弹性介质的一个理想边界界面的邻域求解谐波问题时, 一个介质中的波解, 必须通过界面条件与另一个介质中的波解相匹配. 将这样一个概念拓展到一个有缺陷的结合界面时, 横跨界面的位移和温度不再是连续的. 本文研究有缺陷的结合界面, 这就意味着位移有小的位移矢量差, 线性依赖牵引力矢量, 并造成两种介质中的温度分布不再相同, 而与该处的热通量成正比.

Jones 和 Whittier^[1]引入了与横向和法向刚度系数等价的应力和位移的边界条件. Murty^[2]讨论了一个类似的问题, 用一个横向条件来描述粘结层. Nayfeh 和 Nassar^[3]引入了惯性, 而不是与边界面上位移和应力相关的刚度因子. Schoenberg^[4]利用横向和法向刚度讨论了一个薄的粘结界面层. Rokhlin 等人^[5]提出了界面波的渐近方程. Rokhlin^[6]引入了多层界面的有效剪切模量来讨论界面的性质. Pilarski 和 Rose^[7]利用横向刚度的边界条件, 来研究超声波和粘

* 收稿日期: 2006-02-16; 修订日期: 2007-02-06

基金项目: 印度 CSIR 资助项目

作者简介: R·库玛, 教授, 博士(联系人, Tel: + 91-6416-120992; E-mail: rajneesh_kuk@rediffmail.com);

M·辛(E-mail: manjeet_kuk@indiatimes.com).

本文原文为英文, 吴承平译, 张禄坤校.

结界面层的相互作用.

Baik 和 Thompson^[8] 讨论了一个含有裂纹的物理缺陷的界面. 为了求得界面刚度, 他们引入了一个全新的准静态模型, 利用已知的含裂纹弹性体的静态解定义界面刚度, 并且将刚度和界面惯性加入到计算中. Achenbach 和他的合作者^[9] 研究了有缺陷界面弹性波的绕射问题. Cheng 等人^[10] 发展了多层弱粘结合界面各向异性板理论. Lavrentyev 和 Rokhlin^[11] 研究了两个弹性固体半空间有缺陷界面的边界条件. Cheng、He 和 Kitipomchai^[12] 讨论了有缺陷界面对层状复合材料壳的弯曲和振动的影响. Chen 等人^[13] 在表面带有压电弹性层作为作动器和传感器的柱形弯曲中, 求得了有缺陷斜交铺设层合矩形板的基准解. Chen、Wang、Cai 和 Ye^[14] 对正交铺设弱粘结合柱形板进行了三维分析. Chen、Cai 和 Ye^[15] 在柱形弯曲中, 讨论了具有粘结合界面的正交铺设层合板的响应. Chen 和 Lee^[16] 在弱粘结合柱形弯曲中, 给出了斜交铺设压电层合柱形板的基准解.

在经典热弹性理论中, 当均匀各向同性弹性固体受热扰动时, 即使距热源无限远处, 其作用也是瞬间发生. 也就是说, 热波传播速度是无限大的, 这在物理上是不可能的. 为了纠正这一谬误, 发展了非经典理论, 即熟知的广义热弹性理论. Lord 和 Shulman^[17], 将热通量率项加入 Fourier 定律, 构造了一个广义理论, 包括双曲型传热方程和热作用的有限速率. Green 和 Lindsay^[18] 将温度变化率包括在本构变量中, 发展成一个依赖于热弹性的温度变化率, 注意到物体的对称中心, 这并不违背经典的 Fourier 定律, 该理论也表明热传播速度是有限的. 按照这一理论, 热传播是波现象而不是扩散现象. Dhaliwal 和 Sherief^[19] 将广义热弹性理论^[17] 推广到各向异性介质. 众多作者在这两个理论中做了有意义的工作. 值得关注的是, Deresiewicz^[20-21], A. N. Sinha 和 S. B. Sinha^[22], Beevers 和 Bree^[23], Sharma^[24], Sinha 和 Elsibai^[25], S. B. Sinha 和 Elsibai^[26], Singh 和 Kumar^[27-29], Abd-Alla 和 Al-Dawry^[30], Singh^[31], Singh^[32], Kumar 和 Sharma^[33] 等人的工作.

Herneke II^[34], Velasco 和 Garcia-Moliner^[35], Atalar^[36], Sharma 和 Singh^[37], Kumar 和 Rani^[38-39], Kumar 和 Ailawalia^[40-41] 也对各向异性介质的研究作出了贡献.

本文研究, 有两个驰豫时间的立方晶体传热介质中, 热弹性平面波的反射和折射, 并对几种值得关心的情况进行了推演.

1 基本方程和问题的描述

考虑两个相互接触的、均匀传热的、立方晶体固体的半空间, 取相互接触面为直角坐标系 $Oxyz$ 中的 $z = 0$ 平面. 我们讨论 xz - 平面上的热弹性平面波, 波阵面平行于 y - 轴, 并且所有的场变量仅与 x 、 z 和 t 有关.

设位移矢量为 $\mathbf{u} = (u, 0, w)$, 温度为 $T(x, z, t)$, 按照 Dhaliwal 和 Sherief^[19] 和 Green 和 Lindsay^[18] 的工作, 当不计体力和热源时, 广义热弹性立方晶体材料的场方程和本构关系可写为

$$c_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_{44} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (c_{12} + c_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} - \beta \frac{\partial}{\partial x} \left(T + t_1 \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$c_{44} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (c_{12} + c_{44}) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} - \beta \frac{\partial}{\partial z} \left(T + t_1 \frac{\partial T}{\partial t} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (2)$$

$$K^* \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = \rho C^* \left[\frac{\partial T}{\partial t} + t_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right] + T_0 \beta \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (3)$$

$$\sigma_{zz} = c_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + c_{11} \frac{\partial w}{\partial z} - \beta \left[T + t_1 \frac{\partial T}{\partial t} \right], \quad \sigma_{zx} = c_{44} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right], \quad (4)$$

其中 c_{ij} 为等温弹性参数, ρ 为密度, C^* 为常应变比热比, t 为时间, T 为绝对温度, T_0 为初始常温, u, w 为位移矢量分量, σ_{ij} 为应力张量分量, t_0, t_1 为弛豫时间, $\beta = (c_{11} + 2c_{12}) \alpha_1$, α_1 为线热膨胀系数, K^* 为传热系数.

2 反射和折射

设通过介质 M , 从 $z > 0$ 区域向 $z = 0$ 平面入射的热弹性平面波(准纵波(QL)或准横波(QT)或准热波(T模式)), 其传播方向与界面成 θ_0 角. 与每一入射波相对应, 给出介质 M 中反射的QL波、QT波和T模式波, 以及介质 M' 中折射的QL波、QT波和T模式波. 记 $z > 0$ 区域(M 介质)中的所有变量不带“'”号, $z < 0$ 区域(M' 介质)中的变量带“'”号. 见图1.

3 问题的解

位移分量 u 和 w 与势函数 ϕ 和 ψ 间的关系为

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5)$$

将方程(5)中的 u 和 w 代入方程(1)至方程(3), 得

$$c_1^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \beta \left[T + t_1 \frac{\partial T}{\partial t} \right] = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (6)$$

$$c_3^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + c_4^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (7)$$

$$K^* \dots T = C^* \left[\frac{\partial T}{\partial t} + t_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \right] +$$

$$T_0 \beta \frac{\partial}{\partial t} \dots \phi, \quad (8)$$

其中

$$K^* = \frac{K^*}{\rho}, \quad \beta = \frac{\beta}{\rho}, \quad c_1^2 = \frac{c_{11}}{\rho}, \quad c_2^2 = \frac{c_{12} + 2c_{44}}{\rho},$$

$$c_3^2 = \frac{c_{11} - c_{12} - c_{44}}{\rho}, \quad c_4^2 = \frac{c_{44}}{\rho}, \quad \dots = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial z^2}.$$

消去方程(6)和方程(8)中的 T , 得

$$\left[K^* \dots - C^* \left[\frac{\partial}{\partial t} + t_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] \right] \left[c_1^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right] = T_0 \beta^2 \left[1 + t_1 \frac{\partial}{\partial t} \right] \frac{\partial}{\partial t} \dots \phi, \quad (9)$$

为求解方程(9)和方程(7), 我们设

$$\phi = f(z) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (10)$$

$$\psi = g(z) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (11)$$

其中 k 为波数, ω 为频率.

利用方程(10)和方程(11), 方程(9)和方程(7)简化为

$$\left[\frac{d^4}{dz^4} + A \frac{d^2}{dz^2} + B \right] f(z) = 0, \quad (12)$$

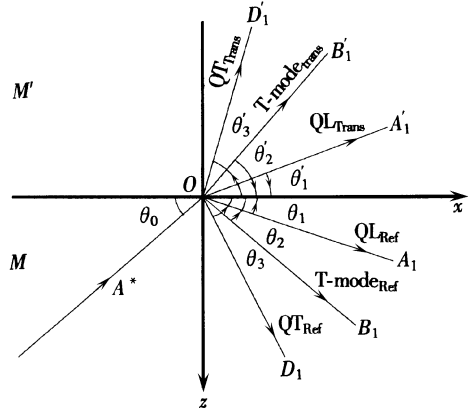


图1 问题的几何描述

$$\left[\frac{d^2}{dz^2} - \lambda_3^2 \right] g(z) = 0, \quad (13)$$

其中

$$A = \frac{\omega^2}{c_2^2} - k^2 \left[\frac{c_1^2}{c_2^2} + 1 \right] + \frac{i\omega C^*}{K^*} [(1 - i\tau_0) + \epsilon(1 - i\tau_1)], \quad (14)$$

$$B = \frac{k^2}{c_2^2} (k^2 c_1^2 - \omega^2) + \frac{i\omega C^*}{K^*} \left[(1 - i\tau_0) \left[\frac{-k^2 c_1^2 + \omega^2}{c_2^2} \right] - \epsilon k^2 (1 - i\tau_1) \right], \quad (15)$$

$$\lambda_3 = \left[\frac{k^2 c_3^2 - \omega^2}{c_4^2} \right]^{1/2}, \quad (16)$$

且 $\epsilon = \frac{T_0 \beta^2}{C^* c_2^2}$, $\tau_0 = t_0 \omega$, $\tau_1 = t_1 \omega$.

由方程(12)和方程(13),我们得到 $f(z)$ 和 $g(z)$,然后代入方程(10)和方程(11),导得介质 M 中的势函数为

$$\phi = (A_0 e^{\lambda_1 z} + A_1 e^{-\lambda_1 z} + B_0 e^{\lambda_2 z} + B_1 e^{-\lambda_2 z}) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (17)$$

$$\psi = (D_0 e^{\lambda_3 z} + D_1 e^{-\lambda_3 z}) e^{i(kx - \omega t)}. \quad (18)$$

其中 $\lambda_{1,2} = \left[\frac{(-A \pm \sqrt{A^2 - 4B})}{2} \right]^{1/2}$,

$A_0, A_1, B_0, B_1, D_0, D_1$ 为任意常数.

将(17)式代入(6)式,得

$$T = (a_1 A_0 e^{\lambda_1 z} + a_1 A_1 e^{-\lambda_1 z} + a_2 B_0 e^{\lambda_2 z} + a_2 B_1 e^{-\lambda_2 z}) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (19)$$

其中 $a_l = \frac{-k^2 c_l^2 + \omega^2 + c_2^2 \lambda_l^2}{\beta(1 - i\tau_l)}$ ($l = 1, 2$).

类似地,可得到介质 M' 中的势函数:

$$\phi' = (A_1' e^{\lambda_1' z} + B_1' e^{\lambda_2' z}) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (20)$$

$$\psi' = (D_1' e^{\lambda_3' z}) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (21)$$

$$T' = (a_1' A_1' e^{\lambda_1' z} + a_2' B_1' e^{\lambda_2' z}) e^{i(kx - \omega t)}, \quad (22)$$

其中

当入射波为 QL 波时, $B_0, D_0 = 0$;

当入射波为 QT 波时, $A_0, B_0 = 0$;

当入射波为 F 模式波时, $A_0, D_0 = 0$.

Snell 定律为

$$\frac{\cos \theta_0}{V_0} = \frac{\cos \theta_1}{\lambda_1^{-1}} = \frac{\cos \theta_2}{\lambda_2^{-1}} = \frac{\cos \theta_3}{\lambda_3^{-1}} = \frac{\cos \theta_1'}{\lambda_1'^{-1}} = \frac{\cos \theta_2'}{\lambda_2'^{-1}} = \frac{\cos \theta_3'}{\lambda_3'^{-1}} = \frac{1}{c} \quad (23)$$

其中

$$V_0 = \begin{cases} \lambda_1^{-1}, & \text{入射 QL 波,} \\ \lambda_2^{-1}, & \text{入射 F 模式波,} \\ \lambda_3^{-1}, & \text{入射 QT 波.} \end{cases}$$

4 有缺陷时的边界条件

如果粘结层有缺陷,且缺陷的大小和缺陷间的距离较波长小得多,则界面上的缺陷可用弹

$$Y_1 = -a_{13}, Y_2 = a_{23}, Y_3 = a_{33}, Y_4 = a_{43}, Y_5 = -a_{53}, Y_6 = a_{63}. \quad (29)$$

对入射的 T 模式波, $A^* = B_0$,

$$Y_1 = a_{12}, Y_2 = -a_{22}, Y_3 = -a_{32}, Y_4 = -a_{42}, Y_5 = a_{52}, Y_6 = a_{62}. \quad (30)$$

Z_1, Z_2, Z_3 分别为反射的 QL 波、T 模式波和 QT 波的振幅比, Z_4, Z_5, Z_6 分别为折射的 QL 波、T 模式波和 QT 波的振幅比.

5 推 论

5.1 法向刚性

在(24)式给出的边界条件下,若 $K_n \neq 0, K_t \rightarrow \infty, K_c \rightarrow \infty$, 则有缺陷边界相当于法向刚性边界情况,这意味着应力、位移和温度分布的剪切分量是连续的. 由(25)式得到 6 个非齐次方程组成的方程组,其中变量 $a_{2j}, a_{3j}(j = 1, 2, \dots, 6)$ 为

$$\begin{aligned} a_{21} &= ik, a_{22} = ik, a_{23} = \lambda_3, a_{24} = -ik, a_{25} = -ik, a_{26} = \lambda_3, \\ a_{31} &= a_1, a_{32} = a_2, a_{34} = -a_1, a_{35} = -a_2. \end{aligned}$$

5.2 横向刚性

在(24)式给出的边界条件下,若 $K_n \rightarrow \infty, K_t \neq 0, K_c \rightarrow \infty$, 则有缺陷界面又变为横向刚性边界情况,这意味着应力、位移和温度分布的法向分量是连续的. 由(25)式得到 6 个非齐次方程组成的方程组,其中变量 $a_{1j}, a_{3j}(j = 1, 2, \dots, 6)$ 为

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\lambda_1, a_{12} = -\lambda_2, a_{13} = ik, a_{14} = -\lambda_1, a_{15} = -\lambda_2, a_{16} = -ik, \\ a_{31} &= a_1, a_{32} = a_2, a_{34} = -a_1, a_{35} = -a_2. \end{aligned}$$

5.3 热的接触传导

在(24)式给出的边界条件下,若 $K_n \rightarrow \infty, K_t \rightarrow \infty, K_c \neq 0$, 则有缺陷界面变为热接触传导情况,意味着位移、应力是连续的,温度分布是不连续. 由(25)式得到 6 个非齐次方程组成的方程组,其中变量 $a_{1j}, a_{2j}(j = 1, 2, \dots, 6)$ 修正为

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\lambda_1, a_{12} = -\lambda_2, a_{13} = ik, a_{14} = -\lambda_1, a_{15} = -\lambda_2, a_{16} = -ik, \\ a_{21} &= ik, a_{22} = ik, a_{23} = \lambda_3, a_{24} = -ik, a_{25} = -ik, a_{26} = \lambda_3. \end{aligned}$$

5.4 滑动边界

若 $K_n \rightarrow \infty, K_t \rightarrow 0, K_c \rightarrow \infty$, 则有缺陷边界就是滑动边界,这时应力和位移的法向分量是连续的,界面横断面上应力和位移的剪切分量变为 0. 由(25)式得到 6 个非齐次方程组成的方程组,其中 $a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}, a_{5j}(i = 1, 2, \dots, 6; j = 4, \dots, 6)$ 为

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\lambda_1, a_{12} = -\lambda_2, a_{13} = ik, a_{14} = -\lambda_1, a_{15} = -\lambda_2, a_{16} = -ik, \\ a_{21} &= a_{22} = a_{23} = 0, a_{24} = 2ik\lambda_1c'_{44}, a_{25} = 2ik\lambda_2c'_{44}, a_{26} = -c'_{44}(k^2 + \lambda_3^2), \\ a_{31} &= a_1, a_{32} = a_2, a_{34} = -a_1, a_{35} = -a_2, a_{54} = a_{55} = a_{56} = 0. \end{aligned}$$

5.5 结合面

此时,垂直于界面的应力、位移和温度分布都是连续的. 即(24)式中若 $K_n \rightarrow \infty, K_t \rightarrow \infty, K_c \rightarrow \infty$, 则有缺陷边界条件成为结合面边界条件. 由(25)式得到 6 个非齐次方程组成的方程组,其中 $a_{1i}, a_{2i}, a_{3i}(i = 1, 2, \dots, 6)$ 的值取为下形式

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\lambda_1, a_{12} = -\lambda_2, a_{13} = ik, a_{14} = -\lambda_1, a_{15} = -\lambda_2, a_{16} = -ik, \\ a_{21} &= ik, a_{22} = ik, a_{23} = \lambda_3, a_{24} = ik, a_{25} = -ik, a_{26} = \lambda_3, \\ a_{31} &= a_1, a_{32} = a_2, a_{34} = -a_1, a_{35} = -a_2. \end{aligned}$$

5.6 无应力绝热边界

当 $K_n \rightarrow 0, K_t \rightarrow 0, K_c \rightarrow 0$ 时, 导得无应力绝热边界条件的结果, 边界上应力分量为 0, 相应的结果为

$$\sum_{j=1}^3 b_{ij} Z_j = Y_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad (31)$$

其中

$$\begin{aligned} b_{1l} &= -k^2 c_{12} + \lambda c_{11} - \beta(1 - i\tau_1) a_l \quad (l = 1, 2), \\ b_{13} &= -ik \lambda_3 (c_{12} - c_{11}), \quad b_{2l} = 2ik \lambda c_{44} \quad (l = 1, 2), \\ b_{23} &= c_{44} (k^2 + \lambda_3^2), \quad b_{3l} = a_l \lambda \quad (l = 1, 2), \\ b_{33} &= 0, \end{aligned}$$

且 $Z_1 = \frac{A_1}{A^*}, Z_2 = \frac{B_1}{A^*}, Z_3 = \frac{D_1}{A^*}.$

对入射的 QL 波, $A^* = A_0,$

$$Y_1 = -b_{11}, \quad Y_2 = b_{21}, \quad Y_3 = b_{31}.$$

对入射的 QT 波, $A^* = D_0,$

$$Y_1 = b_{13}, \quad Y_2 = -b_{23}, \quad Y_3 = b_{33}.$$

对入射的 T 模式波, $A^* = B_0,$

$$Y_1 = -b_{12}, \quad Y_2 = b_{22}, \quad Y_3 = b_{32}.$$

Z_1, Z_2, Z_3 分别为反射的 QL 波、T 模式波和 QT 波的振幅比.

6 特殊情况

下面讨论几种的特殊情况界面:

(a) 设

$$c'_{11} = \lambda' + 2\mu', \quad c'_{12} = \lambda', \quad c'_{44} = \mu', \quad (32)$$

则得到有两个弛豫时间的热弹性各向同性固体和有两个弛豫时间的热弹性立方晶体介质界面的相应结果.

(b) 在情况(a)中(即(32)式), 取 $\mu' \rightarrow 0$, 则得到有两个弛豫时间的传热非粘性流体和有两个弛豫时间的热弹性立方晶体介质界面的相应结果. 固体通过导热面传热, 而液体通过对流传热. 即是说, $z = 0$ 处的热通量满足边界条件 $(K^{*'} \partial T' / \partial z) = h_c (T - T')$, h_c 为界面上的传热系数. 因此, 在(24)式给出的边界条件(iii)中, 只需用 h_c 替换 K_c , 就得到相应的结果.

(c) 在情况(a)中, 设介质 M 中的 $c_{11} = \lambda + 2\mu, c_{12} = \lambda, c_{44} = \mu$, 就导得有两个弛豫时间的热弹性各向同性固体和有两个弛豫时间的热弹性各向同性固体介质界面的相应结果.

(d) 取 $c'_{11} = K' - i4\omega\eta/3, c'_{12} = K' + i2\omega\eta/3, c'_{44} = -i\omega\eta$, 这里 K' 为体积弹性模量, η 为粘度. 我们得到有两个弛豫时间的传热粘性液体和有两个弛豫时间的热弹性立方晶体介质界面的相应结果.

所有这些特殊情况都可以归并为法向刚性、横向刚性、接触传热、滑动边界和结合面问题, 可用前面第5节的方法计算.

7 数值结果和讨论

为了图示前节得到的理论结果, 本节给出一些数值结果, 以研究刚性对各种反射波和折射

波振幅比 $|Z_i|$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) 的影响. 其出射角为 θ_0 , 入射波包括 QL 波、QT 波和 T 模式波. 我们选用固体氦(介质 M) 和钴(介质 M') 的单晶体进行研究, 其物理参数见表 1^[42].

表 1 固体氦(介质 M) 和钴(介质 M') 的单晶体物理参数

常数及单位	固体氦	钴
$c_{11}/(\text{N/m}^2)$	0.404×10^{10}	3.071×10^{11}
$c_{12}/(\text{N/m}^2)$	0.212×10^{10}	1.605×10^{11}
$c_{44}/(\text{N/m}^2)$	0.124×10^{10}	0.755×10^{11}
$\rho/(\text{kg/m}^3)$	0.191×10^3	8.836×10^3
$K^*/(\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K}))$	0.300×10^2	0.690×10^2
$C^*/(\text{J}/(\text{kg} \cdot \text{K}))$	1.477×10^6	4.270×10^6
$\beta/(\text{N}/(\text{m}^2 \cdot \text{K}))$	2.362×10^6	7.040×10^6
T_0/K	0.85	298
τ_0	0.2	0.2
τ_1	0.3	0.25

利用上述相关参数值, 当出射角为 $0^\circ \sim 90^\circ$ 时, 利用 Gauss 消元法求解方程组(25) 的振幅比. 计算中用到如下无量纲参数:

$$\frac{\omega}{\omega^*} = 10, \quad \frac{K_n}{c_{11}k} = 10, \quad \frac{K_t}{c_{11}k} = 7, \quad \frac{K_c}{K^*k} = 5,$$

其中 $\omega^* = C^* c_{11}/K^*$.

我们分别用实线表示有刚性边界的热弹性固体(ST), 用虚线表示有法向刚性边界的热弹性固体(NS), 用带 Δ 符号的实线表示有接触传热边界的热弹性固体(TCC), 用带 \times 符号的长虚线表示有结合面边界的热弹性固体(WC) 振幅比的变化. 在 ST、NS、TCC 和 WC 边界条件下, 振幅比 $|Z_i|$ ($i = 1, 2, \dots, 6$) 随入射 QL 波、入射 QT 波和入射 T 模式波的出射角 θ_0 的变化示于图 2 至图 19.

7.1 入射 QL 波

对所有的 θ_0 值, ST 边界下的振幅比 $|Z_1|$ 大于 NS、WC 边界情况; 而当 $0^\circ \leq \theta_0 \leq 18^\circ$ 时, 小于 TCC 边界情况. 参见图 2. 图 3 示出振幅比 $|Z_2|$ 的变化情况. ST 边界的振幅比 $|Z_2|$ 分别大于 NS($85^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$)、WC($3^\circ \leq \theta_0 \leq 26^\circ$)、TCC($3^\circ \leq \theta_0 \leq 26^\circ$) 边界情况. 为方便不同边界间的比较, 在图 2、图 3 中, 将 TCC 边界时的值放大为 10 倍.

对所有的 θ_0 值, ST 边界下的振幅比 $|Z_3|$ 都大于 NS、WC 边界情况; 而在 $3^\circ \leq \theta_0 \leq 26^\circ$ 时, 又小于 TCC 边界情况. 参见图 4. 为方便比较, 将 WC 边界时的值缩小为 1/10.

图 5 示出了振幅比 $|Z_4|$ 的变化情况. ST 边界下的振幅比 $|Z_4|$ 分别小于 NS($31^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$)、WC($67^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$)、TCC($75^\circ \leq \theta_0 \leq 82^\circ$) 边界情况. 为方便比较, 将 ST、TCC 边界时的值放大为 10 倍.

ST 边界下的振幅比 $|Z_5|$ 分别小于 NS($31^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$)、TCC($0^\circ \leq \theta_0 \leq 40^\circ$) 边界情况; 而对所有的 θ_0 值, 大于 WC 边界情况. 参见图 6. 为便于比较, WC 边界的值缩小为 1/10. 折射 QT 波振幅比示于图 7. NS、WC、TCC 边界时的振幅比 $|Z_6|$ 的值大于 ST 边界情况.

7.2 入射 QT 波

当 $57^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$ 时, TCC 边界时的振幅比 $|Z_1|$ 、 $|Z_2|$ 、 $|Z_3|$ 、 $|Z_5|$ 小于 ST 边界情况, 分别参见图 8 至图 10 和图 12.

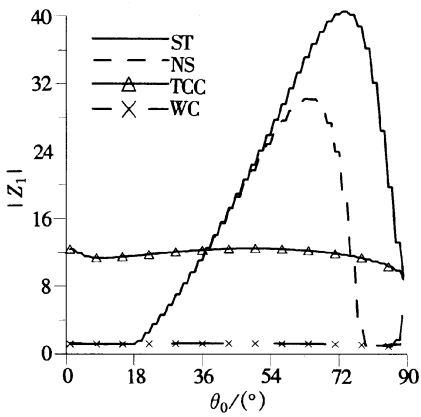


图2 对入射 QL 波, 反射 QL 波的振幅比 $|Z_1|$ 随出射角 θ_0 的变化

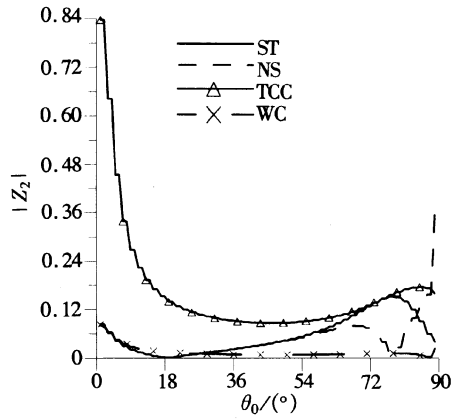


图3 对入射 QL 波, 反射 T 模式波的振幅比 $|Z_2|$ 随出射角 θ_0 的变化

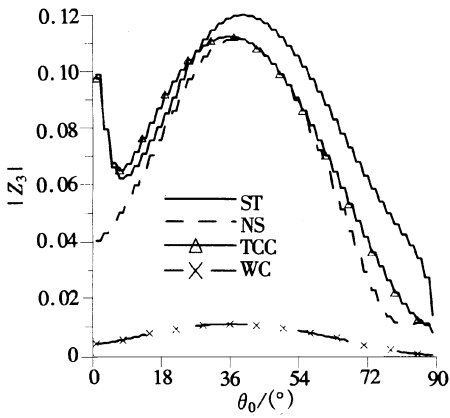


图4 对入射 QL 波, 反射 QT 波的振幅比 $|Z_3|$ 随出射角 θ_0 的变化

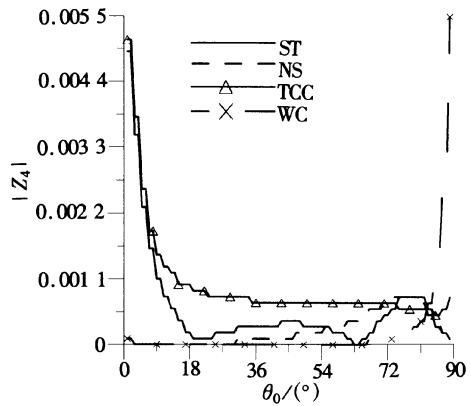


图5 对入射 QL 波, 折射 QL 波的振幅比 $|Z_4|$ 随出射角 θ_0 的变化

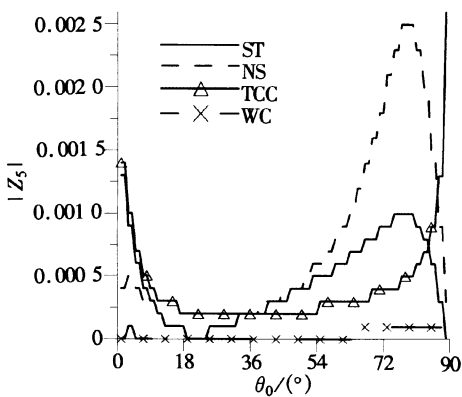


图6 对入射 QL 波, 折射 T 模式波的振幅比 $|Z_5|$ 随出射角 θ_0 的变化

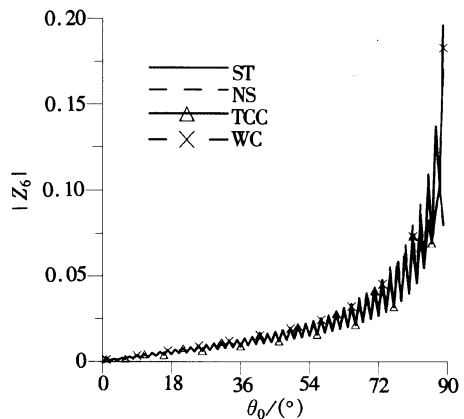


图7 对入射 QL 波, 折射 QT 波的振幅比 $|Z_6|$ 随出射角 θ_0 的变化

当 $57^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$ 时, ST 边界时的振幅比 $|Z_1|$ 和 $|Z_3|$ 分别大于 NS、WC 边界情况. ST 边界时的振幅比 $|Z_2|$ 分别大于 NS ($65^\circ \leq \theta_0 \leq 88^\circ$)、WC ($57^\circ \leq \theta_0 \leq 88^\circ$) 边界情况.

当 θ_0 取所有值时, ST 边界时的折射 QL 波的振幅比 $|Z_4|$ 大于 NS 边界情况; 当 $57^\circ \leq \theta_0 \leq 74^\circ$ 时, 它却小于 WC、TCC 边界情况. 参见图 11. 当 $57^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$ 时, ST 边界时振幅比 $|Z_5|$ 大于 WC 边界情况; 当 θ_0 取所有值时, 它却小于 NS 时边界情况. 参见图 12.

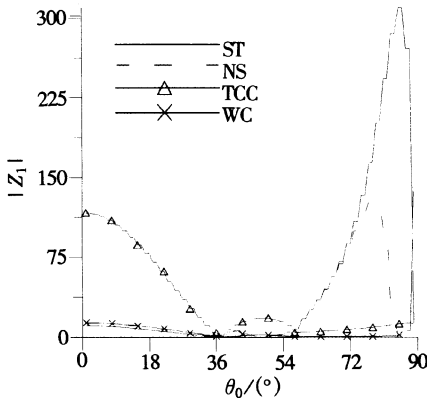


图 8 对入射 QT 波, 反射 QL 波的振幅比 $|Z_1|$ 随出射角 θ_0 的变化

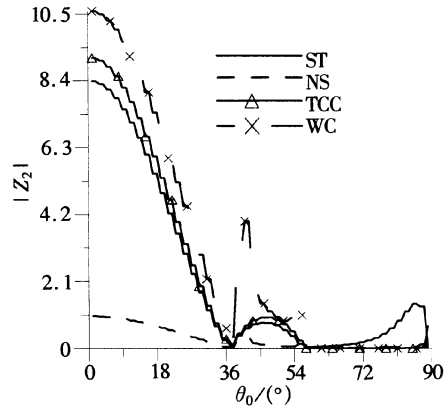


图 9 对入射 QT 波, 反射 T 模式波的振幅比 $|Z_2|$ 随出射角 θ_0 的变化

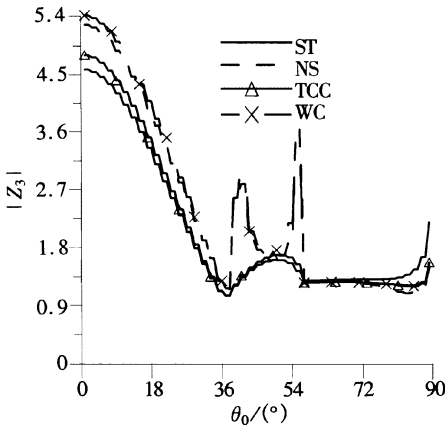


图 10 对入射 QT 波, 反射 QT 波的振幅比 $|Z_3|$ 随出射角 θ_0 的变化

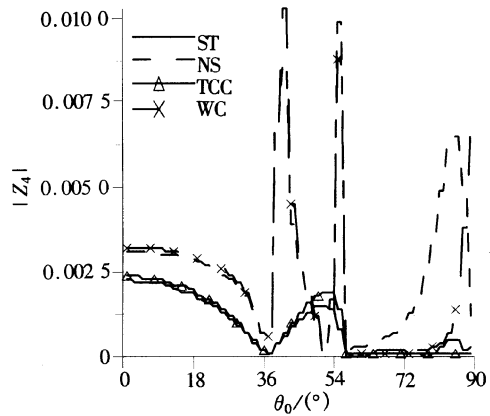


图 11 对入射 QT 波, 折射 QL 波的振幅比 $|Z_4|$ 随出射角 θ_0 的变化

虽然 ST 边界时的振幅比 $|Z_6|$ 最后小于其他边界情况, 但在开始阶段各种边界的 $|Z_6|$ 值几乎相等. 图 13 示出了折射 QT 波振幅比随出射角 θ_0 的变化. 为便于比较, 图 8 中的 TCC 边界时的振幅比扩大为 10 倍; 图 12 中 TCC 边界时的振幅比也扩大为 10 倍.

7.3 入射 T 模式波

ST 边界时的振幅比 $|Z_1|$ 分别大于 NS ($35^\circ \leq \theta_0 \leq 70^\circ$)、WC ($37^\circ \leq \theta_0 \leq 70^\circ$) 边界情况; 但小于 TCC ($0^\circ \leq \theta_0 \leq 72^\circ$) 边界情况. $|Z_1|$ 的变化情况示于图 14.

图 15 示出了振幅比 $|Z_2|$ 的变化情况. ST 边界时的 $|Z_2|$ 分别小于 WC ($7^\circ \leq \theta_0 \leq 64^\circ$)、TCC ($5^\circ \leq \theta_0 \leq 68^\circ$) 边界情况; 当 θ_0 取所有值时, 它小于 NS 边界情况.

ST 边界时的振幅比 $|Z_3|$ 小于 WC ($73^\circ \leq \theta_0 \leq 90^\circ$) 边界情况; 当取 θ_0 所有值时, 它小于 NS、TCC 边界情况. 参见图 16. 图 17 示出了折射 QL 波振幅比 $|Z_4|$ 随出射角的变化情况. 当 $0^\circ \leq \theta_0 \leq 4^\circ$ 时, ST 边界时的 $|Z_4|$ 分别小于 NS、WC 边界情况; 当 θ_0 取所有值时, 它小于 TCC 边界情况.

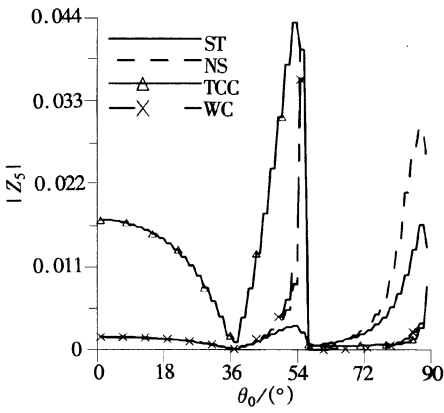


图 12 对入射 QT 波, 折射 T 模式波的振幅比 $|Z_5|$ 随出射角 θ_0 的变化

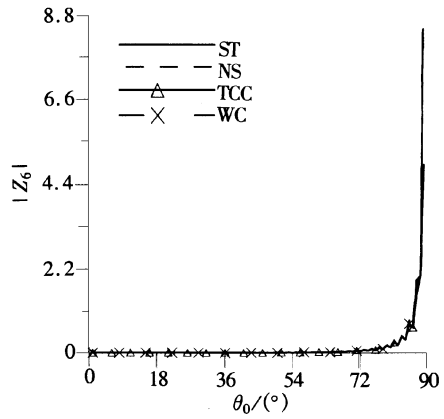


图 13 对入射 QT 波, 折射 QT 波的振幅比 $|Z_6|$ 随出射角 θ_0 的变化

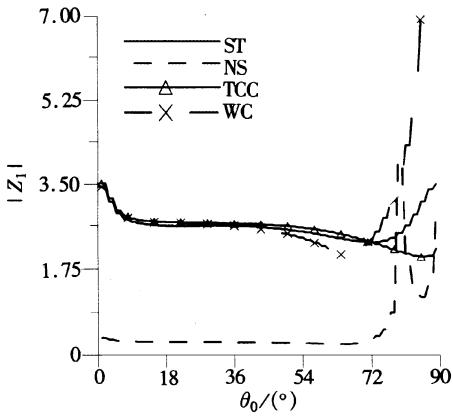


图 14 对入射 T 模式波, 折射 QL 波的振幅比 $|Z_1|$ 随出射角 θ_0 的变化

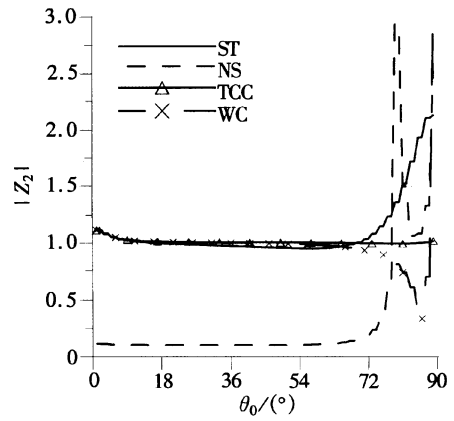


图 15 对入射 T 模式波, 反射 T 模式波的振幅比 $|Z_2|$ 随出射角 θ_0 的变化

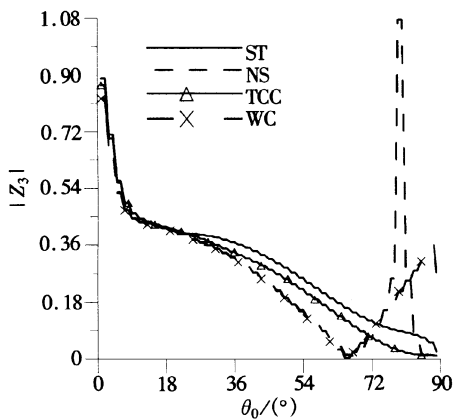


图 16 对入射 T 模式波, 反射 QT 波的振幅比 $|Z_3|$ 随出射角 θ_0 的变化

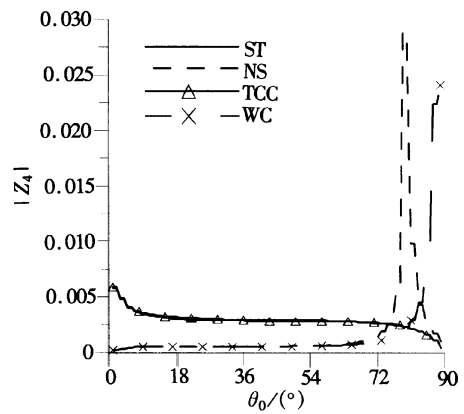


图 17 对入射 T 模式波, 折射 QL 波的振幅比 $|Z_4|$ 随出射角 θ_0 的变化

对所有 θ_0 值, ST 边界时的振幅比 $|Z_5|$ 分别小于 NS、WC 边界情况; 当 $29^\circ \leq \theta_0 \leq 82^\circ$ 时, 它却大于 TCC 边界情况. 参见图 18. 折射 QT 波振幅比的变化示于图 19. WC 边界时的振幅

比 $|Z_6|$ 的变化大于其他所有边界情况. 为便于分析比较, 将图 14、图 15、图 17 中 NS 边界情况的振幅比和图 17、图 18 中的 WC 边界时情况的振幅比, 缩小为 1/10.

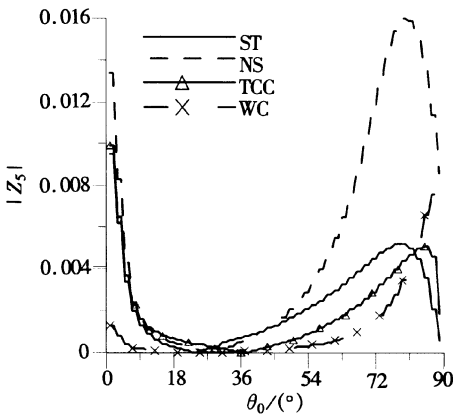


图 18 对入射 T 模式波, 折射射 T 模式波的振幅比 $|Z_5|$ 随出射角 θ_0 的变化

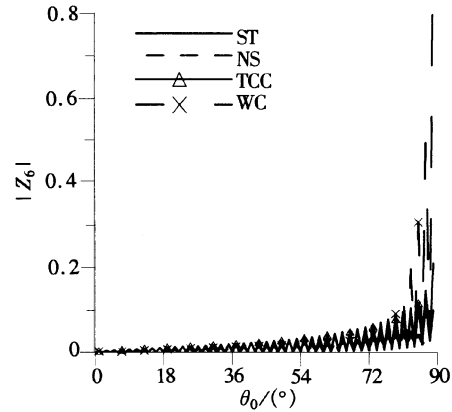


图 19 对入射 T 模式波, 折射 QT 波的振幅比 $|Z_6|$ 随出射角 θ_0 的变化

8 结 论

对于有缺陷的法向刚性边界、横向刚性边界、传热边界、滑动边界和结合面边界, 不同的反射波和折射波, 给出了反射系数和折射系数的解析表达式. 并由此推演出一些特殊情况. 在反射和折射现象中, 热效应起了非常重要的作用. 本文采用的模型是许多实际形式的地球模型之一, 实验地震学者对此感兴趣.

感谢 作者 (Manjeet Singh) 感谢 CSIR 的资助.

[参 考 文 献]

- [1] Jones J P, Whittier J P. Waves in a flexible bonded interface[J]. J Appl Mech, 1967, **34**(4): 905-909.
- [2] Murty G S. A theoretical model for the attenuation and dispersion of Stonley waves at the loosely bonded interface of elastic half-space[J]. Phys Earth and Planetary Interiors, 1975, **11**(1): 65-79.
- [3] Nayfeh A H, Nassar E M. Simulation of the influence of bonding materials on the dynamic behaviour of laminated composites[J]. J Appl Mech, 1978, **45**(4): 822-828.
- [4] Schoenberg M. Elastic wave behavior across linear slip interfaces[J]. J Acoust Soc Amer, 1980, **68**(5): 1516-1521.
- [5] Rokhlin S I, Hefets M, Rosen M. An elastic interface wave guided by a thin film between two solids [J]. J Appl Phys, 1980, **51**(7): 3579-3582.
- [6] Rokhlin S I. Adhesive Joint characterization by ultrasonic surface and interface waves[A]. In: Mittal K L Ed. Adhesive Joints: Formation, Characteristics and Testing [C]. New York: Plenum, 1984: 307-345.
- [7] Pilarski A, Rose J L. A transverse wave ultrasonic oblique-incidence technique for interface weakness detection in adhesive bonds[J]. J Appl Phys, 1988, **63**(2): 304-307.
- [8] Baik J M, Thompson R B. Ultrasonic scattering from imperfect interfaces a quasi-static model[J]. J Nondestr Eval, 1984, **4**(3/4): 177-196.
- [9] Angel Y C, Achenbach J D. Reflection and transmission of elastic waves by a periodic array of crack [J]. J Appl Mech, 1985, **52**(1): 33-41.
- [10] Cheng Z Q, Jemah A K, Williams F W. Theory for multilayered anisotropic plates with weakened in-

- terfaces[J]. *J Appl Mech*, 1996, **63**(4): 1019-1026.
- [11] Lavrentyev A I, Rokhlin S I. Ultrasonic spectroscopy of imperfect contact interfaces between a layer and two solids[J]. *J Acoust Soc Amer*, 1998, **103**(2): 657-664.
- [12] Cheng Z Q, He L H, Kitipornchai S. Influence of imperfect interfaces on bending and vibration of laminated composite shells[J]. *Internat J Solids and Structures*, 2000, **37**(15): 2127-2150.
- [13] Chen W Q, Ying J, Cai J B, et al. Benchmark solution of imperfect angle-ply laminated rectangular plated in cylindrical bending with surface piezoelectric layers as actuator and sensor[J]. *Computers and Structures*, 2004, **82**(22): 1773-1784.
- [14] Chen W Q, Wang Y F, Cai J B, et al. Three-dimensional analysis of cross-ply laminated cylindrical panels with weak interfaces[J]. *Internat J Solids and Structures*, 2004, **41**(9/10): 2429-2446.
- [15] Chen W Q, Cai J B, Ye G R. Responses of cross-ply laminates with viscous interfaces in cylindrical bending[J]. *Computer Methods in Appl Mech and Engng*, 2005, **194**(6/8): 823-835.
- [16] Chen W Q, Lee K Y. Benchmark solution of angle-ply piezoelectric-laminated cylindrical panels in cylindrical bending with weak interfaces[J]. *Arch Appl Mech*, 2005, **74**(7): 466-476.
- [17] Lord H W, Shulman Y. A generalized dynamical theory of Thermoelasticity[J]. *J Mech Phys Solids*, 1967, **15**(5): 299-309.
- [18] Green A E, Lindsay K A. Thermoelasticity[J]. *J Elasticity*, 1972, **2**(1): 1-7.
- [19] Dhaliwal R S, Sherief H H. Generalized thermoelasticity for anisotropic media[J]. *Q Appl Math*, 1980, **38**(1): 1-8.
- [20] Deresiewicz H. Effect of boundaries on waves in a thermoelastic solid: Reflexion of plane waves from a plane boundary[J]. *J Mech Phys Solids*, 1960, **8**(3): 164-172.
- [21] Deresiewicz H. Corrections and additions: effect of boundaries on waves in a thermoelastic solid[J]. *J Mech Phys Solids*, 1962, **10**(2): 179-181.
- [22] Sinha A N, Sinha S B. Reflection of thermoelastic waves at a solid half space with thermal relaxation [J]. *J Phys Earth*, 1974, **22**: 237-244.
- [23] Beevers C E, Bree J. A note on wave reflection problems in linear thermoelasticity[J]. *J Math Phys Sci*, 1975, **9**: 355-362.
- [24] Sharma J N. Reflection of thermoelastic waves from the stress-free insulated boundary of an anisotropic half-space[J]. *Indian J Pure Appl Math*, 1988, **19**(3): 294-304.
- [25] Sinha S B, Elsibai S A. Reflection of thermoelastic waves at a solid half-space with two relaxation times[J]. *J Thermal Stresses*, 1996, **19**(7): 749-762.
- [26] Sinha S B, Elsibai K A. Reflection and Refraction of thermoelastic waves at an interface of two semi-infinite media with two relaxation times[J]. *J Thermal Stresses*, 1997, **20**(2): 129-145.
- [27] Singh B, Kumar R. Reflection of plane waves from the flat boundary of a micropolar generalized thermoelastic half-space[J]. *Internat J Engrg Sci*, 1998, **36**(7/8): 865-890.
- [28] Singh B, Kumar R. Reflection of plane waves from the flat boundary of a micropolar generalized thermoelastic half-space with stretch[J]. *Indian J Pure Appl Math*, 1998, **29**(6): 657-669.
- [29] Singh B, Kumar R. Wave propagation in a generalized thermo-microstretch elastic solid[J]. *Internat J Engrg Sci*, 1998, **36**(7/8): 891-912.
- [30] Abd-Alla Ab-El-Nour N, Al-Dawy A S Amira. The reflection phenomena of SV-waves in generalized thermoelastic medium[J]. *Internat J Math Math Sci*, 2000, **23**(8): 529-546.
- [31] Singh B. Wave Propagation in an anisotropic generalized thermoelastic solid[J]. *Indian J Pure Applied Math*, 2003, **34**(10): 1479-1485.
- [32] Singh B. Plane waves in a thermally conducting viscous liquid[J]. *Sadhana*, 2004, **29**(1): 27-34.
- [33] Kumar R, Sharma J N. Reflection of plane waves from the boundaries of a micropolar thermoelastic half-space without energy dissipation[J]. *Internat J Appl Mech Engrg*, 2005, **10**(4): 631-645.

- [34] Henneke II Edmund G. Reflection-Refracton of a stress wave at a plane boundary between anisotropic media[J]. J Acoust Soc Am er , 1972, **51**(1): 210-217.
- [35] Velasco V R, Garcia-Moliner F. Theory of surface waves in anisotropic cubic crystals[J]. J Phys C: Solid St Phys , 1980, **13**: 2237-2256.
- [36] Atalar A. Reflection of ultrasonic waves at a liquid-cubic-solid interface[J]. J Acoust SocAm er , 1983, **73**(2): 435-439.
- [37] Sharma J N, Singh H. Propagation of generalized thermoelastic waves in cubic crystal[J]. Arch Mech , 1990, **42**(1): 19-30.
- [38] Kumar R, Rani R. Elastodynamics of time harmonic sources in a thermally conducting cubic crystal [J]. Internat J Appl Mech Enrg, 2003, **8**(4): 637-650.
- [39] Kumar R, Rani L. Deformation due to mechanical and thermal sources in generalized orthorhombic thermoelastic metrial[J]. Sadhana , 2004, **29**(5): 429-447.
- [40] Kumar R, Ailawalia P. Time harmonic sources at micropolar thermoelastic medium possessing cubic symmetry with one relaxation time[J]. European J Mech A/Solids , 2006, **25**(2): 271-282.
- [41] 库玛 R, 额拉瓦尼亚 P. 具有立方对称性及两个弛豫时间的微极热弹性介质中调和时源引起的变形[J]. 应用数学和力学, 2006, **27**(6): 690-700.
- [42] Sharma J N, Kumar V, Sud S P. Plane harmonic waves in orthorhombic thermoelastic materials[J]. J Acoust Soc Am er , 2000, **107**(1): 293-305.

Propagation of Plane Waves in Thermoelastic Cubic Crystal Material With Two Relaxation Times

Rajneesh Kumar¹, Manjeet Singh²

(1. Department of Mathematics, Kurukshetra University, Kurukshetra-136119, India ;

2. Department of Mathematics , S. U. S. Govt. College, Matak Majari , Karnal , Haryana , India)

Abstract: A problem concerning with the reflection and refraction of thermoelastic plane waves at an imperfect interface between two generalized thermally conducting cubic crystal solid half-spaces of different elastic and thermal properties with two relaxation times has been investigated. The generalized thermoelastic theory with two relaxation times developed by Green and Lindsay has been used to study the problem in 1972. The expressions for the reflection and refraction coefficients which are the ratios of the amplitudes of reflected and refracted waves to the amplitude of incident waves were obtained for an imperfect boundary and deduced for normal stiffness, transverse stiffness, thermal contact conductance, slip and welded boundaries. Amplitude ratios of different reflected and refracted waves for different boundaries with angle of emergence were compared graphically for different incident waves. It is observed that the amplitude ratios of reflected and refracted waves are affected by the stiffness and thermal properties of the media.

Key words: generalized thermoelasticity; normal stiffness; transverse stiffness; thermal contact conductance; cubic crystal; amplitude ratio