文章编号: 1000-0887(2007) 06-0643-08

广义集值强非线性混合似变分不等式的辅助原理和三步迭代算法*

徐海丽, 郭兴明

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(我刊编委郭兴明来稿)

摘要: 使用辅助原理技巧研究了一类广义集值强非线性混合变分不等式. 证明了此类集值强非线性混合变分不等式辅助问题解的存在性和唯一性; 构建了一个新的三步迭代算法, 通过辅助原理技巧, 构建并计算此类非线性混合变分不等式的近似解, 进一步证明非线性混合变分不等式解的存在性以及由算法产生的三个序列的收敛性. 所得结论推广了近年来许多混合变分不等式和准变分不等式以及他们的有关结果.

关 键 词: 混合似变分不等式; 三步迭代算法; 集值映射; 辅助原理技巧

中图分类号: O177.1; O178 文献标识码: A

引 言

变分不等式理论是当前数学方法中非常有效的工具. 近年来, 来自力学、物理、优化和控制、非线性规划、经济学、金融、建筑、运输、弹性、应用科学等诸多非线性问题使得经典变分不等式不断被拓展和广义化, 参见文献[1-10]. 变分不等式中一类有用且重要的不等式是混合似变分不等式, 此类不等式在优化理论[8-9, 11-12], 结构分析[13]和经济学[11, 14]等中有着非常重要的应用. 对于此类不等式的特殊例子, Parida 和 Sen[7], Yao[9]和 Tian[8]已经对其进行了研究, 虽然他们的方法并不很有建设性. 因此发展一有效的迭代算法是变分不等式研究中有意义且非常重要的问题. 已有不少求解变分不等式的数值方法[15-20], 然而对一些拟变分不等式, 要找到一个有效的算法是很难的. 我们注意到投影法并不能应用到一般混合类的变分不等式中来.

最近, Noor[2]应用辅助原理技巧, 研究了一类广义混合似变分不等式的解的存在性和唯一性. 但是其存在性的证明是基于辅助问题有解的假设下完成的, 而辅助问题是否有解作者也并未证明. 在文献[21]中, Huang 等人对辅助问题的解的存在性进行了证明, 但他们也未对其解的唯一性进行证明.

---

* 收稿日期: 2007-03-12; 修订日期: 2007-04-18
资金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472061)
作者简介: 徐海丽(1979—), 女, 山西人, 硕士(E-mail: ccjjwwjj@hotmail.com);
郭兴明(1964—), 男, 湖南人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人. Tel: +86-21-56331453; E-mail: xmguo@mail.shu.edu.cn).

本文中,我们用辅助原理技巧来研究了下文中的变分不等式问题.在较弱的假设条件下,我们证明了辅助问题解的存在性和解的唯一性.我们知道,三步迭代算法可得到比两步和一步迭代算法更为精确的数值结果[22].由于辅助问题解是唯一的,因此本文进一步对下面的变分不等式构建三步迭代算法,并证明其解的唯一性以及迭代序列的收敛性.这些结果拓展了诸如Noor[2]和Huang[21]等人的结论.

1 预备知识

设H表示具有范数$\|\cdot\|$和内积$\langle\cdot,\cdot\rangle$的实Hilbert空间. $CB(H)$表示H中非空有界闭子集的族.

假设$N,\eta:H\times H\to H$是单值映射,$T,A:H\to CB(H)$是集值映射,Noor[2]研究了如下广义集值强非线性混合变分不等式问题:

求$u\in H, w\in T(u), y\in A(u)$使得下面不等式成立:

$$\langle N(\omega,y),\eta(v,u)\rangle+b(u,v)-b(u,u)\geqslant 0,\qquad \forall v\in H, \tag{1}$$

其中$b(\cdot,\cdot):H\times H\to R$满足下面性质:

(i) $b(u,v)$关于u是线性的;

(ii) $b(u,v)$是有界的,也就是说存在一个常数$\gamma>0$满足

$$b(u,v)\leqslant\gamma\|u\|\|v\|,\qquad \forall u,v\in H;$$

(iii) $b(u,v)-b(u,w)\leqslant b(u,v-w),\qquad \forall u,v,w\in H;$

(iv) $b(u,v)$关于v是凸的.

这里T、A是带紧值的集值映射.

例 1.1 假设$f:H\to R$是一线性有界函数,$h:H\to R$是有界函数,若$b(u,v)=f(u)h(v)$, $\forall u,v\in H$,则b满足条件(i)~(iv).

一些特例

(I) 若$\eta(v,u)=g(v)-g(u)$,其中$g:H\to H$,那么问题(1)等价于下列广义集值强非线性混合隐变分不等式问题:

求$u\in H, w\in T(u), y\in A(u)$使得

$$\langle N(w,y),g(v)-g(u)\rangle+b(u-v)-b(u,u)\geqslant 0,\qquad \forall v\in H; \tag{2}$$

(II) 若$\eta(v,u)=v-u$,则问题(1)等价于下列广义集值强非线性混合变分不等式问题:

求$u\in H, w\in T(u), y\in A(u)$使得

$$\langle N(w,y),v-u\rangle+b(u,v)-b(u,u)\geqslant 0,\qquad \forall v\in H; \tag{3}$$

(III) 若$\eta(v,u)=g(v)-g(u)$,其中$g:H\to H$,且$b(u,v)=f(v)$, $\forall u,v\in H$, f是H上的函数,那么问题(1)等价于下列广义集值强非线性隐变分不等式问题[23]:

求$u\in H, w\in T(u), y\in A(u)$使得

$$\langle N(w,y),g(v)-g(u)\rangle+f(u)-f(v)\geqslant 0,\qquad \forall v\in H; \tag{4}$$

(IV) 若$b(u,v)=0$,则问题(1)等价于下列广义似变分不等式问题[4]:

求$u\in H, w\in T(u), y\in A(u)$,使得

$$\langle N(w,y),\eta(v,u)\rangle\geqslant 0,\qquad \forall v\in H. \tag{5}$$

P. D. Panagiotopoulos等人的研究表明[5],在结构分析中产生的非凸非单调多值问题可由转化为问题(5)来获得解决. Parida和Sen[7]、Tian[8]、Yao[9, 24]和Cubiotti[1]等人表明在优化和经济

学中产生的许多问题都可经由转化为问题(5)来获得解决.

定义 1.1 $V:H\to CB(H)$ 是一集值映射

(i) 称 V 是 H-Lipschitz 连续的, 若存在常数 $\gamma>0$ 使得

$$(V(u),V(v))\leqslant\gamma\|u-v\|,\qquad\forall u,v\in H,$$

其中$(\cdot,\cdot)$表示 $CB(H)$ 中的 Hausdorff 度量;

(ii) 称 V 是ξ强单调的, 若存在常数 $\xi>0$, 使得

$$\langle w_1-w_2,u_1-u_2\rangle\geqslant\xi\|u_1-u_2\|^2,$$
$$\forall u_1,u_2\in H,\ \forall w_1\in V(u_1),\ \forall w_2\in V(u_2).$$

定义 1.2 设$N:H\times H\to H$ 是一非线性映射, $T:H\to CB(H)$ 是一集值映射,

(i) 称N 是在第一自变量关于T 是强单调的, 若存在一常数 $\alpha>0$ 使得满足下列不等式:

$$\langle N(u,\cdot)-N(v,\cdot),x-y\rangle\geqslant\alpha\|x-y\|^2,$$
$$\forall x,y\in H,u\in T(x),v\in T(y);$$

(ii) 称 N 是在第一自变量上是 Lipschitz 连续的, 若存在一常数 $\beta>0$ 使得满足下列不等式:

$$\|N(u,\cdot)-N(v,\cdot)\|\leqslant\beta\|u-v\|,\qquad\forall u,v\in H.$$

定义 1.3 映射 $\eta:H\times H\to H$ 是 Lipschitz 连续的, 若存在常数 $\delta>0$ 使得

$$\|\eta(u,v)\|\leqslant\delta\|v-u\|,\qquad\forall u,v\in H.$$

为了获得我们的结果, 需要以下假设:

假设 1.1 映射 $\eta:H\times H\to H$ 满足下列条件:

1) $\eta(v,u)=-\eta(u,v),\quad\forall u,v\in H;$

2) $\eta(y,x)-\eta(w,x)\geqslant\eta(y,w),\quad\forall y,w,x\in H.$

例 1.2 设 $g,h:H\to H$ 是 Lipschitz 连续的映射, 若

$$\eta(u,v)=g(u)-g(v)+h(u)-h(v),\qquad\forall u,v\in H.$$

很明显 η 满足定义 1.3 的条件及假设 1.1.

2 辅助问题及算法

为了解决问题(1), 我们首先考虑如下辅助变分不等式问题:

对任意给定的 $u\in H,w\in T(u),y\in A(u)$, 求 $z\in H$, 使得

$$\langle z,v-z\rangle\geqslant\langle u,v-z\rangle-\rho\langle N(w,y),\eta(v,z)\rangle+\rho b(u,z)-\rho b(u,v),$$
$$\forall v\in H,\tag{6}$$

其中 $\rho>0$ 是一常数.

定理 2.1 设 $\eta:H\times H\to H$ 是 Lipschitz 连续的具有常数 $\delta>0$, 假设函数 $b(\cdot,\cdot)$ 满足条件(i) ~ (iv). 若假设 1.1 成立, 则对任意给定的 $u\in H,w\in T(u),y\in A(u)$, 函数 $J:H\to R$:

$$\begin{cases}J(p)=\dfrac{1}{2}\langle p,p\rangle+j(p),\\ j(p)=\rho\langle N(w,y),\eta(p,u)\rangle+\rho b(u,p)-\langle u,p\rangle\end{cases}\tag{7}$$

在H 上有唯一最小点z, 且 z 是H 上J 的唯一极小点当且仅当(z,w,y) 是辅助变分不等式问题(6)的唯一解.

证明 因为 η是 Lipschitz 连续的且函数 $b(\cdot,\cdot)$ 满足条件(i) ~ (iv), 所以$p\to\langle N(w,

$y), \eta(p, u)\rangle$ 是连续的且 $p \to b(x, p)$ 在 H 上是常态凸且下半连续的，容易得出 $j(p)$ 是在 H 上是严格凸且下半连续的．因此存在 $h \in H, r \in R, \forall(p) = \langle h, p\rangle + r$，使得

$$J(p) = \frac{1}{2}\langle p, p\rangle + j(p) \geqslant \frac{1}{2}|p|^2 + \langle h, p\rangle + r = \frac{1}{2}|p + h|^2 - \frac{1}{2}|h^2| + r,$$

因此

$$J(p) \to \infty, \qquad \text{当 } p \to \infty. \tag{8}$$

设 $\{p_n\} \subset H$ 是 J 上的一极小序列，$\lim\limits_{n\to\infty} J(p_n) = d$ 且 $d = \inf\limits_{p\in H} J(p)$．显然 $\{p_n\} \subset H$ 是有界的．否则，则存在 $\{p_n\}$ 的一子序列 $\{p_{n_k}\}$ 使得 $|p_{n_k}| \geqslant k, k = 1, 2, \ldots$．由式(8)，$J\{p_{n_k}\} \to \infty$，然而这和 $\lim\limits_{n\to\infty} J(p_n) = d < \infty$ 矛盾．所以存在常数 $r > 0$ 使得 $\{p_n\} \subset H \cap B(\theta, r) = \{p \in H: p \leqslant r\}$．由此我们知，存在 $z \in H$，使得 $J(z) = \min\limits_{p\in H} J(p)$．由 J 的严格凸性，z 是 J 在 H 上的唯一最小值点.

下面我们证明 z 也是辅助问题(6)的一个解．对任意的 $p \in H, t \in [0, 1]$，

$$\begin{aligned} J(z) = \frac{1}{2}\langle z, z\rangle + j(z) \leqslant J(z + t(p - z)) = \\ \frac{1}{2}\langle z + t(p - z), z + t(p - z)\rangle + j(z + t(p - z)) \leqslant \\ \frac{1}{2}\langle z, z\rangle + \frac{t^2}{2}\langle p - z, p - z\rangle + t\langle z, p - z\rangle + j(z) + t(j(p) - j(z)), \end{aligned}$$

$$\frac{t}{2}\langle p - z, p - z\rangle + \langle z, p - z\rangle + j(p) - j(z) \geqslant 0.$$

让 $t \to 0$,

$$\begin{cases} \langle z, p - z\rangle \geqslant \langle u, p - z\rangle + \rho(b(u, z) - b(u, p)) - \\ \qquad \rho\langle N(w, y), \eta(p, u)\rangle - \langle N(w, y), \eta(z, u)\rangle, \\ \langle z, p - z\rangle \geqslant \langle u, p - z\rangle + \rho(b(u, z) - b(u, p)) - \\ \qquad \rho\langle N(w, y), \eta(p, z)\rangle. \end{cases} \tag{9}$$

这说明 z 是辅助不等式问题(6)的解．反过来，假设 z 是辅助变分不等式(6)的一个解，由式(9)，我们有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}[\langle p, p\rangle - \langle z, z\rangle] = \frac{1}{2}[\langle z + p - z, z + p - z\rangle - \langle z, z\rangle] = \\ &\quad \langle z, p - z\rangle + \frac{1}{2}\langle p - z, p - z\rangle \geqslant \langle z, p - z\rangle \geqslant \\ &\quad \langle u, p\rangle - \langle u, z\rangle - \rho\langle N(w, y), \eta(p, u)\rangle + \rho(b(u, z) - b(u, p)) \geqslant \\ &\quad \langle u, p\rangle - \langle u, z\rangle - \rho\langle N(w, y), \eta(p, z)\rangle + \rho\langle N(w, y), \eta(z, u)\rangle + \\ &\quad \rho(b(u, z) - b(u, p)), \qquad \forall p \in H. \end{aligned}$$

因此，$\forall p \in H, J(p) \geqslant J(z), J(z) = \min\limits_{p\in H} J(p)$．证毕.

下面我们构建新的三步算法，可得到更为精确的数值解.

算法 2.1 对任一给定的 $u_0 \in H$，由下列步骤计算近似解 u_{n+1}:

$$\begin{cases} w_n \in T(a_n), \quad \|w_n - w_{n+1}\| \leqslant (1 + 1/(n + 1))H(T(a_n) - T(a_{n+1})), \\ y_n \in A(a_n), \quad \|y_n - y_{n+1}\| \leqslant (1 + 1/(n + 1))H(A(a_n) - A(a_{n+1})), \\ \langle u_{n+1}, v - u_{n+1}\rangle \geqslant \langle a_n, v - u_{n+1}\rangle - \rho\langle N(w_n, y_n), \eta(v, u_{n+1})\rangle + \\ \qquad \rho b(a_n, u_{n+1}) - \rho b(a_n, v); \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} w_n \in T(b_n), & \|w_n - w_{n+1}\| \leqslant (1+1/(n+1))H(T(b_n) - T(b_{n+1})), \\ y_n \in A(b_n), & \|y_n - y_{n+1}\| \leqslant (1+1/(n+1))H(A(b_n) - A(b_{n+1})), \\ \langle a_n, v - a_n\rangle \geqslant \langle b_n, v - a_n\rangle - \beta\langle N(w_n, y_n), \eta(v, a_n)\rangle + \\ \qquad \beta b(b_n, a_n) - \beta b(b_n, v); \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} w_n \in T(u_n), & \|w_n - w_{n+1}\| \leqslant (1+1/(n+1))H(T(u_n) - T(u_{n+1})), \\ y_n \in A(u_n), & \|y_n - y_{n+1}\| \leqslant (1+1/(n+1))H(A(u_n) - A(u_{n+1})), \\ \langle b_n, v - b_n\rangle \geqslant \langle u_n, v - b_n\rangle - \mu\langle N(w_n, y_n), \eta(v, b_n)\rangle + \\ \qquad \mu b(u_n, b_n) - \mu b(u_n, v); \end{cases} \tag{12}$$

$\forall v \in H$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, 其中 $\rho, \beta, \mu > 0$ 是常数.

注 2.1 由算法 2.1, 我们可得到问题(2) 至(5) 的一些算法.

3 存在性和收敛性定理

定理 3.1 让 $N: H \times H \to H$ 是关于 $\beta, \xi(> 0)$ 在第一、第二自变量上是 Lipschitz 连续的, $A, T: H \to CB(H)$ 是关于 $\mu, \gamma(> 0)$ Lipschitz 连续的, 设 N 是在第一自变量关于 T 是强单调的, 其中 $\alpha > 0$ 且 $\eta: H \times H \to H$ 是强单调的(具有常数 $\sigma > 0$) 和 Lipschitz 连续的(具有常数 $\delta > 0$). 假设函数 $b(\cdot, \cdot)$ 满足条件(i) ~ (iv). 若假设 1.1 成立, 则存在 $u \in H$, $w \in T(u)$, $y \in A(u)$ 满足变分不等式(1), $u_n \to u$, $w_n \to w$, $y_n \to y(n \to \infty)$, 其中 $\{u_n\}$、$\{w_n\}$、$\{y_n\}$ 由算法 2.1 定义.

证明 由式(10), 我们有

$$\langle u_n, v - u_n\rangle \geqslant \langle a_{n-1}, v - u_n\rangle - \rho\langle N(w_{n-1}, y_{n-1}), \eta(v, u_n)\rangle + \\ \rho b(a_{n-1}, u_n) - \rho b(a_{n-1}, v), \tag{13}$$

$$\langle u_{n+1}, v - u_{n+1}\rangle \geqslant \langle a_n, v - u_{n+1}\rangle - \rho\langle N(w_n, y_n), \eta(v, u_{n+1})\rangle + \\ \rho b(a_n, u_{n+1}) - \rho b(a_n, v). \tag{14}$$

让式(13) 中 $v = u_{n+1}$ 和式(14) 中 $v = u_n$ 我们可得

$$\langle u_n, u_{n+1} - u_n\rangle \geqslant \langle a_{n-1}, u_{n+1} - u_n\rangle - \rho\langle N(w_{n-1}, y_{n-1}), \eta(u_{n+1}, u_n)\rangle + \\ \rho b(a_{n-1}, u_n) - \rho b(a_{n-1}, u_{n+1}), \tag{15}$$

$$\langle u_{n+1}, u_n - u_{n+1}\rangle \geqslant \langle a_n, u_n - u_{n+1}\rangle - \rho\langle N(w_n, y_n), \eta(u_n, u_{n+1})\rangle + \\ \rho b(a_n, u_{n+1}) - \rho b(a_n, u_n). \tag{16}$$

式(15) 和(16) 相加, 得到

$$\langle u_{n+1} - u_n, u_n - u_{n+1}\rangle \geqslant \langle a_n - a_{n-1}, u_n - u_{n+1}\rangle - \rho\langle N(w_n, y_n) - \\ N(w_{n-1}, y_{n-1}), \eta(u_n, u_{n+1})\rangle + \rho b(a_n - a_{n-1}, u_{n+1}) - \rho b(a_{n-1} - a_n, u_n)$$

即

$$\langle u_n - u_{n+1}, u_n - u_{n+1}\rangle \leqslant \langle a_{n-1} - a_n, u_n - u_{n+1}\rangle - \\ \rho\langle N(w_{n-1}, y_{n-1}) - N(w_n, y_n), \eta(u_n, u_{n+1})\rangle + \\ \rho b(a_n - a_{n-1}, u_n) - \rho b(a_n - a_{n-1}, u_{n+1}) \leqslant \\ \langle a_{n-1} - a_n, u_n - u_{n+1}\rangle - \rho\langle N(w_{n-1}, y_{n-1}) - N(w_n, y_{n-1}), \eta(u_n, u_{n+1})\rangle + \\ \rho\langle N(w_n, y_n) - N(w_n, y_{n-1}), \eta(u_n, u_{n+1})\rangle + \rho b(a_n - a_{n-1}, u_n - u_{n+1}) \leqslant \\ \langle a_{n-1} - a_n - \rho\{N(w_{n-1}, y_{n-1}) - N(w_n, y_{n-1})\}, u_n - u_{n+1}\rangle +$$

$$\rho\langle N(w_{n-1}, y_{n-1}) - N(w_n, y_{n-1}), u_n - u_{n+1} - \eta(u_n, u_{n+1})\rangle +$$
$$\rho\langle N(w_n, y_n) - N(w_n, y_{n-1}), \eta(u_n, u_{n+1})\rangle + \rho b(a_n - a_{n-1}, u_n - u_{n+1}).$$

因此

$$\| u_n - u_{n+1} \|^2 \leqslant \| a_{n-1} - a_n - \rho\{N(w_{n-1}, y_{n-1}) - N(w_n, y_{n-1})\} \| \| u_n - u_{n+1} \| +$$
$$\rho \| N(w_{n-1}, y_{n-1}) - N(w_n, y_{n-1}) \| \| u_n - u_{n+1} - \eta(u_n, u_{n+1}) \| +$$
$$\rho \| N(w_n, y_n) - N(w_n, y_{n-1}) \| \| \eta(u_n, u_{n+1}) \| + \rho\gamma \| a_n - a_{n-1} \| \| u_n - u_{n+1} \|.$$

由 N 关于 T 的强单调及Lipschitz连续性我们可得

$$\| a_{n-1} - a_n - \rho\{N(w_{n-1}, y_{n-1}) - N(w_n, y_{n-1})\} \|^2 =$$
$$\| a_{n-1} - a_n \|^2 - 2\rho\langle N(w_{n-1}, y_{n-1}) - N(w_n, y_{n-1}), a_{n+1} - a_n\rangle +$$
$$\rho^2 \| N(w_{n-1}, y_{n-1}) - N(w_n, y_{n-1}) \|^2 \leqslant$$
$$(1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2\gamma^2(1 + 1/n)^2) \| a_{n-1} - a_n \|^2.$$

和

$$\| N(w_{n-1}, y_{n-1}) - N(w_n, y_{n-1}) \| \leqslant$$
$$\beta \| w_{n-1} - w_n \| \leqslant \beta\gamma(1 + 1/n) \| a_n - a_{n-1} \|.$$

因为 $\eta(\cdot, \cdot)$ 是强单调且Lipschitz连续的, 因此可得

$$\| u_n - u_{n+1} - \eta(u_n, u_{n+1}) \|^2 =$$
$$\| u_n - u_{n+1} \|^2 - 2\langle u_n - u_{n+1}, \eta(u_n, u_{n+1})\rangle + \| \eta(u_n, u_{n+1}) \|^2 \leqslant$$
$$(1 - 2\sigma + \sigma^2) \| u_n - u_{n+1} \|^2,$$
$$\| \eta(u_n, u_{n+1}) \| \leqslant \delta \| u_n - u_{n+1} \|.$$

由 N 的Lipschitz连续性及 A 的H-Lipschitz连续性, 我们得到

$$\| N(w_n, y_n) - N(w_n, y_{n-1}) \| \leqslant \xi \| y_{n-1} - y_n \| \leqslant \xi\mu(1 + 1/n) \| a_{n-1} - a_n \|.$$

由上可得

$$\| u_n - u_{n+1} \| \leqslant \theta_n \| a_{n-1} - a_n \|, \tag{17}$$

其中

$$\theta_n = \sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2\gamma^2(1 + 1/n)^2} + \rho\beta\gamma(1 + 1/n)\sqrt{1 - 2\sigma + \delta^2} +$$
$$\rho\xi\mu\delta(1 + 1/n) + \rho\gamma.$$

让 $\theta = \sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2\gamma^2} + \rho\beta\gamma\sqrt{1 - 2\sigma + \delta^2} + \rho\xi\beta\delta + \rho\gamma$,

很明显,

$$\theta_n \to \theta = g(\rho) + \rho k, \tag{18}$$

其中 $g(\rho) = \sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2\gamma^2}$.

下面我们证明 $\theta < 1$. 很明显 $g(\rho)$ 的极小值为 $g(\rho) = \sqrt{1 - (\alpha/\beta\gamma)^2}$, 当 $\rho = \alpha/\beta^2\gamma^2$. 对于 $\rho = \rho$, $g(\rho) + \rho k < 1$ 暗含着 $\rho k < 1$. 因此对所有 ρ 满足下面条件时我们得出 $\theta < 1$:

$$0 < \rho < \frac{2(\alpha - k)}{\beta^2\gamma^2 - k^2}, \quad \rho k < 1, \text{且 } k < \alpha.$$

用相同的方法, 我们可以得到

$$\| a_{n-1} - a_n \| \leqslant \theta_n \| b_{n-1} - b_n \|, \quad \theta_n < 1,$$
$$\| b_{n-1} - b_n \| \leqslant \theta_n \| u_{n-1} - u_n \|, \quad \theta_n < 1.$$

可推出

$$\| u_{n+1} - u_n \| \leqslant \theta_n \cdot \theta_n \cdot \theta_n \| u_n - u_{n-1} \| \leqslant \theta_n \| u_n - u_{n-1} \|, \qquad \theta_n \to \theta.$$

因为 $\theta < 1$, 由式(17)、(18) 可知$\{u_n\}$是H 中的Cauchy 序列. 设 $u_n \to u$, 当 $n \to \infty$. 由式(11)、(12) 及 T 的H-Lipschitz 连续性, 我们可得$\{w_n\}$和$\{y_n\}$是H 中的Cauchy 序列. 让 $w_n \to w, y_n \to y$, 当 $n \to \infty$. 因为 $T(u) \in CB(H), A(u) \in CB(H)$, 我们有 $w \in T(u), y \in A(u)$. 因此

$$\langle u, v - u \rangle \geqslant \langle u, v - u \rangle - \rho \langle N(w, y), \eta(v, u) \rangle + \rho b(u, u) - \rho b(u, v), \quad \forall v \in H,$$

即

$$\langle N(w, y), \eta(v, u) \rangle + b(u, v) - b(u, u) \geqslant 0, \qquad \forall v \in H.$$

证毕.

注 3.1 由定理 3.1, 我们可分别获得问题(2) 至(5) 的存在定理和收敛定理.

注 3.2 1) 在定理 3.1 中(Huang[21]), 作者考虑了解的存在性, 但唯一性并未证明.

2) 定理 3.1 改进了 Huang[21] 的定理 3.1.

[参 考 文 献]

[1] Cubiotti P. Existence of solutions for lower semi-continuous quasi equilibrium problems[J]. Comput Math Appl, 1995, **30**(12): 11-12.

[2] Noor M A. Auxiliary principle for generalized mixed variational-like inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1997, **215**(1): 78-85.

[3] Noor M A. Some recent advances in variational inequalities—Ⅰ [J]. New Zealand J Math, 1997, **26**(2): 53-80.

[4] Noor M A. Generalized variational-like inequalities[J]. Math Comput Modelling, 1998, **27**(3): 93-101.

[5] Panagiotopoulos P D, Stavroulakis G E. New types of variational principles based on the notion of quasi-differentiability[J]. Acta Mech, 1992, **94**(3/4): 171-194.

[6] Panagiotopoulos P D. Inequality Problems in Mechanics and Applications[M]. Boston: Birkhäuser, 1985.

[7] Parida J, Sen A. A variational-like inequality for multi-functions with applications[J]. J Math Anal Appl, 1987, **124**(1): 73-81.

[8] Tian G. Generalized quasi variational-like inequality problem[J]. Math Oper Res, 1993, **18**(3): 752-764.

[9] Yao J C. The generalized quasi variational inequality problem with applications[J]. J Math Anal Appl, 1991, **158**(1): 139-160.

[10] Yao J C. Existence of generalized variational inequalities[J]. Oper Res Lett, 1994, **15**(1): 35-40.

[11] Huang N J. On the generalized implicit quasivariational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1997, **216**(1): 197-210.

[12] Huang N J. Mann and Ishikwa type perturbed iterative algorithms for generalized nonlinear implicit quasi-variational inclusions[J]. Comput Math Appl, 1998, **35**(1): 1-7.

[13] Glowinski R, Lions J L, Tremolieres R. Numerical Analysis of Variational Inequalities[M]. Amsterdam: North-Holland, 1981.

[14] Chang S S, Xiang S W. On the existence of solutions for a class of quasi-bilinear variational inequalities[J]. J Systems Sci Math Sci, 1996, **16**(3): 136-140.

[15] DING Xie-ping. On the generalized mixed variational-like inequalities[J]. J Sichuan Normal Univ, 2003, **22**(5): 494-503.

[16] DING Xie-ping. Predictor-corrector iterative algorithms for solving generalized mixed quasi-variational -like inequalities[J]. J Comput Appl Math, 2005, **182**(1): 1-12.

[17] Siddiqi A H, Ansari Q H. Strongly nonlinear quasi-variational inequalities[J]. J Math Anal Appl, 1990, **149**(2): 444-450.

[18] Noor M A. Splitting methods for pseudomonotone general mixed variational inequalities[J]. J Global Optim, 2000, **18**(1): 75-89.

[19] Tseng P. A modified forward-backward splitting method for maximal monotone mappings[J]. SIAM J Control Optim, 2000, **38**(2): 431-466.

[20] Xu H K. Iterative algorithms for nonlinear operators[J]. J London Math Soc, 2002, **66**(2): 240-256.

[21] HUANG Nan-jing, DENG Chuan-xian. Auxiliary principle and iterative algorithms for generalized set-valued strongly nonlinear mixed variational-like inequalities[J]. J Math Anal Appl, 2001, **256**(2): 345-359.

[22] Glowinski R, Tallec P Le. Augmented Lagrange and Operator Splitting Methods in Nonlinear Mechanics[M]. Philadelphia: SIAM, 1989.

[23] Huang N J, Liu Y P, Tang Y Y, et al. On the generalized set-valued strongly nonlinear implicit variational inequalities[J]. Comput Math Appl, 1998, **37**(10): 1-7.

[24] Yao J C. Abstract variational inequality problems and a basic theorem of complementarity[J]. Comput Math Appl, 1993, **25**(1): 73-79.

Auxiliary Principle and Three-Step Iterative Algorithms for Generalized Set-Valued Strongly Nonlinear Mixed Variational-Like Inequalities

XU Hai-li, GUO Xing-ming
(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,
Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)

Abstract: The auxiliary principle technique to study a class of generalized set-valued strongly nonlinear mixed variational-like inequalities is extended. The existence and uniqueness of the solution of the auxiliary problem for the generalized set-valued strongly nonlinear mixed variational-like inequalities was proved. A novel and innovative three-step iterative algorithm to compute approximate solution was constructed. And the existence of the solution of the generalized set-valued strongly nonlinear mixed variational-like inequality was showed by using the auxiliary principle technique. The convergence of three-step iterative sequences generated by the algorithm was also proved.

Key words: mixed variational-like inequality; three-step iterative algorithm; set-valued mapping; auxiliary principle technique