文章编号: 1000-0887(2007) 06-0713-11

直觉 Menger 空间中的广义压缩映射原理及其在微分方程中的应用*

S• 库图苏[1], A• 图纳[2], A•T• 雅库特[3]

(1. 昂都库兹-马伊斯大学 理学与文学学院 数学系, 库鲁佩里特 55139 萨姆松, 土耳其;
2. 盖兹大学 理学与文学学院 数学系, 特克尼科库拉 06500 安卡拉, 土耳其;
3. 尼代大学 理学与文学学院 数学系, 尼代, 土耳其)

(协平推荐)

摘要: 利用 Atanassov 的思路, 将直觉 Menger 空间定义为由 Menger 提出的 Menger 空间的自然推广. 同时也得出一个新广义压缩映射, 并运用该压缩映射证明了直觉 Menger 空间中微分方程解的存在性定理.

关 键 词: 广义压缩映射; 直觉 Menger 空间; 直觉 Menger 赋范空间; 直觉概率有界集

中图分类号: O177.3; 175.15; 189.2 文献标识码: A

引 言

度量空间概念的许多推广, 可以通过修改设置距离函数的条件来获得. 其中推广的 Menger 空间, 首先由 Menger[1] 提出并由 Schweizer 和 Sklar[2-4]、Chang[5] 和其他人[6-11] 发展完善. 根据 Menger 的理论, 两点 x 和 y 之间的距离 $d(x, y)$ 被当作一个概率, 就是说 Menger 提出将非负数 $d(x, y)$ 替换为距离分布函数 $F_{xy}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$. 那么, 对任意实数 t, $F_{xy}(t)$ 的值被描述为 x 和 y 之间的接近程度. 通过修改 Kramosil 和 Michalek[12] 的理论, George 和 Veeramani[13] 引入了模糊度量空间, 这与 Menger 空间十分相似[10-11, 14]. Park[15] 推广了模糊度量空间的概念, 提出直觉模糊度量空间.

本文对由 Menger[1] 提出的 Menger 空间进行推广, 根据 t-模和 t-余模定义了直觉 Menger 空间的概念. 在这个直觉 Menger 空间上定义了 Hausdorff 拓扑, 并证明了每一个度量诱导出一个直觉概率度量. 进一步, 引入了 Cauchy 序列概念, 给出了使一个直觉 Menger 空间完备的充分必要条件. 得到了新的广义压缩映射原理, 并运用该原理证明了直觉 Menger 空间上的微分方程解的存在性定理.

1 直觉 Menger 空间

定义 1 二元运算 $T: [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ 为 t-模, 当 T 满足以下条件: (a) T 为可交换

* 收稿日期: 2006-07-10; 修订日期: 2007-02-01
作者简介: Servet Kutukcu(联系人. E-mail: skutukcu@ yahoo. com) .
本文原文为英文, 海治 译, 丁协平 校.

和可结合的; (b) $T(a, 1) = a$ 对所有 $a \in [0, 1]$; (c) $T(a, b) \leqslant T(c, d)$ 对 $a \leqslant c$, $b \leqslant d$ 且 $a, b, c, d \in [0, 1]$.

定义 2　二元运算 $S: [0, 1] \times [0, 1] \to [0, 1]$ 为 t – 余模当且仅当 S 满足以下条件: (a) S 为可交换和可结合的; (b) $S(a, 0) = a$, 对所有 $a \in [0, 1]$; (c) $S(a, b) \leqslant S(c, d)$, 当 $a \leqslant c$, $b \leqslant d$ 且 $a, b, c, d \in [0, 1]$.

注 1　t– 模 T 和 t– 余模 S 分别是为了描述模糊交和模糊并而提出的公理化概念, 最早由 Menger[1] 在研究统计度量空间时提出, 并由许多研究者[2, 6-7, 9-11, 13-14] 对此概念进行了实例阐述. 从文献[15] 中得到:

(a) 对任意 $a, b \in (0, 1)$ 有 $a > b$, 则存在 $c, d \in (0, 1)$ 满足 $T(a, c) \geqslant b$, $S(b, d) \leqslant a$;

(b) 对任意 $a \in (0, 1)$, 存在 $b, c \in (0, 1)$ 使得 $T(b, b) \geqslant a$, $S(c, c) \leqslant a$.

在本文中, 记 $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbf{R}^+ = [0, \infty]$.

定义 3(见文献[3])　距离分布函数 $F: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ 在 $\mathbf{R}$ 上左连续、非递增且 $\inf_{t \in \mathbf{R}} F(t) = 0$, $\sup_{t \in \mathbf{R}} F(t) = 1$. 记 D 表示所有的距离分布函数, H 表示 D 中满足以下条件的特殊元素:

$$H(t) = \begin{cases} 0, & \text{若 } t \leqslant 0, \\ 1, & \text{若 } t > 0. \end{cases}$$

如果 X 为非负集, $F: X \times X \to D$ 称为 X 上的概率距离, 并记 $F(x, y)$ 为 F_{xy}.

定义 4　反距离分布函数 $L: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ 在 $\mathbf{R}$ 上右连续、非递增且 $\inf_{t \in \mathbf{R}} L(t) = 1$, $\sup_{t \in \mathbf{R}} L(t) = 0$. 记 E 表示所有的反距离分布函数, G 表示 E 中满足以下条件的特殊元素:

$$G(t) = \begin{cases} 1, & \text{若 } t \leqslant 0, \\ 0, & \text{若 } t > 0. \end{cases}$$

如果 X 为非空集, 则 $L: X \times X \to E$ 称为 X 上的概率反距离, 并记 $L(x, y)$ 为 L_{xy}.

定义 5　如果 X 为非空集, F、L 分别为 X 上的概率距离和概率反距离, 且对所有 $x, y, z \in X$, $t, s \geqslant 0$ 满足以下条件, 则称三元组 (X, F, L) 为一个直觉概率度量空间.

(a) $F_{xy}(t) + L_{xy}(t) \leqslant 1$;

(b) $F_{xy}(0) = 0$;

(c) $F_{xy}(t) = H(t)$ 当且仅当 $x = y$;

(d) $F_{xy}(t) = F_{yx}(t)$;

(e) 若 $F_{xz}(t) = 1$ 且 $F_{zy}(s) = 1$ 则 $F_{xy}(t + s) = 1$;

(f) $L_{xy}(0) = 1$;

(g) $L_{xy}(t) = G(t)$ 当且仅当 $x = y$;

(h) $L_{xy}(t) = L_{yx}(t)$.

(i) 若 $L_{xz}(t) = 0$ 且 $L_{zy}(s) = 0$ 则 $L_{xy}(t + s) = 0$;

若已验证 T 满足 t – 模, S 满足 t – 余模, 且满足以下三角不等式:

(j) $F_{xy}(t + s) \geqslant T(F_{xz}(t), F_{zy}(s))$,

(k) $L_{xy}(t + s) \leqslant S(L_{xz}(t), L_{zy}(s))$,

则称 (X, F, L, T, S) 为一个直觉 Menger 空间. 函数 $F_{xy}(t)$ 和 $L_{xy}(t)$ 分别表示参数为 t 时 x 和 y 之间的接近度和反接近度.

注 2　每一个 Menger 空间 (X, F, T) 是一个形式为 $(X, F, 1 - F, T, S)$ 的直觉 Menger 空间, 其中 t– 模 T 和 t – 余模 S 是相关联的[6], 即对任意 $x, y \in X$, $S(x, y) = 1 - T(1 - x, 1 - y)$.

例1(诱导直觉概率度量) 令 (X, d) 为一个度量空间．则对所有 $x, y \in X$ 和 $t \geqslant 0$, 度量 d 导出距离分布函数 F: $F_{xy}(t) = H(t - d(x, y))$ 和反距离分布函数 L: $L_{xy}(t) = G(t - d(x, y))$, 从而 (X, F, L) 为一个直觉概率度量空间．称为由度量 d 诱导出的直觉概率度量空间．若对所有 $a, b \in [0, 1]$, 有 t-模 T 满足 $T(a, b) = \min\{a, b\}$、t-余模 S 满足 $S(a, b) = \min\{1, a + b\}$, 则 (X, F, L, T_M, S_M) 为一个直觉Menger空间.

注3 注意到以上示例中, 与 t-模 $T(a, b) = \min\{a, b\}$ 和 t-余模 $S(a, b) = \max\{a, b\}$ 一起存在, 对任意 t-模和 t-余模, (X, F, L, T, S) 为一个直觉Menger空间．还注意到在以上的例子中 t-模 T 和 t-余模 S 并没有关联.

2 直觉概率度量的拓扑诱导

本节阐述一个直觉概率度量的一个拓扑．该拓扑诱导出, 一大类直觉概率度量空间为Hausdorff空间．还证明了在给出的拓扑的大量的直觉概率度量空间是可度量的.

定理1 令 (X, F, L) 为一个直觉概率度量空间, T, S 为 $[0, 1] \times [0, 1]$ 上到 $[0, 1]$ 的二元运算, 对 $a, b, c, d \in [0, 1]$ 且 $a \leqslant c$, $b \leqslant d$ 时, T、S 满足 $T(a, b) \leqslant T(c, d)$, $S(a, b) \leqslant S(c, d)$, 以及 $\sup_{t<1} T(t, t) = 1$, $\inf_{t<1} S(1 - t, 1 - t) = 0$, 那么 $\mathscr{U} = \{U_{\varepsilon, \lambda}\}_{\varepsilon > 0,\ \lambda \in (0, 1)}$ 为 $X \times X$ 上Hausdorff一致性的基, 其中

$$U_{\varepsilon, \lambda} = \{(x, y) \in X \times X: F_{xy}(\varepsilon) > 1 - \lambda, L_{xy}(\varepsilon) < \lambda\}.$$

证明 由Kelly[16]和Schweizer[4]等的术语, 我们证明 $U_{\varepsilon, \lambda}$ 满足Hausdorff一致(或分离)的基的公理.

(a) 令 $\Lambda = \{(x, x): x \in X\}$ 并给出 $U_{\varepsilon, \lambda}$, 因对任意 $x \in X$, $F_{xx}(\varepsilon) = 1$ 和 $L_{xx}(\varepsilon) = 0$ 有 $(x, x) \in U_{\varepsilon, \lambda}$, 从而有 $\Lambda \subset U_{\varepsilon, \lambda}$.

(b) 因为 $F_{xy}(t) = F_{yx}(t)$, $L_{xy}(t) = L_{yx}(t)$, 所以 $U_{\varepsilon, \lambda}$ 是对称的.

(c) 给定 $U_{\varepsilon, \lambda}$. 以下说明存在一个 $W \in \mathscr{U}$ 满足 $W \circ W \subset U$.

假设 λ' 足够小, 从而 $T(1 - \lambda', 1 - \lambda') > 1 - \lambda$, $S(\lambda', \lambda') < \lambda$. 还假设 (x, y) 和 (y, z) 属于 $W(\varepsilon/2, \lambda')$, 从而 $F_{xy}(\varepsilon/2) > 1 - \lambda'$, $F_{yz}(\varepsilon/2) > 1 - \lambda'$, $L_{xy}(\varepsilon/2) < \lambda'$ 和 $L_{yz}(\varepsilon/2) < \lambda'$. 则根据定义5中的(j)和(k)有

$$F_{xz}(\varepsilon) \geqslant T\left(F_{xy}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), F_{yz}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \geqslant T(1 - \lambda', 1 - \lambda') > 1 - \lambda,$$

$$L_{xz}(\varepsilon) \leqslant S\left(L_{xy}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), L_{yz}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \leqslant S(\lambda', \lambda') < \lambda,$$

即 $(x, z) \in U_{\varepsilon, \lambda}$, 其中 $W \circ W \subset U$.

(d) $U_{\varepsilon, \lambda}$ 和 $U_{\varepsilon/2, \lambda'}$ 的交集 $U_{\min(\varepsilon, \varepsilon/2), \min(\lambda, \lambda')}$ 是 $\mathscr{U}$ 中的一员．从而, 簇 $\mathscr{U}$ 为 $X \times X$ 上一个一致基.

(e) 若 $x \neq y$, 则存在一个 $\varepsilon > 0$, 满足 $F_{xy}(\varepsilon) \neq 1$ 和 $L_{xy}(\varepsilon) \neq 0$. 从而, 存在 ε_0、λ_0 使得 $F_{xy}(\varepsilon_0) = 1 - \lambda_0$ 和 $L_{xy}(\varepsilon_0) = \lambda_0$. 从而得出 (x, y) 不在 $U(\varepsilon_0, \lambda_0)$ 中, 由簇 $\mathscr{U}$ 生成的一致基分离的, 即Hausdorff是分离的. □

注4 尤其对满足 $\sup_{t<1} T(t, t) = 1$ 和 $\inf_{t<1} S(1 - t, 1 - t) = 0$ 的所有直觉Menger空间, 定理1同样成立．该定理同样适用于不是直觉Menger空间的直觉概率度量空间.

推论1 令 (X, F, L) 为满足定理1假设的直觉概率度量空间, 则集合 $U_{\varepsilon, \lambda}(x) =$

$\{y \in X: F_{xy}(\varepsilon) > 1-\lambda, L_{xy}(\varepsilon) < \lambda\}$ 为 X 上 Hausdorff 拓扑 $\tau_{(F,L)}$(或($\varepsilon-\lambda$) 拓扑) 的邻域基.

证明　这些集合在 X 上是由 $\mathscr{U}$ 诱导出的一致拓扑的一个邻域基. □

注 5　在推论 1 中,若 A 为 X 的一个开子集,当且仅当对每一个 $x \in A$,存在 $\varepsilon > 0$ 和 $\lambda \in (0,1)$ 使得 $U_{\varepsilon,\lambda}(x) = \{y \in X: F_{xy}(\varepsilon) > 1-\lambda, L_{xy}(\varepsilon) < \lambda\}$ 属于 A.

定理 2　若一个直觉概率度量空间满足定理 1 的假设,那么由集合 $U_{\varepsilon,\lambda}(x)$ 决定的拓扑为可度量的.

证明　根据文献[16]186 的结论,若 $\{(\varepsilon_n, \lambda_n)\}$ 为一个收敛于 $(0,0)$ 的序列,则集合体 $\{U(\varepsilon_n, \lambda_n)\}$ 为 $\mathscr{U}$ 的一个可数基. □

令 (X, F) 为一个概率度量空间,T 为 $[0,1]\times[0,1]$ 到 $[0,1]$ 上的二元运算,对 $a, b, c, d \in [0,1]$, $a \leqslant c$, $b \leqslant d$,该运算满足 $T(a,b) \leqslant T(c,d)$ 和 $\sup_{t<1} T(t,t) = 1$. 在文献[4]中已证得 (X, F) 为拓扑 τ_F 中由簇 $\{U^F_{\varepsilon,\lambda}(x)\}_{\varepsilon>0,\lambda\in(0,1)}$ 导出的 Hausdorff 拓扑空间,式中 $U^F_{\varepsilon,\lambda}(x) = \{y \in X: F_{xy}(\varepsilon) > 1-\lambda\}$.

命题 1　令 (X, F, L) 为满足定理 1 假设的一个直觉概率度量空间,则对每一个 $x \in X$, $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ 有 $U_{\varepsilon,\lambda}(x) = U^F_{\varepsilon,\lambda}(x)$.

证明　显然有 $U_{\varepsilon,\lambda}(x) \subset U^F_{\varepsilon,\lambda}(x)$. 现在假设 $y \in U^F_{\varepsilon,\lambda}(x)$,则 $F_{xy}(\varepsilon) > 1-\lambda$. 这样,根据定义 5 的条件(a) 有 $1 \geqslant F_{xy}(\varepsilon) + L_{xy}(\varepsilon) > 1-\lambda + L_{xy}(\varepsilon)$. 从而有 $L_{xy}(\varepsilon) < \lambda$,因此 $y \in U_{\varepsilon,\lambda}(x)$. □

定理 3　令 (X, F, L) 为满足定理 1 假设的一个直觉概率度量空间,则拓扑 $\tau_{(F,L)}$ 和拓扑 τ_F 在 X 上重合.

定理 4　令 (X, F, L) 为满足定理 1 假设的一个直觉概率度量空间,则对 X 中的序列 $\{x_n\}$,有 $x_n \to x$ 当且仅当 $F_{xx_n}(t) \to 1$ 和 $L_{xx_n}(t) \to 0$,其中 $n \to \infty$.

证明　取 $t > 0$,假设 $x_n \to x$,则对 $\lambda \in (0,1)$,存在一个整数 $n_0 = n_0(\varepsilon, \lambda) \in \mathbf{N}$,对所有 $n \geqslant n_0$ 满足 $x_n \in U_{t,\lambda}(x)$. 则有 $1-F_{xx_n}(t) < \lambda$ 和 $L_{xx_n}(t) < \lambda$,从而有 $F_{xx_n}(t) \to 1$ 和 $L_{xx_n}(t) \to 0$,其中 $n \to \infty$.

相反地,若当 $n \to \infty$,对每一个 $t > 0$ 有 $F_{xx_n}(t) \to 1$ 和 $L_{xx_n}(t) \to 0$,则对 $\lambda \in (0,1)$,存在一个整数 $n_0 = n_0(\varepsilon, \lambda) \in \mathbf{N}$ 使得对所有 $n \geqslant n_0$ 有 $1-F_{xx_n}(t) < \lambda$ 和 $L_{xx_n}(t) < \lambda$. 对所有 $n \geqslant n_0$,有 $F_{xx_n}(t) > 1-\lambda$ 和 $L_{xx_n}(t) < \lambda$. 从而有 $x_n \in U_{t,\lambda}(x)$ 和 $x_n \to x$. □

定义 6　令 (X, F, L, T, S) 为一个直觉 Menger 空间,并满足 $\sup_{t<1} T(t,t) = 1$ 和 $\inf_{t<1} S(1-t, 1-t) = 0$.

(a) 若对每一个 $\varepsilon > 0$ 和 $\lambda \in (0,1)$,存在一个正整数 $n_0 = n_0(\varepsilon, \lambda)$ 使得对所有 $n, m \geqslant n_0$,满足式 $F_{x_n x_m}(\varepsilon) > 1-\lambda$ 和 $L_{x_n x_m}(\varepsilon) < \lambda$,则 X 中的序列 $\{x_n\}$ 称为 Cauchy 序列.

(b) 当一个直觉 Menger 空间中的每一个 Cauchy 序列是收敛的,则称它为完备的.

定理 5　令 (X, F, L, T, S) 为满足 $\sup_{t<1} T(t,t) = 1$ 和 $\inf_{t<1} S(1-t, 1-t) = 0$ 的直觉 Menger 空间,若在 X 中的每一个 Cauchy 序列有收敛子序列,则 (X, F, L, T, S) 为完备的.

证明　令 $\{x_n\}$ 为一个 Cauchy 序列,$\{x_{n_i}\}$ 为收敛于 x 的 $\{x_n\}$ 的子序列. 现在证明 $x_n \to x$. 令 $t > 0$ 和 $\varepsilon \in (0,1)$. 选择 $\lambda \in (0,1)$,使得 $T(1-\lambda, 1-\lambda) \geqslant 1-\varepsilon$ 和 $S(\lambda, \lambda) \leqslant \varepsilon$. 因为 $\{x_n\}$ 为一个 Cauchy 序列,则存在一个正整数 n_0 使得对所有 $n, m \geqslant n_0$,满足 $F_{x_n x_m}(t/2) >$

$1-\lambda$和$L_{x_n x_m}(t/2)<\lambda$. 因为$x_{n_i}\to x$, 则存在一个正整数n_j, 满足$n_j>n_0$, $F_{x_{n_j}x}(t/2)>1-\lambda$和$L_{x_{n_j}x}(t/2)<\lambda$. 若$n\geqslant n_0$, 则有

$$F_{x_n x}(t)\geqslant T\left(F_{x_n x_{n_j}}\left(\frac{t}{2}\right),F_{x_{n_j}x}\left(\frac{t}{2}\right)\right)>T(1-\lambda,1-\lambda)\geqslant 1-\varepsilon,$$
$$F_{x_n x}(t)\leqslant S\left(L_{x_n x_{n_j}}\left(\frac{t}{2}\right),F_{x_{n_j}x}\left(\frac{t}{2}\right)\right)<S(\lambda,\lambda)\leqslant\varepsilon,$$

从而$x_n\to x$, 因此(X,F,L,T,S)是完备的. □

注6 若(X,d)是完备的, 则导出的直觉Menger空间(X,F,L,T_M,S_M)也是完备的.

引理1 令(X,F,L,T,S)为满足$\sup_{t<1}T(t,t)=1$和$\inf_{t<1}S(1-t,1-t)=0$的一个直觉Menger空间. 令$\{x_n\}$、$\{y_n\}$为X中分别满足$x_n\to x$, $y_n\to y$的两个序列.

(a) 对$t\geqslant 0$, 有$\liminf_{n\to\infty}F_{x_n y_n}(t)\geqslant F_{xy}(t)$和$\limsup_{n\to\infty}L_{x_n y_n}(t)\leqslant L_{xy}(t)$.

(b) 若$t\geqslant 0$为F_{xy}和L_{xy}的一个连续点, 则有$\lim_{n\to\infty}F_{x_n y_n}(t)=F_{xy}(t)$和$\lim_{n\to\infty}L_{x_n y_n}(t)=L_{xy}(t)$.

证明 若$t=0$, 则对所有n, 满足$F_{x_n y_n}(0)=0=F_{xy}(0)$和$L_{x_n y_n}(0)=1=L_{xy}(0)$.

(a) 假设给定$t>0$, $0<\varepsilon<t$. 根据定义5的(j)和(k)有

$$F_{x_n y_n}(t)\geqslant T(F_{x_n x}(\varepsilon/2),T(F_{xy}(t-\varepsilon),F_{yy_n}(\varepsilon/2))),$$
$$L_{x_n y_n}(t)\leqslant S(L_{x_n x}(\varepsilon/2),S(L_{xy}(t-\varepsilon),L_{yy_n}(\varepsilon/2)));$$
$$\liminf_{n\to\infty}F_{x_n y_n}(t)\geqslant T(1,T(F_{xy}(t-\varepsilon),1))=F_{xy}(t-\varepsilon),$$
$$\limsup_{n\to\infty}L_{x_n y_n}(t)\leqslant S(0,S(L_{xy}(t-\varepsilon),0))=L_{xy}(t-\varepsilon).$$

从而得到

$$\liminf_{n\to\infty}F_{x_n y_n}(t)\geqslant F_{xy}(t),\quad \limsup_{n\to\infty}L_{x_n y_n}(t)\leqslant L_{xy}(t).$$

(b) 取$\varepsilon>0$满足$\varepsilon<t/2$. 则存在$n_0\in\mathbf{N}$, 对所有$n\geqslant n_0$满足

$$F_{x_n y_n}(t)\geqslant F_{x_n y_n}(t-\varepsilon)\geqslant T(F_{x_n x}(\varepsilon/2),T(F_{xy}(t-2\varepsilon),F_{yy_n}(\varepsilon/2))),$$
$$L_{x_n y_n}(t)\leqslant L_{x_n y_n}(t-\varepsilon)\leqslant S(L_{x_n x}(\varepsilon/2),S(L_{xy}(t-2\varepsilon),L_{yy_n}(\varepsilon/2)));$$
$$F_{xy}(t+2\varepsilon)\geqslant F_{xy}(t+\varepsilon)\geqslant T(F_{xx_n}(\varepsilon/2),T(F_{x_n y_n}(t),F_{y_n y}(\varepsilon/2))),$$
$$L_{xy}(t+2\varepsilon)\leqslant L_{xy}(t+\varepsilon)\leqslant S(L_{xx_n}(\varepsilon/2),S(L_{x_n y_n}(t),L_{y_n y}(\varepsilon/2))).$$

令$n\to\infty$, 这意味着

$$\lim_{n\to\infty}F_{x_n y_n}(t)\geqslant T(1,T(F_{xy}(t-2\varepsilon),1))=F_{xy}(t-2\varepsilon),$$
$$\lim_{n\to\infty}L_{x_n y_n}(t)\leqslant S(0,S(L_{xy}(t-2\varepsilon),0))=L_{xy}(t-2\varepsilon);$$
$$F_{xy}(t+2\varepsilon)\geqslant T(1,T(\lim_{n\to\infty}F_{x_n y_n}(t),1))=\lim_{n\to\infty}F_{x_n y_n}(t),$$
$$L_{xy}(t+2\varepsilon)\leqslant S(0,S(\lim_{n\to\infty}L_{x_n y_n}(t),0))=\lim_{n\to\infty}L_{x_n y_n}(t).$$

因为$t>0$为F_{xy}和L_{xy}的连续点, 从而导出$F_{xy}(t)=\lim_{n\to\infty}F_{x_n y_n}(t)$和$L_{xy}(t)=\lim_{n\to\infty}L_{x_n y_n}(t)$.

□

3 直觉Menger赋范空间

作为Schweizer和Sklar[3]的Menger赋范空间的推广, 本节将定义直觉Menger赋范空间.

定义7 如果X为一个实向量空间, F为一个从X到D的距离分布映射, L为X到E的一

个反距离分布映射, T 和 S 分别为连续的 t - 模和连续的 t - 余模, 则称五元组 (X, F, L, T, S) 为一个直觉 Menger 赋范空间. 对所有 $x, y, z \in X, t, s \geqslant 0$, (X, F, L, T, S) 满足以下条件:

(a) $F_x(t) + L_x(t) \leqslant 1$;

(b) $F_x(0) = 0$;

(c) $F_x(t) = H(t)$ 当且仅当 $x = y$;

(d) 对每一个 $\alpha \neq 0$, $F_{\alpha x}(t) = F_x(t/|\alpha|)T$;

(e) $F_{x+y}(t+s) \geqslant T(F_x(t), F_y(s))$;

(f) $L_x(0) = 1$;

(g) $L_x(t) = G(t)$ 当且仅当 $x = y$;

(h) 对每一个 $\alpha \neq 0$, $L_{\alpha x}(t) = L_x(t/|\alpha|)$;

(i) $L_{x+y}(t+s) \leqslant S(L_x(t), L_y(s))$.

这时, 称 (F, L) 称为直觉 Menger 范数.

定义 8 如果对每一 $\varepsilon > 0$ 和 $\lambda \in (0, 1)$, 存在一个正整数 $n_0 = n_0(\varepsilon, \lambda)$, 满足对所有 $n, m \geqslant n_0$ 有 $F_{x_n - x_m}(\varepsilon) > 1 - \lambda$ 和 $L_{x_n - x_m}(\varepsilon) < \lambda$, 则称直觉 Menger 赋范空间 (X, F, L, T, S) 中的一个序列 $\{x_n\}$ 是一 Cauchy 序列. 如果对每一个 $t \geqslant 0$, 当 $n \to \infty$ 时有 $F_{x_n - x}(t) \to 1$ 和 $L_{x_n - x}(t) \to 0$, 则称序列 $\{x_n\}$ 收敛于 X 中的 x, 并记为 $x_n \to x$. 一个直觉 Menger 赋范空间为完备的当且仅当其中每一个 Cauchy 序列为收敛的.

引理 2 令 (X, F, L, T, S) 为一个直觉 Menger 赋范空间. 若定义 $F_{xy}(t) = F_{x-y}(t)$ 和 $L_{xy}(t) = L_{x-y}(t)$, 则 (X, F, L, T, S) 为由直觉 Menger 赋范数 (F, L) 导出的直觉 Menger 空间.

引理 3 令 (F, L) 为 X 上的直觉 Menger 范数. 则对每一个 $t \geqslant 0$ 和 $x, y \in X$, 有 $F_{x-y}(t) = F_{y-x}(t), L_{x-y}(t) = L_{y-x}(t)$.

定义 9 令 (X, F, L, T, S) 为一个直觉 Menger 赋范空间. 则簇 $\mathscr{U} = \{U_{\varepsilon,\lambda}\}_{\varepsilon>0,\lambda\in(0,1)}$, 其中 $U_{\varepsilon,\lambda} = \{(x, y) \in X \times X: F_{x-y}(\varepsilon) > 1 - \lambda, L_{x-y}(\varepsilon) < \lambda\}$ 为 $X \times X$ 上的 Hausdorff 一致基. 注意到该拓扑与由直觉概率度量引出的拓扑完全相同.

4 广义压缩映射

定理 6 令 (X, F, L, T, S) 为一个完备的直觉 Menger 空间, 对所有 $t \in [0, 1]$, 有 $T(t, t) \geqslant t$ 和 $S(1-t, 1-t) \leqslant 1-t$. 令映射 $A: X \to X$ 满足以下条件:

$$F_{AxAy}(t) \geqslant F_{xy}(t/k(\alpha, \beta)), \tag{1}$$

$$L_{AxAy}(t) \leqslant L_{xy}(t/k(\alpha, \beta)). \tag{2}$$

对所有 $x, y \in X, t \geqslant 0$ 和 $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ 有 $F_{xy}(\alpha) > 0$, $F_{xy}(\beta) < 1$, $L_{xy}(\alpha) < 1$ 和 $L_{xy}(\beta) > 0$, 其中 $k(\alpha, \beta): (0, \infty)^2 \to (0, 1)$ 为一个函数. 则 A 在 X 中存在一个唯一不动点.

证明 第一步. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$ 和 $\lambda \in (0, 1)$, 存在 $x_0 \in X$ 和 x_0 的一个 (ε, λ) - 邻域 $N(x_0, \varepsilon, \lambda) = \{x \in X: F_{xx_0}(\varepsilon) > 1 - \lambda, L_{xx_0}(\varepsilon) < \lambda\}$, 满足 $A: N(x_0, \varepsilon, \lambda) \to N(x_0, \varepsilon, \lambda)$. 假定相反, 则存在 $\varepsilon_0 > 0$ 和 $\lambda_0 \in (0, 1)$, 使得对每一个 $x \in X$, 存在一个 $x_1 \in X$, 满足 $Ax_1 \notin N(x_1, \varepsilon_0, \lambda_0)$, 即是

$$F_{xx_1}(\varepsilon_0) > 1 - \lambda_0, \quad F_{Ax_1x}(\varepsilon_0) \leqslant 1 - \lambda_0, \tag{3}$$

$$L_{xx_1}(\varepsilon_0) < \lambda_0, \quad L_{Ax_1x}(\varepsilon_0) \geqslant \lambda_0. \tag{4}$$

情况Ⅰ 若 $F_{xx_1}(\varepsilon_0/2)>1-\lambda_0/2$ 和 $L_{xx_1}(\varepsilon_0/2)<\lambda_0/2$，则

$$F_{xAx_1}(\varepsilon_0)\geqslant T(F_{xAx}(\varepsilon_0/2),F_{AxAx_1}(\varepsilon_0/2)),\tag{5}$$

$$L_{xAx_1}(\varepsilon_0)\leqslant S(L_{xAx}(\varepsilon_0/2),L_{AxAx_1}(\varepsilon_0/2)).\tag{6}$$

若 $x=x_1$，则 $F_{AxAx_1}(\varepsilon_0/2)=1$ 和 $L_{AxAx_1}(\varepsilon_0/2)=0$. 由式(3)~(6)可得

$$1-\lambda_0\geqslant F_{xAx_1}(\varepsilon_0)\geqslant F_{xAx}(\varepsilon_0/2),\tag{7}$$

$$\lambda_0\leqslant L_{xAx_1}(\varepsilon_0)\leqslant L_{xAx}(\varepsilon_0/2).\tag{8}$$

若 $x\neq x_1$，则存在 $t_0>0$ 使得 $F_{xx_1}(t_0)<1$ 和 $L_{xx_1}(t_0)>0$. 由条件(1)、(2)和情况Ⅰ的假设，有

$$F_{AxAx_1}(\varepsilon_0/2)\geqslant F_{xx_1}(\varepsilon_0/2k(\varepsilon_0/2,t_0))\geqslant F_{xx_1}(\varepsilon_0/2)>1-\lambda_0/2,$$

$$L_{AxAx_1}(\varepsilon_0/2)\leqslant L_{xx_1}(\varepsilon_0/2k(\varepsilon_0/2,t_0))\leqslant L_{xx_1}(\varepsilon_0/2)<\lambda_0/2.$$

从式(3)~(6)式可得

$$T(F_{xAx}(\varepsilon_0/2),1-\lambda_0/2)\leqslant T(F_{xAx}(\varepsilon_0/2),F_{AxAx_1}(\varepsilon_0/2))\leqslant F_{xAx_1}(\varepsilon_0)\leqslant 1-\lambda_0,$$

$$S(L_{xAx}(\varepsilon_0/2),\lambda_0/2)\geqslant S(L_{xAx}(\varepsilon_0/2),L_{AxAx_1}(\varepsilon_0/2))\geqslant L_{xAx_1}(\varepsilon_0)\geqslant\lambda_0.$$

从而有

$$F_{xAx}(\varepsilon_0/2)\leqslant 1-\lambda_0,\quad L_{xAx}(\varepsilon_0/2)\geqslant\lambda_0.\tag{9}$$

情况Ⅱ 若 $F_{xx_1}(\varepsilon_0/2)\leqslant 1-\lambda_0/2$ 和 $L_{xx_1}(\varepsilon_0/2)\geqslant\lambda_0/2$，则根据条件(1)和(2)，有

$$F_{xAx_1}(\varepsilon_0)\geqslant T(F_{xAx}((1-k(\varepsilon_0/2,\varepsilon_0))\varepsilon_0),F_{AxAx_1}(k(\varepsilon_0/2,\varepsilon_0)\varepsilon_0))\geqslant$$
$$T(F_{xAx}((1-k(\varepsilon_0/2,\varepsilon_0))\varepsilon_0),F_{xx_1}(\varepsilon_0)),$$

$$L_{xAx_1}(\varepsilon_0)\leqslant S(L_{xAx}((1-k(\varepsilon_0/2,\varepsilon_0))\varepsilon_0),L_{AxAx_1}(k(\varepsilon_0/2,\varepsilon_0)\varepsilon_0))\leqslant$$
$$S(L_{xAx}((1-k(\varepsilon_0/2,\varepsilon_0))\varepsilon_0),L_{xx_1}(\varepsilon_0)).$$

由式(3)和(4)，有

$$1-\lambda_0\geqslant F_{xAx_1}(\varepsilon_0)\geqslant T(F_{xAx}((1-k(\varepsilon_0/2,\varepsilon_0))\varepsilon_0),1-\lambda_0)\geqslant$$
$$F_{xAx}((1-k(\varepsilon_0/2,\varepsilon_0))\varepsilon_0),$$

$$\lambda_0\leqslant L_{xAx_1}(\varepsilon_0)\leqslant S(L_{xAx}((1-k(\varepsilon_0/2,\varepsilon_0))\varepsilon_0),\lambda_0)\leqslant$$
$$L_{xAx}((1-k(\varepsilon_0/2,\varepsilon_0))\varepsilon_0).$$

假设 $v_0=\min\{\varepsilon_0/2,(1-k(\varepsilon_0/2,\varepsilon_0))\varepsilon_0\}$，则通过式(9)可得

$$F_{xAx}(v_0)\leqslant 1-\lambda_0,\quad L_{xAx}(v_0)\geqslant\lambda_0.\tag{10}$$

因为 $\lim_{t\to\infty}F_{x_0Ax_0}(t)=1$ 和 $\lim_{t\to\infty}L_{x_0Ax_0}(t)=0$，所以对任意固定的 $x_0\in X$，存在一个 $t_1>0$ 使得 $F_{x_0Ax_0}(t_1)>0$ 和 $L_{x_0Ax_0}(t_1)<1$. 对 $t\geqslant 0$ 和 $n=1,2,\cdots$，易知 $F_{A^nx_0A^{n+1}x_0}(t)\geqslant F_{x_0Ax_0}(t/k^n(t,t_0))$ 和 $L_{A^nx_0A^{n+1}x_0}(t)\leqslant L_{x_0Ax_0}(t/k^n(t,t_0))$. 取 $t=v_0$，对 $n=1,2,\cdots$，有 $F_{A^nx_0A^{n+1}x_0}(v_0)\geqslant F_{x_0Ax_0}(v_0/k^n(v_0,t_0))$ 和 $L_{A^nx_0A^{n+1}x_0}(v_0)\leqslant L_{x_0Ax_0}(v_0/k^n(v_0,t_0))$. 令 n 足够大使得 $F_{x_0Ax_0}(v_0/k^n(v_0,t_0))>1-\lambda_0$ 和 $L_{x_0Ax_0}(v_0/k^n(v_0,t_0))<\lambda_0$，则有 $F_{A^nx_0A^{n+1}x_0}(v_0)>1-\lambda_0$ 和 $L_{A^nx_0A^{n+1}x_0}(v_0)<\lambda_0$. 该式与(10)式相矛盾，于是证明完成. 由于 A 满足条件(1)和(2)且 A 为连续的，因此 $A:\overline{N(x_0,\varepsilon,\lambda)}\to\overline{N(x_0,\varepsilon,\lambda)}$.

第二步. 任意给定 $\varepsilon_n>0$ 和 $\lambda_n\in(0,1)$，对 $n=1,2,\cdots$ 有 $\varepsilon_n>\varepsilon_{n+1}$，$\lambda_n>\lambda_{n+1}$，$\varepsilon_n\to 0^+$ 和 $\lambda_n\to 0^+$. 根据第一步得出的结论，存在 $x_n\in X$ 和一个 x_n 的 $(\varepsilon_n,\lambda_n)$-邻域 $N(x_n,\varepsilon_n,\lambda_n)$，对 $n=1,2,\cdots$，有 $A:\overline{N(x_n,\varepsilon_n,\lambda_n)}\to\overline{N(x_n,\varepsilon_n,\lambda_n)}$. 明显地，对所有 $n\geqslant 1$，有

$\overline{N(x_{n+1}, \varepsilon_{n+1}, \lambda_{n+1})} \subseteq \overline{N(x_n, \varepsilon_n, \lambda_n)}$. 从而 $A: \bigcap_{n \geqslant 1} \overline{N(x_n, \varepsilon_n, \lambda_n)} \to \bigcap_{n \geqslant 1} \overline{N(x_n, \varepsilon_n, \lambda_n)}$. 现在证明: $\bigcap_{n \geqslant 1} \overline{N(x_n, \varepsilon_n, \lambda_n)} \neq \varnothing$. 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0, 1)$ 和足够大的 n 满足 $\varepsilon_n < \varepsilon$ 和 $\lambda_n < \lambda$, 选择 $t_{n,m} \in (\varepsilon_n, \varepsilon)$ 使 $t_{n,m}$ 为 $F_{x_n x_{n+m}}(t)$ 和 $L_{x_n x_{n+m}}(t)$ 的一个连续点. 因为根据引理 1 有 $x_{n+m} \in \overline{N(x_n, \varepsilon_n, \lambda_n)}$, 因此 $F_{x_n x_{n+m}}(\varepsilon) \geqslant F_{x_n x_{n+m}}(t_{n,m}) \geqslant 1 - \lambda_n > 1 - \lambda$ 和 $L_{x_n x_{n+m}}(\varepsilon) \leqslant L_{x_n x_{n+m}}(t_{n,m}) \leqslant \lambda_n < \lambda$. 该式表明 $\{x_n\}$ 为直觉 Menger 空间 X 中的一个 Cauchy 序列. 令 $x_n \to x$, 则有 $x \in \bigcap_{n \geqslant 1} \overline{N(x_n, \varepsilon_n, \lambda_n)}$. 从而证得 $\bigcap_{n \geqslant 1} \overline{N(x_n, \varepsilon_n, \lambda_n)} \neq \varnothing$.

第三步. 最后证明 $\bigcap_{n \geqslant 1} \overline{N(x_n, \varepsilon_n, \lambda_n)}$ 只包含一个点. 假设情况相反, 则存在 $x, y \in \bigcap_{n \geqslant 1} \overline{N(x_n, \varepsilon_n, \lambda_n)}$, 使 $x \neq y$. 从而存在 $t_0 > 0$ 和 $\lambda_0 \in (0, 1)$, 满足 $F_{xy}(t_0) < \lambda_0$, $L_{xy}(t_0) > 1 - \lambda_0$. 令 n 足够大以使 $\varepsilon_n < t_0/2$ 和 $1 - \lambda_n > \lambda_0$, 则有 $F_{xy}(t_0) \geqslant T(F_{xx_n}(t_0/2), F_{x_n y}(t_0/2))$ 和 $L_{xy}(t_0) \leqslant S(L_{xx_n}(t_0/2), L_{x_n y}(t_0/2))$. 取 $t_n, s_n \in (\varepsilon_n, t_0/2)$ 以使 t_n 为 $F_{xx_n}(t)$ 和 $L_{xx_n}(t)$ 的一个连续点, s_n 为 $F_{x_n y}(t)$ 和 $L_{x_n y}(t)$ 的一个连续点, 则有 $F_{xx_n}(t_n) \geqslant 1 - \lambda_n$, $L_{xx_n}(t_n) \leqslant \lambda_n$, $F_{x_n y}(s_n) \geqslant 1 - \lambda_n$ 和 $L_{x_n y}(s_n) \leqslant \lambda_n$, 因此有 $F_{xy}(t_0) > \lambda_0$ 和 $L_{xy}(t_0) < 1 - \lambda_0$, 从而出现矛盾. 因此 $\bigcap_{n \geqslant 1} N(x_n, \varepsilon_n, \lambda_n)$ 只包含一个点且该点为 A 的唯一不动点. □

定义 10 令 (X, F, L, T, S) 为直觉 Menger 空间, W 为 X 的一个子集, 如果满足以下条件:

$$\sup_{t>0} \inf_{x,y \in W} F_{xy}(t) = 1, \quad \inf_{t>0} \sup_{x,y \in W} F_{xy}(t) = 0,$$

则称 W 为直觉概率有界的.

定理 7 令 (X, F, L, T, S) 为一个完备直觉 Menger 赋范空间, C 为 X 的一个直觉概率有界闭凸子集, $A: C \to X$ 为广义压缩映射, $Q: C \to X$ 为一个 $Q(C)$ 是相对紧的连续映射. 若对所有 $x, y \in C$ 有 $Ax + Qy \in C$, 则 $A + Q$ 在 C 中有一个不动点.

证明 对任意给定的 $y \in C$, 已知 $Ax + Qy: C \to C$ 为广义压缩映射. 根据定理 1, $Ax + Qy$ 有一个不动点 $x_{(y)} \in C$, 满足 $x_{(y)} = Ax_{(y)} + Qy$. 现在定义一个映射 P 为: 对所有 $y \in C$, $Py = x_{(y)}$, 其中 $x_{(y)}$ 为 $Ax + Qy$ 的唯一不动点. 很明显, P 为从 C 到 C 的一个连续映射且 $P(C)$ 为相对紧的. 从而存在 $z \in C$, 使得 $z = Pz$. 取 $y = z$, 则有 $z = Pz = x_{(z)} = Ax_{(z)} + Qz$ 即 $z = Az + Qz$. 从而定理得证. □

5 直觉 Menger 赋范空间中的微分方程

本节将利用第 4 节给出的结论, 证明直觉 Menger 赋范空间中一类微分方程解的存在性.

令 (X, F, L, T, S) 为一个直觉 Menger 赋范空间, $C([0, A], X)$ 为 (X, F, L, T, S) 上的连续映射 $x(\cdot): [0, A] \to X$ 的一个集合. 分别定义映射 $F: C([0, A], X) \to D$ 和 $L: C([0, A], X) \to E$ 如下:

$$F_{x(\cdot)}(t) = \lim_{k \to t^-} \inf_{s \in [0, A]} F_{x(s)}(k), \quad L_{x(\cdot)}(t) = \lim_{k \to t^+} \inf_{s \in [0, A]} L_{x(s)}(k).$$

以下命题的证明因简单而略去.

命题 2 令 (X, F, L, T, S) 为带连续 t-模 T 和连续 t-余模 S 的直觉 Menger 赋范空间. 则 $(C([0, A], X), F, L, T, S)$ 为一个直觉 Menger 赋范空间. 进一步地, 若 (X, F, L, T, S) 是完备的, 则 $(C([0, A], X), F, L, T, S)$ 也是完备的.

现在我们证明在一个完备直觉 Menger 赋范空间 (X, F, L, T, S) 中, 如下微分方程解的存在性:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x) + g(t,x), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

该赋范空间满足: 对所有 $t \in [0,1]$, t-模 T 满足 $T(t,t) \geqslant t$ 且 t-余模 S 满足 $S(1-t, 1-t) \leqslant 1-t$. 对任意 $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0,1)$ 和 $x_0 \in X$, 定义

$$N(x_0, \varepsilon, \lambda) = \left\{x: F_{x-x_0}(\varepsilon) > 1-\lambda, L_{x-x_0}(\varepsilon) < \lambda\right\}.$$

令 f 和 g 为从 $\mathbf{R} \times \overline{N(x_0, \varepsilon, \lambda)}$ 到 X 的两个连续映射并满足

(i) 对 $s \geqslant 0$ 和 $x, y \in \overline{N(x_0, \varepsilon, \lambda)}$, $F_{f(t,x)-f(t,y)}(s) \geqslant F_{xy}(s/K)$, 其中 $K > 0$ 为一个常数;

(ii) 对每一个 t, $g(t, \overline{N(x_0, \varepsilon, \lambda)})$ 为 X 中的相对紧子集.

定理 8 在上述条件(i)和(ii)下, 存在一个 $\delta_0 > 0$ 足够小, 使得微分方程

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x) + g(t,x), \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{11}$$

在 $C([0, \delta_0], X)$ 中有一个解.

证明 已知(11)式与如下的积分方程等价:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\mathrm{d}s + \int_0^t g(s, x(s))\mathrm{d}s.$$

令 $C([0, \delta_0], X)$ 如前, 并令 $W = \left\{x(\cdot) \in C([0, \delta_0], X): x(0) = x_0, F_{x(s)-x_0}(\varepsilon) > 1-\lambda, L_{x(s)-x_0}(\varepsilon) < \lambda\right\}$, 其中 $s \in [0, \delta_0]$ 和 $\delta_0 > 0$ 足够小以使 $K\delta_0 < 1$, 且有

$$F_I(\varepsilon) > 1-\lambda, \quad L_I(\varepsilon) < \lambda,$$

其中下角 $I = \int_0^t (f(s, x(s)) + g(s, x(s)))\mathrm{d}s$, $t \in [0, \delta_0]$, $x(\cdot) \in W$. 显然, $W \subset C([0, \delta_0], X)$ 是凸的. 对所有 $x(\cdot) \in C([0, \delta_0], X)$ 和 $x(s) \in \overline{N(x_0, \varepsilon, \lambda)}$, $s \in [0, \delta_0]$, 令

$$Ax(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))\mathrm{d}s, \quad Qx(t) = \int_0^t g(s, x(s))\mathrm{d}s.$$

可证明 A 和 Q 为连续的且有 $A + Q: W \to W$. 从而 $A + Q: W \to W$ 并且 Q 是紧的. 现在证明 $A: W \to C([0, \delta_0], X)$ 为一个广义压缩映射. 实际上, 对任意 $x(\cdot), y(\cdot) \in W$, 有 $F_{Ax(t)-Ay(t)}(k) = F_J(k)$ 和 $L_{Ax(t)-Ay(t)}(k) = L_J(k)$, 其中下角 $J = \int_0^t (f(s, x(s)) - f(s, y(s)))\mathrm{d}s$. 对任意 $t \in [0, \delta_0]$ 和 $k > 0$, 存在一个序列 $\left\{k_t^{(n)}\right\} \subset [0, \delta_0]$, 使得对 $F_J(k)$ 和 $L_J(k)$ 的所有的连续点满足: 当 $n \to \infty$ 时, $k_t^{(n)} \to k$. 从而有

$$F_{Ax(t)-Ay(t)}(k) \geqslant F_J(k_t^{(n)}) = \lim_{\max_{1\leqslant i\leqslant N}(\Delta t_i)\to 0} F_R(k_t^{(n)}),$$

$$L_{Ax(t)-Ay(t)}(k) \leqslant L_J(k_t^{(n)}) = \lim_{\min_{1\leqslant i\leqslant N}(\Delta t_i)\to 0} L_R(k_t^{(n)}),$$

其中下角 $R = \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i, x(\xi_i)) - f(\xi_i, y(\xi_i)))\Delta t_i$, $0 = \xi_0 < \xi_1 < \cdots < \xi_N = t$, $\Delta t_i = \xi_i - \xi_{i-1}$, $i = 1, 2, \cdots, N$. 由此推得

$$F_{Ax(t)-Ay(t)}(k) \geqslant \lim_{\max_{1\leqslant i\leqslant N}(\Delta t_i)\to 0} \min\left\{F_{f(\xi_i, x(\xi_i))-f(\xi_i, y(\xi_i))}(k_t^{(n)}/t)\right\} \geqslant$$

$$\inf_{s\in[0,\delta_0]} F_{f(s,x(s))-f(s,y(s))}(k_t^{(n)}/t) \geqslant$$

$$\inf_{s\in[0,\delta_0]} F_{x(s)-y(s)}(k_t^{(n)}/Kt) \geqslant \inf_{s\in[0,\delta_0]} F_{x(s)-y(s)}(k_t^{(n)}/K\delta_0),$$

$$F_{Ax(t)-Ay(t)}(k) \leqslant \lim_{\max_{1\leqslant i\leqslant N}(\Delta t_i)\to 0} \max\left\{L_{f(\xi_i, x(\xi_i))-f(\xi_i, y(\xi_i))}(k_t^{(n)}/t)\right\} \leqslant$$

$$\sup_{s\in[0,\delta_0]} L_{f(s,x(s))-f(s,y(s))}(k_t^{(n)}/t) \leqslant$$

$$\sup_{s\in[0,\delta_0]} L_{x(s)-y(s)}(k_t^{(n)}/Kt) \geqslant \sup_{s\in[0,\delta_0]} L_{x(s)-y(s)}(k_t^{(n)}/K\delta_0).$$

令 $n\to\infty$ 并在上面不等式中取极限, 则有

$$F_{Ax(t)-Ay(t)}(k) \geqslant \lim_{k_t^{(n)}\to k^-} \left(\inf_{s\in[0,\delta_0]} F_{x(s)-y(s)}(k_t^{(n)}/K\delta_0)\right) = F_{x(\cdot)-y(\cdot)}(k/K\delta_0),$$

$$L_{Ax(t)-Ay(t)}(k) \leqslant \lim_{k_t^{(n)}\to k^-} \left(\sup_{s\in[0,\delta_0]} L_{x(s)-y(s)}(k_t^{(n)}/K\delta_0)\right) = L_{x(\cdot)-y(\cdot)}(k/K\delta_0).$$

因此

$$\inf_{t\in[0,\delta_0]} F_{Ax(t)-Ay(t)}(k) \geqslant F_{x(\cdot)-y(\cdot)}(k/K\delta_0)$$

和 $$\sup_{t\in[0,\delta_0]} L_{Ax(t)-Ay(t)}(k) \leqslant L_{x(\cdot)-y(\cdot)}(k/K\delta_0).$$

从而得出

$$\lim_{k\to\lambda^-}\left(\inf_{t\in[0,\delta_0]} F_{Ax(t)-Ay(t)}(k)\right) \geqslant \lim_{k\to\lambda^-} F_{x(\cdot)-y(\cdot)}(k/K\delta_0),$$

相似地有

$$\lim_{k\to\lambda^+}\left(\sup_{t\in[0,\delta_0]} L_{Ax(t)-Ay(t)}(k)\right) \leqslant \lim_{k\to\lambda^+} L_{x(\cdot)-y(\cdot)}(k/K\delta_0).$$

即是: $F_{Ax(\cdot)-Ay(\cdot)}(\lambda) \geqslant F_{x(\cdot)-y(\cdot)}(\lambda/K\delta_0)$ 并且有 $L_{Ax(\cdot)-Ay(\cdot)}(\lambda) \leqslant L_{x(\cdot)-y(\cdot)}(\lambda/K\delta_0)$, $\lambda>0$. 这表明 $A: W\to C([0,\delta_0], X)$ 为一广义压缩映射, 从而根据定理 7 证明完成. □

[参 考 文 献]

[1] Menger K. Statistical metric spaces[J]. Proc Nat Acad Sci, 1942, **28**: 535-537.

[2] Schweizer B, Sklar A. Statistical metric spaces[J]. Pacific J Math, 1960, **10**(1): 313-334.

[3] Schweizer B, Sklar A. Probabilistic Metric Spaces[M]. New York: North-Holland, 1983.

[4] Schweizer B, Sklar A, Thorp E. The metrization of statistical metric spaces[J]. Pacific J Math, 1960, **10**: 673-675.

[5] Chang S S, Lee B S, Cho Y J, et al. Generalized contraction mapping principle and differential equations in probabilistic metric spaces[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1996, **124**(8): 2367-2376.

[6] Hadzic O, Pap E. Fixed Point Theory in Probabilistic Metric Spaces[M]. Dordrecht: Kluwer Acad Pub, 2001.

[7] Hadzic O, Pap E, Radu V. Generalized contraction mapping principles in probabilistic metric spaces[J]. Acta Math Hungar, 2003, **101**(1/2): 131-148.

[8] Mihet D. On the contraction principle in Menger and non-Archimedean Menger spaces[J]. An Univ Timisoara Ser Mat Inform, 1994, **32**(2): 45-50.

[9] Klement E P, Mesiar R, Pap E. Triangular Norms[M]. Trends in Logic 8. Dordrecht: Kluwer Acad Pub, 2000.

[10] Radu V. Lectures on Probabilistic Analysis[M]. West University of Timisoara, 1996.

[11] Radu V. Some remarks on the probabilistic contractions on fuzzy Menger spaces[A/J]. In: The Eighth Internat Conf on Applied Mathematics and Computer Science[C]. Cluj-Napoca, 2002; Automat Comput Appl Math, 2002, **11**(1): 125-131.

[12] Kramosil O, Michalek J. Fuzzy metric and statistical metric spaces[J]. Kybernetica, 1975, **11**: 326-334.

[13] George A, Veeramani P. On some results in fuzzy metric spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, **64**: 395-399.

[14] Mihet D. A Banach contraction theorem in fuzzy metric spaces[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, **144**: 431-439.

[15] Park J H. Intuitionistic fuzzy metric spaces[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2004, **22**: 1039-1046.

[16] Kelley J L. General Topology [M]. Princeton, 1955.

[17] Atanassov K. Intuitionistic fuzzy sets[J]. Fuzzy Sets and Systems, 1986, **20**: 87-96.

Generalized Contraction Mapping Principle in Intuitionistic Menger Spaces and an Application to Differential Equations

Servet Kutukcu[1], Adnan Tuna[2], Atakan T. Yakut[3]

(1. Department of Mathematics, Faculty of Science and Arts, Ondokuz Mayis University, Kurupelit, 55139 Samsun, Turkey;
2. Department of Mathematics, Faculty of Science and Arts, Gazi University, Teknikokullar, 06500 Ankara, Turkey;
3. Department of Mathematics, Faculty of Science and Arts, Nigde University, Nigde, Turkey)

Abstract: Using the idea of Atanassov, the notion of intuitionistic Menger spaces was defined as a natural generalizations of Menger spaces due to Menger. A new generalized contraction mapping and utilize this contraction mapping to prove the existance theorems of solutions to differential equations in intuitionistic Menger spaces were obtained.

Key words: generalized contraction mapping; intuitionistic Menger space; intuitionistic Menger normed space; intuitionistic probabilistic bounded set