应用数学和力学, 第 28 卷 第 5 期
2007 年 5 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 28, No. 5, May. 15, 2007

文章编号: 1000-0887(2007) 05-0619-12

KGS 格点系统的全局吸引子*

尹福其[1], 周盛凡[2], 殷苌茗[3], 肖翠辉[1]

(1. 湘潭大学 数学与计算科学学院, 湖南 湘潭 411105;
2. 上海师范大学 数学科学学院, 上海 200234;
3. 长沙理工大学 计算机与通信工程学院, 长沙 410076)

(郭兴明推荐)

摘要: 考虑了对应于 Klein-Gordon-Schrödinger 方程的格点系统(KGS 格点系统)的解的长时间行为. 首先通过引入一个加权范数与采用解的"切尾"法, 证明了全局吸引子的存在性. 在此基础上, 采用元素分解法与多面体的球覆盖性质, 得到了此吸引子的 Kolmogorov ε-熵的上界的一个估计. 最后, 我们用有限维的常微分方程的全局吸引子逼近它.

关 键 词: 吸引子; 格点动力系统; 覆盖性质; 元素分解; 逼近

中图分类号: O175.1; O175.7 文献标识码: A

引 言

最近, 许多作者研究了格点系统的解的各种各样的性质, 他们主要集中在耦合映射格点与格点常微分方程, 见参考文献[1]至文献[5]. 格点系统出现在许多的应用领域[1-5]. 例如应用于化学反应理论、图象处理与模式识别. 格点系统有它们自己的形式即它们可以看成是无穷的常微分方程的耦合系统(格点 ODEs), 在一些情况下, 它们也可以出现在无界区域(如 $\mathbf{R}^k$, $k \in \mathbf{N}$) 上的偏微分方程(PDEs) 的空间离散化形式中.

在许多情况下, 由数学物理方程中的发展方程(通常是偏微分方程) 生成的动力系统的长时间行为很自然的可由对应半群[6]的吸引子来描述. 偏微分方程的数学研究是很复杂的, 在相当长的时期, 在这个领域的所有工作基本上是限制在寻找某些简单的解及研究它们的稳定性或估计吸引子的维数. 根据无界区域(如 $\mathbf{R}^k$, $k \in \mathbf{N}$)[7-8] 上的偏微分方程的初值问题所确定的半群的吸引子的已知结果, 不难看出, 这时估计吸引子的维数是困难的, 因为吸引子一般是无穷维的. 所以, 研究对应于无界区域上的偏微分方程的初值问题的格点系统的动力学行为是有意义的, 因为格点系统本身很重要, 并且如果它们作为 PDEs 的空间离散化, 它们可以看作相应的连续 PDEs 的一种"近似". 对格点 ODEs, 一般来讲, 由于它的吸引子是无穷维的, 因而对其几何结构的描述与维数的估计就很困难. 由文献[9]受到启发, 处理这种问题的一种

* 收稿日期: 2006-06-27; 修订日期: 2007-03-09
资金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471086)
作者简介: 尹福其(1970—), 男, 湖南湘潭人, 博士(联系人. Fax: +86-732-8292400; E-mail: fuqiyine@xtu.edu.cn)

可能的方法就是估计它的 Kolmogorov δ- 熵. 由定义, 一个吸引子的 Kolmogorov δ- 熵 $K(\delta, \Omega)$ 就是覆盖相空间的吸引子的 δ- 球的最小数目 $n(\delta, \Omega)$ 的对数. 另一个可能的方法[4] 就是用有限维常微分方程的全局吸引子来逼近这个吸引子.

本文将考虑如下耦合的格点动力系统:

$$\begin{cases} \ddot{u}_j + \alpha\dot{u}_j - (u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1}) + \lambda u_j - \nu|\omega_j|^2 = f_j, \\ i\dot{\omega}_j + (\omega_{j-1} - 2\omega_j + \omega_{j+1}) + i\beta\omega_j + \omega_j u_j = g_j, \end{cases} \quad j \in \mathbf{Z}, \tag{1}$$

其中 $\omega_j = \omega_j(t) \in \mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ 是复数集, $u_j = u_j(t) \in \mathbf{R}$, i 表示虚数单位, α、λ、ν、β 是正常数, f_j、g_j 给定.

方程(1) 可以看作如下的连续耦合的 Klein-Gordon-Schrödinger 方程在 $\mathbf{R}$ 中的离散模拟

$$\begin{cases} u_{tt} + \alpha u_t - u_{xx} + \lambda u - \nu|\omega|^2 = f, \\ i\omega_t + \omega_{xx} + i\beta\omega + \omega u = g, \end{cases} \tag{2}$$

其中 $\omega = \omega(t) \in \mathbf{C}$, $\mathbf{C}$ 是复数集, $u = u(t) \in \mathbf{R}$, i 是虚数单位, α、λ、ν、β 是正常数, f、g 是驱动项. 方程(2) 描述了一个核子场 ω 与一个介子场 u 通过汤川(Yukawa) 耦合的相互作用. 这个模型的耗散项是 $i\beta\omega$ 和 αu_t. 方程(2) 的全局吸引子被许多人研究过, 见参考文献[7] 和文献[8]、文献[10] 至文献[13].

本文将研究(1) 式的解的长时间行为. 首先通过引入一个空间 $l^2 = \left\{u = (u_j)_{j\in\mathbf{Z}} \mid u_j \in \mathbf{R}, \sum_{j\in\mathbf{Z}} u_j^2 < \infty\right\}$ 中新的内积与范数与采用对解的"切尾"法[4-5] 证明了全局吸引子的存在性. 在此基础上, 采用元素分解法与多面体的球覆盖性质, 得到了一个关于这个全局吸引子的 Kolmogorov δ- 熵的上界的估计. 最后, 我们用有限维的常微分方程的全局吸引子来逼近这个全局吸引子.

1　解的存在唯一性

在这一节, 将证明具初始条件的系统(1) 的解的存在性与唯一性.

令

$$l^2 = \left\{u = (u_j)_{j\in\mathbf{Z}} \mid u_j \in \mathbf{R}, \sum_{j\in\mathbf{Z}} u_j^2 < \infty\right\},$$

$$L^2 = \left\{\omega = (\omega_j)_{j\in\mathbf{Z}} \mid \omega_j \in \mathbf{C}, \sum_{j\in\mathbf{Z}} |\omega_j|^2 < \infty\right\}.$$

对 $X = l^2$ 或 L^2, 定义由 $X \to X$ 线性算子 B、B、A 如下: $\forall u = (u_j)_{j\in\mathbf{Z}} \in X$, $(Bu)_j = u_{j+1} - u_j$, $(Bu)_j = u_{j-1} - u_j$, $\forall j \in \mathbf{Z}$, $(Au)_j = -(u_{j-1} - 2u_j + u_{j+1})$, $\forall j \in \mathbf{Z}$ 则 B、B、A 满足

$$A = BB = BB. \tag{3}$$

对任意两个元素 $u = (u_j)_{j\in\mathbf{Z}}$, $v = (v_j)_{j\in\mathbf{Z}} \in X$, 定义双线性形式如下:

$$\begin{cases} (u, v) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} u_j v_j, \\ \|u\|^2 = (u, u) = \sum_{j\in\mathbf{Z}} |u_j|^2; \ (u, v)_\lambda = (Bu, Bv) + \lambda(u, v), \\ \|u\|_\lambda^2 = (u, u)_\lambda = \|Bu\|^2 + \lambda\|u\|^2 = \sum_{j\in\mathbf{Z}} (|u_{j+1} - u_j|^2 + \lambda|u_j|^2). \end{cases} \tag{4}$$

显然, (4) 式中的双线性形式 $(\cdot, \cdot)$ 和 $(\cdot, \cdot)_\lambda$ 都是 X 中的内积, 而且由 $\lambda\|u\|^2 \leqslant \|u\|_\lambda^2 = \sum_{j\in\mathbf{Z}} (|u_{j+1} - u_j|^2 + \lambda|u_j|^2) \leqslant (4 + \lambda)\|u\|^2$, 可知范数 $\|\cdot\|$ 和 $\|\cdot\|_\lambda$ 相互等价. 分

别用 l^2、l^2_λ、L^2 表示具有(4) 式的内积与范数的空间 $l^2=(l^2,(\cdot,\cdot),\|\cdot\|)$, $l^2_\lambda=(l^2,(\cdot,\cdot)_\lambda,\|\cdot\|_\lambda)$, $L^2=(L^2,(\cdot,\cdot),\|\cdot\|)$, 则 l^2、l^2_λ 和 L^2 是 Hilbert 空间. 令 $E=l^2_\lambda\times l^2\times L^2$, 并定义它的内积与范数如下: 对 $\varphi_l=(u^{(l)},v^{(l)},\omega^{(l)})=((u_j^{(l)}),(v_j^{(l)}),(\omega_j^{(l)}))_{j\in\mathbf{Z}}\in E$, $l=1,2$, $\overline{\omega_j^{(2)}}$ 表示 $\omega_j^{(2)}$ 的共轭复数.

$$
\begin{aligned}
(\varphi_1,\varphi_2)_E=&(u^{(1)},u^{(2)})_\lambda+(v^{(1)},v^{(2)})+(\omega^{(1)},\omega^{(2)})=\\
&\sum_j((Bu^{(1)})_j(Bu^{(2)})_j+\lambda u_j^{(1)}u_j^{(2)}+v_j^{(1)}v_j^{(2)}+\omega_j^{(1)}\overline{\omega_j^{(2)}}),
\end{aligned}\tag{5}
$$

$$\|\varphi\|_E^2=(\varphi,\varphi)_E,\qquad\forall\varphi\in l^2_\lambda\times l^2\times L^2,$$

利用以上记号, 方程(1) 可以写成

$$
\begin{cases}
\ddot{u}+\alpha\dot{u}+Au+\lambda u-\nu|\omega|^2=f, & t>0,\\
\mathrm{i}\dot{\omega}-A\omega+\mathrm{i}\beta\omega+\omega u=g,
\end{cases}\tag{6}
$$

其中 $u=(u_j)_{j\in\mathbf{Z}}$, $\omega=(\omega_j)_{j\in\mathbf{Z}}$, $|\omega|^2=(|\omega_j|^2)_{j\in\mathbf{Z}}$, $\omega u=(\omega_ju_j)_{j\in\mathbf{Z}}$, $f=(f_j)_{j\in\mathbf{Z}}$, $g=(g_j)_{j\in\mathbf{Z}}$. 在方程(6) 中加上如下初始条件:

$$u(0)=(u_{j,0})_{j\in\mathbf{Z}}=u_0,\quad\dot{u}(0)=(u_{1j,0})_{j\in\mathbf{Z}}=u_{10},\quad\omega(0)=(\omega_{j,0})_{j\in\mathbf{Z}}=\omega_0.\tag{7}$$

显而易见, 容易把系统(6) 简化成关于时间 t 的在 E 上的常微分方程. 令 $v=\dot{u}+\varepsilon u$, 其中 ε 为

$$\varepsilon=\frac{\alpha\lambda}{\alpha^2+4\lambda}>0,\tag{8}$$

令 $\varphi=(u,v,\omega)^{\mathrm{T}}$, $v=\dot{u}+\varepsilon u$, $F(\varphi)=(0,\nu|\omega|^2+f,\mathrm{i}\omega u-\mathrm{i}g)^{\mathrm{T}}$, 则系统(6) 和系统(7) 可写成

$$\dot{\varphi}+C\varphi=F(\varphi),\quad\varphi(0)=(u_0,v_0,\omega_0)^{\mathrm{T}}=(u_0,u_{10}+\varepsilon u_0,\omega_0)^{\mathrm{T}},\tag{9}$$

$$C=\begin{pmatrix}\varepsilon I & -I & 0\\ A+\lambda I+\varepsilon(\varepsilon-\alpha)I & (\alpha-\varepsilon)I & 0\\ 0 & 0 & \mathrm{i}A+\beta I\end{pmatrix}.\tag{10}$$

显然, $F(\varphi): E\to E$ 局部 Lipschitz. 由常微的经典理论, 可得到系统(9) 的局部解的存在唯一性.

引理 1 如果 $f=(f_j)_{j\in\mathbf{Z}}\in l^2$, $g=(g_j)_{j\in\mathbf{Z}}\in L^2$, 对任意初值 $\varphi(0)=(u_0,v_0,\omega_0)^{\mathrm{T}}\in E$, 则系统(9) 存在唯一的局部解 $\varphi(t)=(u(t),v(t),\omega(t))^{\mathrm{T}}$ 使得 $\varphi\in C^1((-T_0,T_0),E)$, 对某些 $T_0>0$. 如果 $T_0<+\infty$, 则 $\lim\limits_{t\to T_0}\|\varphi(t)\|_E=+\infty$ 或 $\lim\limits_{t\to -T_0}\|\varphi(t)\|_E=+\infty$.

由后面的引理 4 可知, 系统(9) 的局部解 $\varphi(t)$ 全局存在, 即 $\varphi\in C^1(\mathbf{R}^+,E)$, 这就是说映射

$$
\begin{aligned}
S(t):\varphi(0)=(u_0,v_0,\omega_0)\in E\to\varphi(t)=&\\
S(t)\varphi(0)=(u(t),v(t),\omega(t))\in E,&\qquad t\geqslant 0,
\end{aligned}\tag{11}
$$

生成了一个 E 上的连续半群 $\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$, 其中 $v(t)=\dot{u}(t)+\varepsilon u(t)$.

2 解的有界性

引理 2 对任意 $\varphi=(u,v,\omega)^{\mathrm{T}}\in E$, 成立

$$\mathrm{Re}(C\varphi,\varphi)_E\geqslant\sigma(\|u\|_\lambda^2+\|v\|^2)+(\alpha/2)\|v\|^2+\beta\|\omega\|^2,\tag{12}$$

其中 $\mathrm{Re}(C\varphi,\varphi)_E$ 表示内积 $(C\varphi,\varphi)_E$ 的实部且 $\sigma=\alpha\lambda/(\sqrt{\alpha^2+4\lambda}(\alpha+\sqrt{\alpha^2+4\lambda}))$.

证明 容易验证

$$(Bu, v) = (u, Bv),\ (Au, v) = (Bu, Bv), \qquad \forall u, v \in l^2(L^2), \tag{13}$$

$$\mathrm{Re}(C\varphi, \varphi)_E - \sigma(\|u\|_\lambda^2 + \|v\|^2) - \frac{\alpha}{2}\|v\|^2 - \beta\|\omega\|^2 \geqslant$$
$$(\varepsilon - \sigma)(\|Bu\|^2 + \lambda\|u\|^2) + \left(\frac{\alpha}{2} - \varepsilon - \sigma\right)\|v\|^2 - \frac{\alpha\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}(\|Bu\|^2 + \lambda\|u\|^2)^{1/2}\|v\|.$$

且易知$4(\varepsilon - \sigma)(\alpha/2 - \varepsilon - \sigma) = \alpha^2\varepsilon^2/\lambda$成立, 因此, 证明完毕.

引理3 假设 $\varphi_0 = (u(0), v(0), \omega(0)) \in E$ 是系统(6) 和系统(7) 或系统(9) 的初值, 那么系统(6) 和系统(7) 或系统(9) 的解 $\varphi(u(t), v(t), \omega(t))$ 分量 $\omega(t)$ 满足

$$\|\omega\|^2 \leqslant \|\omega(0)\|^2 e^{-\beta t} + \|g\|^2/\beta^2. \tag{14}$$

证明 由 ω 与系统(6) 的第2个方程做内积, 然后取虚部并根据Young 不等式:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\omega\|^2 + \beta\|\omega\|^2 = \mathrm{Im}(g, \omega) \leqslant \|g\| \cdot \|\omega\| \leqslant$$
$$\frac{\|g\|^2}{2\beta} + \frac{\beta}{2}\|\omega\|^2, \tag{15}$$

其中 $\mathrm{Im}(g, \omega)$ 表示内积(g, ω) 的虚部, 以下同. 根据 Gronwll 不等式即可完成证明.

接下来证明系统(9) 的解 $\varphi(t)$ 的一致有界性. 若$f \in l^2$, $g \in L^2$. 令 $\varphi(t) = (u(t), v(t), \omega(t))^{\mathrm{T}} \in E$ 是系统(9) 的一个解, 其中$v(t) = \dot{u}(t) + \varepsilon u(t)$, 由 $\varphi(t)$ 与系统(9) 作内积 $(\cdot, \cdot)_E$ 取实部有

$$\mathrm{Re}(\dot{\varphi}, \varphi)_E + \mathrm{Re}(C\varphi, \varphi)_E = \mathrm{Re}(F(\varphi), \varphi)_E. \tag{16}$$

根据(5) 式

$$\mathrm{Re}(\dot{\varphi}, \varphi)_E = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\varphi\|_E^2 \tag{17}$$

和

$$\mathrm{Re}(F(\varphi), \varphi)_E = (\nu|\omega|^2, v) + (f, v) + \mathrm{Im}(g, \omega). \tag{18}$$

根据引理2, (14) 式和(16) 式至(18) 式以及Gronwall 不等式可得

$$\|\varphi\|_E^2 \leqslant \left(\|\varphi(0)\|^2 + \frac{\nu^2\|\omega(0)\|^4}{\alpha(\beta - \sigma_0)} + \frac{4\nu^2\|\omega(0)\|^2\|g\|^2}{\alpha(\beta - 2\sigma_0)\beta^2}\right)e^{-2\sigma_0 t} +$$
$$\frac{\|f\|^2}{\alpha\sigma_0} + \frac{\nu^2\|g\|^4}{\alpha\sigma_0\beta^4} + \frac{\|g\|^2}{2\sigma_0\beta}, \tag{19}$$

其中 $\sigma_0 = \min\{\sigma, \beta/4\}$. 因此

$$\limsup_{t \to +\infty}\|\varphi\|_E^2 \leqslant \frac{\|f\|^2}{\alpha\sigma_0} + \frac{\nu^2\|g\|^4}{\alpha\sigma_0\beta^4} + \frac{\|g\|^2}{2\sigma_0\beta}. \tag{20}$$

根据(19) 式, $\forall \varphi(0) \in E$, 系统(9) 的解 $\varphi(t) = (u(t), v(t), \omega(t))^{\mathrm{T}}$ 在$[0, +\infty)$ 全局存在, 于是由系统(9) 确定的映射$\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$形成一个 E 上的连续半群, 且$\{S(t)\}_{t \geqslant 0}$在 E 中存在一个有界吸收集E.

引理4 如果$f \in l^2$, $g \in L^2$, 那么存在一个以 O 为心, r_0 为半径的有界球 $O = O_E(0, r_0)$ 使得对每一个有界集 $B_0 \in E$ 存在$t(B_0) \geqslant 0$使得$S(t)B_0 \subset O$, $\forall t \geqslant t(B_0)$, 其中

$$r_0^2 = \frac{2\|f\|^2}{\alpha\sigma_0} + \frac{2\nu^2\|g\|^4}{\alpha\sigma_0\beta^4} + \frac{\|g\|^2}{\sigma_0\beta}.$$

因此存在一个与 O 有关的常数$t_0 \geqslant 0$使得

$$S(t)O\subset O,\qquad \forall t\geqslant t_0. \tag{21}$$

3 全局吸引子

我们证明半群$\{S(t)\}_{t\geqslant 0}$在 E 上的全局吸引子的存在性.

引理 5 如果$f\in l^2, g\in L^2$与 $\varphi(0)=(u_0,v_0,\omega_0)\in O$, 那么 $\forall\eta>0$存在$T(\eta)$和$J(\eta)$使得系统(9) 的解 $\varphi(t)=(\varphi_j)_{j\in\mathbf{Z}}=((u_j(t)),(v_j(t)),(\omega_j(t)))_{j\in\mathbf{Z}}\in E, v(t)=\dot{u}(t)+\varepsilon u(t)$ 满足

$$\sum_{|j|\geqslant J(\eta)}\|\varphi_j(t)\|_E^2=\sum_{|j|\geqslant J(\eta)}(|(Bu(t))_j|^2+\lambda|u_j(t)|^2+|v_j(t)|^2+|\omega_j|^2)\leqslant\eta,\qquad\forall t\geqslant T(\eta). \tag{22}$$

证明 选取一个光滑函数 $\theta\in C^1(\mathbf{R}^+,\mathbf{R})$ 满足

$$\theta(s)=0,\ 0\leqslant s\leqslant 1;\quad 0\leqslant\theta(s)\leqslant 1,\ 1\leqslant s\leqslant 2;\quad \theta(s)=1,\ s\geqslant 2, \tag{23}$$

且存在一个常数 C_0 使得对 $s\in\mathbf{R}^+$ 有$|\theta'(s)|\leqslant C_0$. 令 $\varphi(t)=(u(t),v(t),\omega(t))=(\varphi_j)_{j\in\mathbf{Z}}=((u_j(t)),(v_j(t)),(\omega_j))_{j\in\mathbf{Z}}$是系统(9) 的一个解, 其中$v(t)=\dot{u}(t)+\varepsilon u(t)$, $\varphi_j=(u_j,v_j,\omega_j)$. 令 J 为一固定正整数且$x_j=\theta(|j|/J)u_j, y_j=\theta(|j|/J)v_j, z_j=\theta(|j|/J)\omega_j$, $q=(x,y,z)=((x_j),(y_j),(z_j))_{j\in\mathbf{Z}}$. 由 q 与系统(9) 作内积$(\cdot,\cdot)_E$, 取实部得

$$\mathrm{Re}(\dot{\varphi},q)_E+\mathrm{Re}(C\varphi,q)_E=\mathrm{Re}(F(\varphi),q)_E. \tag{24}$$

类似于引理2、引理 3 以及(19) 式的证明可以得到

$$\mathrm{Re}(\dot{\varphi},q)_E\geqslant\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\theta\left(\frac{|j|}{J}\right)\|\varphi_j\|_E^2-\frac{C_0r_0^2}{J}\left(4+\frac{1}{2\lambda}+\frac{4\varepsilon^2}{\lambda}\right), \tag{25}$$

其中

$$\|\varphi_j\|_E^2=|(Bu)_j|^2+\lambda|u_j|^2+|v_j|^2+|\omega_j|^2=|u_{j+1}-u_j|^2+\lambda|u_j|^2+|v_j|^2+|\omega_j|^2,$$

$$\mathrm{Re}(C\varphi,q)_E\geqslant\sum_{j\in\mathbf{Z}}\theta\left(\frac{|j|}{J}\right)\left(\sigma(|(Bu)_j|^2+\lambda|u_j|^2+|v_j|^2)+\frac{\alpha}{2}v_j^2+\beta|\omega_j|^2\right)-\frac{C_0r_0^2}{J}\left(2+\frac{1+2\varepsilon}{\lambda}\right) \tag{26}$$

以及

$$\mathrm{Re}(F(\varphi),q)_E\leqslant\frac{\beta}{2}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\theta\left(\frac{|j|}{J}\right)|\omega_j|^2+\frac{\alpha}{2}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\theta\left(\frac{|j|}{J}\right)v_j^2+p_0+\frac{\nu^2r_0^4}{\alpha}\mathrm{e}^{-\beta t}+\frac{2C_0\nu^2r_0^4}{\alpha\beta J}, \tag{27}$$

其中 $$p_0=\frac{1}{\alpha}\sum_{|j|\geqslant J}f_j^2+\left(\frac{1}{2\beta}+\frac{\nu^2r_0^2}{\alpha\beta^2}\right)\sum_{|j|\geqslant J}|g_j|^2,$$

把(25) 式至(27) 式代入(24) 式, 再根据$f\in l^2, g\in L^2$, 从而 $\forall\eta>0$, 存在 $J(\eta)$ 和 $t_1(\eta)\geqslant t_0$ 使得对 $t\geqslant t_1(\eta)\geqslant t_0$ 与 $J\geqslant J(\eta)$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{j\in\mathbf{Z}}\theta\left(\frac{|j|}{J}\right)\|\varphi_j\|_E^2+2\sigma_0\sum_{j\in\mathbf{Z}}\theta\left(\frac{|j|}{J}\right)\|\varphi_j\|_E^2\leqslant\sigma_0\eta.$$

由 Gronwall 不等式,

$$\sum_{j\in\mathbf{Z}}\theta\left(\frac{|j|}{J}\right)\|\varphi_j\|_E^2\leqslant r_0^2\mathrm{e}^{-2\sigma_0(t-t_0)}+\frac{\eta}{2},\qquad\forall t\geqslant t_0.$$

取 $T(\eta)=\max\left\{t_0, t_0+(1/2\sigma_0)\ln(2r_0^2)/\eta, t_1(\eta)\right\}$, 那么对 $t\geqslant T(\eta)$ 和 $J\geqslant J(\eta)$ 有

$$\sum_{|j|\geqslant 2J}\|\varphi_j\|_E^2\leqslant\sum_{j\in\mathbf{Z}}\theta\left(\frac{|j|}{J}\right)\|\varphi_j\|_E^2\leqslant\eta. \tag{28}$$

引理 6　假设 $f\in l^2$, $g\in L^2$, 那么由(11) 式定义的半群 $\left\{S(t)\right\}_{t\geqslant 0}$ 在 E 中一致紧, 即如果 $\left\{\varphi_n\right\}$ 在 E 中有界且 $t_n\to+\infty$, 那么 $\left\{S(t_n)\varphi_n\right\}$ 在 E 中列紧.

证明　存在正常数 d 使得 $\|\varphi_n\|_E\leqslant d$, $n=1,2,\dots$. 由(19) 式与引理 4 可知, 存在 $t_d>0$ 使得

$$S(t)\varphi_n\subset O,\qquad\forall t\geqslant t_d,\ O \text{ 是引理 4 中的吸收集}, \tag{29}$$

由 $t_n\to+\infty$, 存在 $n_1(d)$ 使得如果 $n\geqslant n_1(d)$, 那么 $t_n\geqslant t_d$, 因此

$$S(t_n)\varphi_n\subset O,\qquad\forall n\geqslant n_1(d), \tag{30}$$

由 E 是希尔伯特空间及(30) 式可知存在 $\varphi_0\in E$ 和 $\left\{S(t_n)\varphi_n\right\}$ 的一个子列(仍用 $\left\{S(t_n)\varphi_n\right\}$ 表示) 使得 $S(t_n)\varphi_n$ 在 E 中弱收敛于 φ_0, 我们把这个收敛简单地表示为

$$S(t_n)\varphi_n\to\varphi_0\in E,\qquad n\to\infty, \tag{31}$$

其实, 此收敛是强收敛, 即对 $\forall\eta>0$, 存在 $n(\eta)$ 使得 $\|S(t_n)\varphi_n-\varphi_0\|_E\leqslant\eta$, $\forall n\geqslant n(\eta)$.

对 $\eta>0$, 由引理 5 与(29) 式, 存在 $J_1(\eta)$, $t(\eta)$ 使得

$$\sum_{|j|\geqslant J_1(\eta)}\|(S(t)(S(t_d)\varphi_n))_j\|_E^2\leqslant\frac{\eta^2}{8},\qquad t\geqslant t(\eta).$$

由 $t_n\to+\infty$, 存在 $n_2(d,\eta)$ 使得如果 $n\geqslant n_2(d,\eta)$, 则 $t_n\geqslant t_d+t(\eta)$. 因此,

$$\sum_{|j|\geqslant J_1(\eta)}\|(S(t_n)\varphi_n)_j\|_E^2=\sum_{|j|\geqslant J_1(\eta)}\|(S(t_n-t_d)S(t_d)\varphi_n)_j\|_E^2\leqslant\frac{\eta^2}{8}. \tag{32}$$

又因为 $\varphi_0\in E$, 存在 $J_2(\eta)$ 使得

$$\sum_{|j|\geqslant J_2(\eta)}\|(\varphi_0)_j\|_E^2\leqslant\frac{\eta^2}{8}. \tag{33}$$

令 $J(\eta)=\max\left\{J_1(\eta), J_2(\eta)\right\}$, 由(31) 式可得 $((S(t_n)\varphi_n)_j)_{|j|\leqslant J(\eta)}$ 在 $\mathbf{R}_\lambda^{2J(\eta)+1}\times\mathbf{R}^{2J(\eta)+1}\times\mathbf{C}^{2J(\eta)+1}$ $(n\to+\infty)$ 中收敛于 $((\varphi_0)_j)_{|j|\leqslant J(\eta)}$, 也就是存在 $n_3(\eta)$ 使得

$$\sum_{|j|\leqslant J(\eta)}\|(S(t_n)\varphi_n)_j-(\varphi_0)_j\|_E^2\leqslant\frac{\eta^2}{2},\qquad\forall n\geqslant n_3(\eta). \tag{34}$$

令 $n(\eta)=\max\left\{n_1(d), n_2(d,\eta), n_3(\eta)\right\}$, 由(32) 式至(34) 式, 则对 $\forall n\geqslant n(\eta)$,

$$\|S(t_n)\varphi_n-\varphi_0\|_E^2=\sum_{|j|\leqslant J(\eta)}\|(S(t_n)\varphi_n)_j-(\varphi_0)_j\|_E^2+\sum_{|j|>J(\eta)}\|(S(t_n)\varphi_n)_j-(\varphi_0)_j\|_E^2\leqslant\eta^2.$$

证明完毕. 根据引理 4 与引理 6, 可以得到系统(9) 的半群的全局吸引子的存在性.

定理 1　如果 $f\in l^2$, $g\in L^2$, 那么系统(9) 的半群 $\left\{S(t)\right\}_{t\geqslant 0}$ 在 E 中有一个全局吸引子 $\Omega\in E$.

4　全局吸引子的 Kolmogorov δ-熵

在这节, 考虑系统(9) 的全局吸引子 Ω 的 Kolmogorov δ-熵的上界. 下面我们用 $\Upsilon=\left\{\psi^*=(\psi_j)_{|j|\leqslant n}\in\mathbf{R}^{2n+1}: |\psi_j|\leqslant r_0, j\in\mathbf{Z}\right\}$ 表示 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 中边长为 $2r_0$ 的多面体, 用 $n_1(\delta,\Upsilon)$ 表示 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 中以 $\delta/2$ 为半径的用来覆盖多面体 Υ 的球的个数. 易知 Υ 可由$([2r_0\sqrt{2n+1}/\delta]$

$+1)^{2n+1}$($[2r_0\sqrt{2n+1}/\delta]$ 表示不大于 $2r_0\sqrt{2n+1}/\delta$ 的最大整数) 个边长为 $\delta/\sqrt{2n+1}$ 的小正多面体所覆盖, 并且每一个这样的小正多面体都有一个以 $\delta/2$ 为半径的同心外接球. 因此, 覆盖 Υ 的半径为 $\delta/2$ 的球的个数 $n_1(\delta,\Upsilon)$ 等于上述小正多面体的个数即 $n_1(\delta,\Upsilon)=(2r_0\sqrt{2n+1}/\delta+1)^{2n+1}$. 用 $\phi_1^*,\phi_2^*,\cdots,\phi_{n_1(\delta,\Upsilon)}^*$, 分别表示这 $n_1(\delta,\Upsilon)$ 个外接球的中心.

引理 7[14] 在空间 $\mathbf{R}^{2n+1}$ 中, $n_1(\delta,\Upsilon)=([2r_0\sqrt{2n+1}/\delta]+1)^{2n+1}$ 个以 $\delta/2$ 为半径, $\phi_1^*,\phi_2^*,\cdots,\phi_{n_1(\delta,\Upsilon)}^*$ 为心的球可以覆盖正多面体 $\Upsilon=\left\{\phi^*=(\phi_j)_{|j|\leqslant n}:|\phi_j|\leqslant r_0\right\}$.

引理 8 给定 $\delta>0$, 系统(9) 的全局吸引子 Ω 可以被 $n(\delta,\Omega)$ 个 $\delta/2$ 球覆盖, 其中 $n(\delta,\Omega)=\left(([2r_0\sqrt{2J(\delta)+1}/\sqrt{\lambda}\delta]+1)\times([2r_0\sqrt{2J(\delta)+1}/\delta]+1)^3\right)^{2J(\delta)+1}$.

证明 $\forall\varphi=(\varphi_j)_{j\in\mathbf{Z}}\in\Omega$, 把 φ 分解成两部分即 $\varphi=(\xi_j)_{j\in\mathbf{Z}}+(\zeta_j)_{j\in\mathbf{Z}}=\xi+\zeta$, 其中

$$\xi_j=(a_j,b_j,\tau_j)=\begin{cases}(u_j,v_j,\omega_j), & |j|\leqslant J(\delta),\\ 0, & |j|>J(\delta),\end{cases}$$

$$\zeta_j=(c_j,e_j,\rho_j)=\begin{cases}0, & |j|\leqslant J(\delta),\\ (u_j,v_j,\omega_j), & |j|>J(\delta).\end{cases}$$

由引理 4、5 可知 $\|\xi\|_E\leqslant r_0$ 和 $\|\zeta\|_E\leqslant\delta/2$. 由 $\|\xi\|_E\leqslant r_0$, $\|\varphi\|_E^2=\sum_{j\in\mathbf{Z}}((Bu)_j^2+\lambda u_j^2+v_j^2+|\omega_j|^2)$ 和 $(Bu)_j=u_{j+1}-u_j$ 可得

$$r_0^2\geqslant\|\xi\|_E^2=\sum_{|j|\leqslant J(\delta)}((a_{j+1}-a_j)^2+\lambda a_j^2+b_j^2+|\tau_j|^2)\geqslant$$
$$\lambda\|a\|^2+\|b\|^2+\|\tau\|^2.$$

因此, $\|a\|\leqslant r_0/\sqrt{\lambda}$, $\|b\|\leqslant r_0$, $\|\tau\|\leqslant r_0$, 于是 $|a_j|\leqslant r_0/\sqrt{\lambda}$, $|b_j|\leqslant r_0$, $|\tau_j|\leqslant r_0$, $j\in\mathbf{Z}$. 多面体 $\Upsilon=\left\{\xi=(a_l,b_m,\tau_n)_{|l|,|m|,|n|\leqslant J(\delta)}\in\mathbf{R}_\lambda^{2J(\delta)+1}\times\mathbf{R}^{2J(\delta)+1}\times\mathbf{C}^{2J(\delta)+1}:|a_j|\leqslant r_0/\sqrt{\lambda},|b_j|\leqslant r_0,|\tau_j|\leqslant r_0\right\}$, 由引理 7, Υ 可被 $n(\delta,\Upsilon)$ 个 $\delta/2$- 球所覆盖,

$$n(\delta,\Upsilon)=\left(([2r_0\sqrt{2J(\delta)+1}/\sqrt{\lambda}\delta]+1)\times([2r_0\sqrt{2J(\delta)+1}/\delta]+1)^3\right)^{2J(\delta)+1}.$$

令 $\varphi_J^*=(a_{l,J}^*,b_{m,J}^*,\tau_{n,J}^*)_{|l|,|m|,|n|\leqslant J(\delta)}\in\mathbf{R}_\lambda^{2J(\delta)+1}\times\mathbf{R}^{2J(\delta)+1}\times\mathbf{C}^{2J(\delta)+1}$, $J=1,2,\cdots,n(\delta,\Upsilon)$ 分别是这些 $\delta/2$- 球的中心. 选取 $\varphi_J=(\varphi_{J,l,m,n})_{l,m,n\in\mathbf{Z}}$, $J=1,2,\cdots,n(\delta,\Upsilon)$, 其中

$$\varphi_{J,l,m,n}=\begin{cases}\varphi_J^*, & |l|,|m|,|n|\leqslant J(\delta),\\ 0, & |l|>J(\delta)\ 或\ |m|>J(\delta)\ 或\ |n|>J(\delta).\end{cases}$$

则对如上的 $\forall\xi=(\xi_j)_{j\in\mathbf{Z}}=((a_j,b_j,\tau_j))_{j\in\mathbf{Z}}$, 存在 $J(1\leqslant J\leqslant n(\delta,\Upsilon))$ 使得 $\|\xi-\varphi_J\|_E<\delta/2$, $J=1,2,\cdots,n(\delta,\Upsilon)$. 因此, $\|\varphi-\varphi_J\|_E=\|\xi+\zeta-\varphi_J\|_E\leqslant\|\xi-\varphi_J\|_E+\|\zeta\|_E<\delta/2+\delta/2=\delta$. 所以(9) 式的吸引子 Ω 可以被 $n(\delta,\Omega)=n(\delta,\Upsilon)$ 个分别以 $\varphi_J=(\varphi_{J,l,m,n})_{l,m,n\in\mathbf{Z}}$, $J=1,2,\cdots,n(\delta,\Upsilon)$) 为中心, δ 为半径的 δ- 球覆盖. 根据引理 8, 得到如下结果.

定理 2 如果 $f\in l^2$, $g\in L^2$ 并且给定 $\delta>0$, 则系统(9) 的全局吸引子 Ω 的一个上界是

$$(2J(\delta)+1)\left(\ln\left(\left[\frac{2r_0\sqrt{2J(\delta)+1}}{\sqrt{\lambda}\delta}\right]+1\right)+3\ln\left(\left[\frac{2r_0\sqrt{2J(\delta)+1}}{\delta}\right]+1\right)\right),$$

其中 $r_0^2=\dfrac{2\|f\|^2}{\alpha\sigma_0}+\dfrac{2\nu^2\|g\|^4}{\alpha\sigma_0\beta^4}+\dfrac{\|g\|^2}{2\sigma_0\beta}$, 且 $J(\delta)$ 是满足下述不等式的最小正整数

$$\frac{2}{\alpha}\sum_{|j|\geqslant J} f_j^2+\left(\frac{1}{\beta}+\frac{2\nu^2 r_0^2}{\alpha\beta^2}\right)\sum_{|j|\geqslant J}|g_j|^2+\frac{p}{J}+\frac{4\nu^2 r_0^4}{\alpha}\mathrm{e}^{-\beta t}\leqslant\sigma_0\delta,\qquad \forall t\geqslant t_1(\delta),$$

其中 σ_0 同(19) 式, C_0 与 J 无关且 $p=C_0 r_0^2(12\lambda+3+4\varepsilon+8\varepsilon^2)/\lambda+4C_0\nu^2 r_0^4/(\alpha\beta)$.

注　如果 $f_j=g_j=0$, $\forall j\in\mathbf{Z}$, 则全局吸引子 Ω 正好是一个吸引 E 中的每个有界集的平衡点. 在此情况下, Ω 的 Kolmogorov ε-熵是0. 如果 $\|f\|\neq 0$ 或 $\|g\|\neq 0$, 那么, 一般来说, Ω 的准确的几何结构并不知道, 但是仅仅知道它包含在一个有界球中. 显然, 这时 Ω 一般是无穷维的.

5　吸引子的逼近

在这部分, 我们用有限维常微分系统的全局吸引子来逼近全局吸引子 Ω. 令 $n\in\mathbf{Z}^+$ 表示正整数, 考虑如下的 $(2n+1)$ 维常微系统:

$$\left\{\begin{aligned}
&\ddot U_{-n}+\alpha\dot U_{-n}=U_n-2U_{-n}+U_{-n+1}-\lambda U_{-n}+\nu|W_{-n}|^2+f_{-n},\\
&\ddot U_{-n+1}+\alpha\dot U_{-n+1}=U_{-n}-2U_{-n+1}+U_{-n+2}-\lambda U_{-n+1}+\\
&\qquad\nu|W_{-n+1}|^2+f_{-n+1},\\
&\vdots\\
&\ddot U_{n-1}+\alpha\dot U_{n-1}=U_{n-2}-2U_{n-1}+U_n-\lambda U_{n-1}+\nu|W_{n-1}|^2+f_{n-1},\\
&\ddot U_n+\alpha\dot U_n=U_{n-1}-2U_n+U_{-n}-\lambda U_n+\nu|W_n|^2+f_n,\\
&\mathrm{i}\dot W_{-n}=-(W_n-2W_{-n}+W_{-n+1})+\mathrm{i}\beta W_{-n}+W_{-n}U_{-n}+g_{-n},\\
&\mathrm{i}\dot W_{-n+1}=-(W_{-n}-2W_{-n+1}+W_{-n+2})+\mathrm{i}\beta W_{-n+1}+\\
&\qquad W_{-n+1}U_{-n+1}+g_{-n+1},\\
&\vdots\\
&\mathrm{i}\dot W_{n-1}=-(W_{n-2}-2W_{n-1}+W_n)+\mathrm{i}\beta W_{n-1}+W_{n-1}U_{n-1}+g_{n-1},\\
&\mathrm{i}\dot W_n=-(W_{n-1}-2W_n+W_{-n})+\mathrm{i}\beta W_n+W_nU_n+g_n,
\end{aligned}\right.\tag{35}$$

具有如下初值

$$U_j(0)=U_{j0},\quad \dot U_j(0)=U_{j0,1}\in\mathbf{R};\quad W_j(0)=W_{j0,1}\in\mathbf{C},\qquad j=-n,-n+1,\cdots,n-1,n.\tag{36}$$

那么系统(35) 式和(36) 式写成向量形式为

$$\left\{\begin{aligned}
&\ddot U+\alpha\dot U=A^*U-\lambda U_{-n}+\nu|W|^2+f^*,\\
&\mathrm{i}\dot W=A^*W+\mathrm{i}\beta W+WU+g^*,\\
&U(0)=(U_{j0})_{|j|\leqslant n},\ \dot U(0)=(U_{j0,0})_{|j|\leqslant n}\in\mathbf{R}^{2n+1},\\
&W(0)=(W_{j0})_{|j|\leqslant n}\in\mathbf{C}^{2n+1},
\end{aligned}\right.\tag{37}$$

其中 $U=(U_j)_{|j|\leqslant n}$, 且 $f^*=(f_j)_{|j|\leqslant n}$, $g^*=(g_j)_{|j|\leqslant n}$ 分别是由 $f=(f_j)_{j\in\mathbf{Z}}$, $g=(g_j)_{j\in\mathbf{Z}}$ 被切尾后生成的 $(2n+1)$ 维元, 并且

$$A^*=\begin{pmatrix}
2&-1&0&0&0&\cdots&0&0&-1\\
-1&2&-1&0&0&\cdots&0&0&0\\
0&-1&2&-1&0&\cdots&0&0&0\\
\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\bullet&\ddots&\bullet&\bullet&\bullet\\
0&0&0&0&0&\cdots&-1&2&-1\\
-1&0&0&0&0&\cdots&0&-1&2
\end{pmatrix}_{(2n+1)\times(2n+1)}.$$

令

$$B^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}_{(2n+1)\times(2n+1)}.$$

那么

$$A^* = B^*(B^*)^{\mathrm{T}} = (B^*)^{\mathrm{T}} B^*. \quad \forall U = (U_j)_{|j|\leqslant n},\ V = (V_j)_{|j|\leqslant n} \in \mathbf{R}^{2n+1}(\mathbf{C}^{2n+1}),$$

定义

$$(U, V) = \sum_{|j|\leqslant n} U_j \overline{V_j};\ \| U\|^2 = \sum_{|j|\leqslant n} |U_j|^2;\ (U, V)_\lambda = (B^* U, B^* V) + \lambda(U, V),$$

$$\| U\|_\lambda^2 = \| B^* U\|^2 + \lambda \| U\|^2 = \sum_{|j|\leqslant n}(|U_{j+1} - U_j|^2 + \lambda |U_j|^2).$$

令 $\mathbf{R}_\lambda^{2n+1} = (\mathbf{R}^{2n+1}, \|\cdot\|_\lambda)$, 赋予 $E^* = \mathbf{R}_\lambda^{2n+1} \times \mathbf{R}^{2n+1} \times \mathbf{C}^{2n+1}$ 内积与范数如下:

$$(Y_1, Y_2)_{E^*} = \sum_{|j|\leqslant n}((B^* U^{(1)})_j (B^* U^{(2)})_j + \lambda U_j^{(1)} U_j^{(2)} + V_j^{(1)} V_j^{(2)} + W_j^{(1)} \overline{W_j^{(2)}}),$$

$$\| Y_1\|_{E^*}^2 = (Y_1, Y_1)_{E^*},$$

$\forall Y_j = (U^{(l)}, V^{(l)}, W^{(l)}) = ((U_j^{(l)}), (V_j^{(l)}), (W_j^{(l)}))_{|j|\leqslant n} \in E^*$, $l = 1, 2$, 则 E^* 是希尔伯特空间. 令 $V = \dot{U} + \varepsilon U$, 那么系统(37) 在空间 E^* 上等价于下面的关于时间的一阶系统.

$$\dot{Y} + C^*(Y) = F^*(Y),\quad Y(0) = (U(0), \dot{U}(0) + \varepsilon U(0), W(0))^{\mathrm{T}} \in E^* \tag{38}$$

其中 $Y = (U, V, W)$, $F^*(Y) = (0, \nu |W|^2 + f^*, \mathrm{i}WU - \mathrm{i}g^*)^{\mathrm{T}}$, $C^*(Y) = (\varepsilon U - V, A^* U + \lambda U + \varepsilon(\varepsilon - \alpha)U + (\alpha - \varepsilon)V, \mathrm{i}A^* W + \beta W)^{\mathrm{T}}$.

由于 $f^*, g^* \in \mathbf{R}^{2n+1}$ 且 A^* 是 $(2n+1)\times(2n+1)$ 矩阵, 那么系统(38) 在 E^* 中适定. 又由后面的引理 10 可知系统(38) 的解 $Y(t)$ 在有限时间内有界, 因此 $Y(t)$ 全局存在, 就是说, 对任意 $Y(0) \in E^*$, 存在一个唯一的解 $Y(t) \in C((0, +\infty), E^*) \cap C^1((0, +\infty), E^*)$ 并且解映射 $S_n(t): Y(0) \to Y(t) = S_n(t)Y(0) \in E^*$ 生成了 E^* 上的连续半群 $\{S_n(t)\}_{t\geqslant 0}$.

类似于引理 2, 引理 3, 引理 4 和引理 5, 可得到如下引理.

引理 9 对任意 $Y = (U, V, W)^{\mathrm{T}} \in E^*$,

$$\mathrm{Re}(C^* Y, Y)_{E^*} \geqslant \sigma(\| U\|_\lambda^2 + \| V\|^2) + (\alpha/2)\| V\|^2 + \beta \| W\|^2.$$

引理 10 存在以 O 为心, r_0 为半径的有界球 $O^* = O_{E^*}^*(O, r_0)$, 使得对每个有界集 $\beta^* \in E^*$, 存在 $T(\beta^*) \geqslant 0$ 使得 $S_n(t)\beta^* \subset O^*$, $\forall t \geqslant T(\beta^*)$, $n = 1, 2, \ldots$, 其中 r_0 见引理 4, 且与 n 无关. 半群 $\{S_n(t)\}_{t\geqslant 0}$ 存在全局吸引子 $\Omega_n \subset O^* \subset E^*$.

于是容易得到 $S_n(t)\Omega_n = \Omega_n$, $\forall t \in \mathbf{R}$.

引理 11 对任意初值 $\varphi_n(0) \in O^*$, 系统(38) 的解 $\varphi_n(t) = (U_n(t), V_n(t), W_n(t))$ 的分量 $W_n(t)$ 满足

$$\| W_n(t)\|^2 \leqslant \| W_n(0)\|^2 \mathrm{e}^{-\beta t} + \| g^*\| / \beta^2.$$

引理 12 如果 $f \in l^2$, $g \in L^2$, 那么 $\forall \eta > 0$, 存在 $T_n(\eta)$ 和 $J_n(\eta)$ 使得系统(38) 的解 $Y(t) = (Y_j(t))_{|j|\leqslant n} = (U_j(t), V_j(t), W_j(t))_{|j|\leqslant n} \in \Omega_n$, $V_j(t) = \dot{U}_j(t) + \varepsilon U_j(t)$, 满足

$$\sum_{J_n(\eta)\leqslant|j|\leqslant n} \| Y_j(t)\|^2 = \sum_{J_n(\eta)\leqslant|j|\leqslant n}((B^* U(t))_j^2 + \lambda U_j^2(t) + V_j^2(t) + |W_j(t)|^2) \leqslant \eta, \qquad \forall t \geqslant T_n(\eta).$$

接下来,我们把元 $U=(U_j)_{|j|\leqslant n}\in\mathbf{R}^{2n+1}$, $W=(U_j)_{|j|\leqslant n}\in\mathbf{C}^{2n+1}$ 都扩充到 l^2, L^2 中的元并使得 $U_j=0, W_j=0$ 对 $|j|>n$(仍然用 U 与 W 表示它们).

引理 13 假如 $f\in l^2$, $g\in L^2$ 且 $\varphi_n(0)\in\Omega_n$, 那么存在 $\varphi_n(0)$ 的一个子列 $\left\{\varphi_{n_k}(0)\right\}$ 和 $\varphi(0)\in\Omega$ 使得 $\varphi_{n_k}(0)$ 在 E 中收敛于 $\varphi(0)$.

证明 令 $\varphi_n(t)=S_n(t)\varphi_n(0)=(U_n(t), V_n(t), W_n(t))\in E^*=\mathbf{R}_\lambda^{2n+1}\times\mathbf{R}^{2n+1}\times\mathbf{C}^{2n+1}$ 为系统(38)式的一个解. 因为对所有 $t\in\mathbf{R}$, $\varphi_n(0)\in\Omega_n$, $\varphi_n\in\Omega_n\in O^*$, 因此, $\forall t\in\mathbf{R}$, 成立

$$\begin{aligned}\|\varphi_n(t)\|_{E^*}=&\|\varphi_n(t)\|_E=\\&(\|BU_n\|^2+\lambda\|U_n\|^2+\|V_n\|^2+\beta\|W_n\|^2)^{1/2}\leqslant r_0,\\&\qquad n=1,2,\cdots.\end{aligned}\tag{39}$$

由(38)式,则

$$\|\dot\varphi_n(t)\|_E\leqslant\|C^*(\varphi_n(t))\|_E+\|F^*(\varphi_n(t))\|_E.\tag{40}$$

这里

$$\begin{aligned}\|C^*(\varphi_n(t))\|_E^2\leqslant&24(\varepsilon^2\|BU_n\|^2+\|BV_n\|^2+(\lambda\varepsilon^2+\lambda+\varepsilon^4+\alpha^4)\|U_n\|^2+\\&\beta^2\|W_n\|^2+(\lambda+\alpha^2+\varepsilon^2)\|V_n\|^2+\|A^*W_n\|^2+\|A^*U_n\|^2)\end{aligned}$$

和 $\|BU_n\|^2\leqslant4\|U_n\|^2$, $\|BV_n\|^2\leqslant4\|V_n\|^2$, $\|A^*U_n\|^2\leqslant16\|U_n\|^2$, $\|A^*W_n\|^2\leqslant16\|W_n\|^2$, 因此, 由(38)式、(39)式和引理 11, 存在 $C_1(r_0)$ 与 $C_2(r_0,\|g\|,\|f\|)$ 使得

$$\begin{cases}\|C^*(\varphi_n(t))\|_E^2\leqslant C_1(r_0),\\\|F^*(\varphi_n(t))\|_E\leqslant C_2(r_0,\|g\|,\|f\|),\qquad\forall t\in\mathbf{R};\ n=1,2,\cdots.\end{cases}\tag{41}$$

所以,由(40)式和(41)式,

$$\|\dot\varphi_n(t)\|_E\leqslant C_3(r_0,\|g\|,\|f\|),\qquad\forall t\in\mathbf{R},\ n=1,2,\cdots.\tag{42}$$

令 $I_k(k=1,2,\cdots)$ 是 $\mathbf{R}$ 的一个紧区间序列使得 $I_k\subset I_{k+1}$ 和 $\cup_k I_k=\mathbf{R}$. 取 $s,t\in I_k$, 则有

$$\|\varphi_n(t)-\varphi_n(s)\|_E\leqslant C_3(r_0,\|g\|,\|f\|)\,|t-s|,\tag{43}$$

这就表明 $\left\{\varphi_n(t)\right\}_{n=1}^\infty$ 在 $C(I_k,E)$ 中是等度连续的. 由(39)式,对于固定的 t, $\left\{\varphi_n(t)\right\}_{n=1}^\infty$ 在 E 中一致有界,因此存在 $\left\{\varphi_n(t)\right\}_{n=1}^\infty$ 的一个子列(仍然用 $\left\{\varphi_n(t)\right\}_{n=1}^\infty$ 表示)和 $\varphi_t^*\in E$ 使得 $\varphi_n(t)$ 弱收敛于 $\varphi_t^*\in E$, 当 $n\to+\infty$ 时,表示为

$$\varphi_n(t)\to\varphi_t^*,\qquad\text{在 } C(I,E) \text{ 中收敛, 当 } n\to+\infty.\tag{44}$$

类似于引理 6 的证明, 我们可以证明(44)式中的弱收敛是一个强收敛即 $\forall t\in I_k$, $\left\{\varphi_n(t)\right\}_{n=1}^\infty$ 在 E 中列紧. 由Ascoli 定理, 存在 $\left\{\varphi_n(t)\right\}$ 的一个子列 $\left\{\varphi_{n_1}(t)\right\}$ 和 $\varphi_t(t)\in C(I_k,E)$ 使得 $\varphi_{n_1}(t)$ 在 $C(I_k,E)$ 中收敛于 $\varphi_t\in C(I_k,E)$. 又由 Ascoli 定理和归纳法, 存在 $\left\{\varphi_{n_k}(t)\right\}$ 的一个子列 $\left\{\varphi_{n_{k+1}}(t)\right\}$ 使得 $\varphi_{n_{k+1}}(t)$ 收敛于 $\varphi_t\in C(I_{k+1},E)$. 用通常的方法取一个对角线子列, 存在 $\left\{\varphi_n(t)\right\}$ 的一个子列 $\left\{\varphi_{n_k}(t)\right\}$ 和 $\varphi(t)\in C(\mathbf{R},E)$ 使得对任意紧集 $I\subset\mathbf{R}$,

$$\varphi_n(t)\to\varphi(t)\in C(I,E),\qquad n\to+\infty.\tag{45}$$

由(39)式, 对 $\varphi(t)=(U(t),V(t),W(t))=(U_j(t),V_j(t),W_j(t))_{j\in\mathbf{Z}}\in E$, $V(t)=\dot U(t)+\varepsilon U(t)$,

$$\|\varphi(t)\|=(\|BU\|^2+\lambda\|U\|^2+\|V\|^2+\beta\|W\|^2)^{1/2}\leqslant C_4(r_0).\tag{46}$$

现在我们证明 $\varphi(t)\in\Omega$ 为系统(9)的半群 $\left\{S(t)\right\}_{t\geqslant0}$ 的全局吸引子. 我们用 $\left\{\varphi_n(t)\right\}$ 表示

$\left\{\varphi_{n_k}(t)\right\}$, 由(42) 式, 可以得到 $\varphi_n(t)$ 在 $L^\infty(\mathbf{R}, E)$ 弱 * 收敛于 $\varphi(t)$, 当 $n\to+\infty$, 我们把它简单地表示为

$$\varphi_n(t)\to\varphi(t),\qquad \text{在 } L^\infty(\mathbf{R}, E) \text{ 中弱收敛},\ n\to+\infty. \tag{47}$$

令 $j\in\mathbf{Z}$ 和 $n\geqslant|j|$. 因为 $\varphi_n(t)=(U_{n,j}(t), V_{n,j}(t), W_{n,j}(t))_{|j|\leqslant n}\in E^*$ 是系统(38) 的一个解, 则

$$\begin{cases}\ddot U_{n,j}+\alpha\dot U_{n,j}=U_{n,j-1}-2U_{n,j}+U_{n,j+1}-\lambda U_{n,j}+\nu|W_{n,j}|^2+f_j,\\ \mathrm{i}\dot W_{n,j}=-(W_{n,j-1}-2W_{n,j}+W_{n,j+1})-\mathrm{i}\beta W_{n,j}-W_{n,j}U_{n,j}+g_j,\end{cases}\quad t\in\mathbf{R}. \tag{48}$$

那么 $\forall\vartheta\in C_0^\infty(I)$, 我们有

$$\begin{cases}\int_I\ddot U_{n,j}\vartheta(t)\mathrm{d}t+\alpha\int_I\dot U_{n,j}\vartheta(t)\mathrm{d}t=\int_I(U_{n,j-1}-2U_{n,j}+\\ \qquad U_{n,j+1}-\lambda U_{n,j}+\nu|W_{n,j}|^2)\vartheta(t)\mathrm{d}t+\int_I f_j\vartheta(t)\mathrm{d}t,\\ \mathrm{i}\int_I\dot W_{n,j}\vartheta(t)\mathrm{d}t=\int_I(-W_{n,j-1}+2W_{n,j}-W_{n,j+1}-\mathrm{i}\beta W_{n,j}-\\ \qquad W_{n,j}U_{n,j})\vartheta(t)\mathrm{d}t+\int_I g_j\vartheta(t)\mathrm{d}t,\end{cases}\quad t\in\mathbf{R}. \tag{49}$$

显然有

$$\begin{cases}\ddot U_j+\alpha\dot U_j=U_{j-1}-2U_j+U_{j+1}-\lambda U_j+\nu|W_j|^2+f_j,\\ \mathrm{i}\dot W_j=-(W_{j-1}-2W_j+W_{j+1})-\mathrm{i}\beta W_j-W_jU_j+g_j,\end{cases}\quad t\in I. \tag{50}$$

由 I 的任意性, $\forall t\in\mathbf{R}$, (50) 式成立, 这就意味着 $\varphi(t)=(U(t), V(t), W(t))$ 是系统(9) 的一个解. 由(46) 式, 对 $t\in\mathbf{R}$, $\varphi(t)$ 有界, 于是 $\varphi(t)\in\Omega$, 所以 $\varphi_n(0)\to\varphi(0)\in\Omega$. 证明完毕. 由引理 13, 直接有 Ω 的上半连续性.

定理 3 如果 $f\in l^2$, $g\in L^2$, 那么 $\lim\limits_{n\to+\infty}d_E(\Omega_n,\Omega)=0$, 其中

$$d_E(\Omega_n,\Omega)=\sup_{p\in\Omega_n}\inf_{q\in\Omega}\|p-q\|_E.$$

注 在具有通常内积与范数的空间 $l^2\times l^2\times L^2$ 中, 考虑由系统(6) 和系统(7) 确定的映射

$$S_0(t):(U_0, U_{10}, W_0)^{\mathrm T}\to(U(t),\dot U(t), W(t))^{\mathrm T}\in l^2\times l^2\times L^2.$$

因为 $S_0(t)=R_{-\varepsilon}S(t)R_\varepsilon$, $R_\varepsilon=\begin{pmatrix}1&0&0\\ \varepsilon&1&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}$ 是 $l^2\times l^2\times L^2$ 上的同构, 且 $\left\{S(t)\right\}_{t\geqslant0}$ 有一个全局吸引子 $\Omega\in E$, $\left\{S_0(t)\right\}_{t\geqslant0}\in E$ 的全局吸引子是 $R_{-\varepsilon}\Omega$, 这就说明 $\left\{S_0(t)\right\}_{t\geqslant0}$ 在 $l^2\times l^2\times L^2$ 有一个全局吸引子, 因为 $l^2\times l^2\times L^2$ 和 E 有相同的元素并且它们的范数等价.

致谢 本文第一作者感谢湘潭大学博士科研启动基金资助(06QDZ07)

[参 考 文 献]

[1] Chow S N, Mallet-Parat J, Shen W. Traveling waves in lattice dynamical systems[J]. J Diff Equa, 1998, **149**(2): 248-291.

[2] Shen W. Lifted lattices, hyperbolic structures, and topological disorders in coupled map lattices[J]. SIAM J Appl Math, 1996, **56**(5): 1379-1399.

[3] Yu J, Collective behavior of coupled map lattices with asymmetrical coupling[J]. Phys Lett A, 1998, **240**(1/2): 60-64.

[4] Bates P W, Lu K, Wang B, Attractors for lattice dynamical systems[J]. Int J Bifurcations and Chaos, 2001, **11**(1): 143-152.

[5] ZHOU Sheng-fan. Attractor for second order lattice dynamical system[J]. J Diff Equa, 2002, **179**(2): 605-624.

[6] Babin A V, Vishik M I. Attractors of Evolutionary Equations[M]. Nauka, Moscow 1989; English transl stud Math Appl, Vol **25**. Amsterdam: North Holland, 1992.

[7] GUO Bo-lin, LI Yong-sheng, Attractors for Klein-Gordon-Schrödinger Equation in R^3[J]. J Diff Equa, 1997, **136**(1): 356-377.

[8] Lu K, Wang B, Attractor for Klein-Gordon-Schrödinger equation in unbounded domains[J]. J Diff Equa, 2001, **170**(1): 281-316.

[9] Chepyzhov, V V, Vishik M I. Kolmogorov's ε-entropy for the attractor of reaction-diffusion equation [J]. Math Sbornik, 1998, **189**(2): 81-110.

[10] ZHOU Sheng-fan. On dimension of the global attractor for damped nonlinear wave equation[J]. J Math Phys, 1999, **40**(3): 1432-1438.

[11] Hale J K. Asymptotic Behavior of Dissipative Systems[M]. Rhode Island: Amer Math Soc providence, 1988.

[12] Temam R. Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics[M]. Appl Math Sci **68**. New York: Springer-Verlag, 1988.

[13] Hayashi N, Von Wahl W. On the global strong solutions of coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations[J]. J Math Soc Japan, 1987, **39**(2): 489-497.

[14] Lorentz G, GolitschekM, Makovoz Y. Constructive Approximation. Advanced Problem. Grundlehren-der Mathematischen Wissenschaften [M]. ([Functional Principles of Mathematical Sciences] Vol **304**). Berlin: Springer-Verlag, 1996.

Global Attractor for KGS Lattice System

YIN Fu-qi[1], ZHOU Sheng-fan[2], YIN Chang-ming[3], XIAO Cui-hui[1]

(1. College of Mathematics and Computation Science, Xiangtan University, Xiangtan, Hunan 411105, P. R. China;
2. Mathematics and Science College, Shanghai Normal University, Shanghai 200234, P. R. China;
3. College of Computer and Communicational Engineering, Changsha University of Science and Technology, Changsha 410076, P. R. China)

Abstract: The longtime behavior of solutions of a coupled lattice dynamical system of Klein-Gordon-Schrödinger equation(KGS lattice system) was considered. The existence of a global attractor for the system is proved here by introducing an equivalent norm and using "End Tails" of solutions. Then the upper bound of the Kolmogorov δ-entropy of the global attractor is estimated by applying element decomposition and the covering property of a polyhedron by balls of radii δ in the finite dimensional space. Finally, an approximation to the global attractor is presented by the global attractors of finite-dimensional ordinary differential systems.

Key words: attractor; lattice dynamical system; the covering property; element decomposition approximation