应用数学和力学, 第 28 卷 第 6 期
2007 年 6 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 28, No. 6, Jun. 15, 2007

文章编号: 1000-0887(2007) 06-0741-08

不确定中立型线性随机时滞系统的鲁棒稳定性*

江明辉[1,2], 沈 轶[2], 廖晓昕[2]

(1. 三峡大学 非线性复杂系统研究所, 湖北 宜昌 443000;
2. 华中科技大学 控制科学与工程系, 武汉 430074)

(郭兴明推荐)

摘要: 建立了中立型随机微分时滞方程的 LaSalle 不变原理, 然后应用 LaSalle 不变原理讨论了不确定中立型随机时滞系统的随机渐近稳定和几乎必然指数稳定的代数判据, 同时给出示例说明结果的有效性.

关 键 词: 中立型线性随机时滞系统; LaSalle 不变原理; 鲁棒稳定性
中图分类号: TP183 文献标识码: A

引 言

中立型微分系统应用十分广泛. 例如, 在研究两个或多个相互间具有部分连接的简单振荡系统[1], 以及在对带有一个弹性棒物体的振动过程进行物理建模时[1], 都会得到中立型微分系统. 这些系统常常受到时滞和不确定随机因素的干扰导致系统的不稳定. 在科学和工程上随机系统的重要性越来越为人们所重视, 因而最近对不确定随机系统的鲁棒稳定性理论的研究已被人们所关注(见文献[2-3]), 特别是应用 Liapunov 函数的方法研究随机微分方程的随机稳定性后, 许多研究人员给出了判定各种随机系统的稳定性的代数判据, 例如文献[4-8] 等. 毛在文献[9-10] 中给出了随机时滞微分方程的 LaSalle 不变原理, 由此导出了一系列随机稳定性的判据. 然而, 据我们所知, 不确定中立型线性随机时滞系统的渐近稳定性的代数判据的文献却很少见到. 本文的目的是将随机时滞微分方程的 LaSalle 不变原理推广到中立型随机时滞系统的 LaSalle 不变原理, 并应用此原理给出不确定中立型线性随机时滞系统渐近稳定性的代数判据, 最后举一例加以说明.

本文采用以下记号: 记 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t\geqslant 0}, P)$ 为一个带有自然流 $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ 的完备概率空间, $\boldsymbol{w}(t) = (w_1(t), w_2(t), \cdots, w_m(t))^{\mathrm{T}}$ 是定义于该空间上的 m 维标准 Brown 运动. $\|\cdot\|$ 为定义于 R^n 上的 Euclid 范数. 设 $\tau > 0$, $C([-\tau, 0]; R^n)$ 记为 $[-\tau, 0]$ 上的连续函数族. $L^1(\mathbf{R}_+;$

* 收稿日期: 2003-10-09; 修订日期: 2007-04-03
资金项目: 国家自然科学基金资助项目(60574025); 湖北省自然科学基金资助项目(2004ABA055); 湖北省教育厅科研资助项目(D200613002)
作者简介: 江明辉(1968—), 男, 湖北宜昌人, 教授, 博士(联系人. Tel: +86-717-6392094; Fax: +86-717-6392370; E-mail: jhxsdez@ctgu.edu.cn).

$\mathbf{R}_+):=\left\{\eta:\mathbf{R}_+\to\mathbf{R}_+\ \middle|\ \int_0^\infty\eta(t)\,\mathrm{d}t<\infty\right\}$ 表示正的可积函数族. $C^b_{F_0}([-\tau,0];R^n)$ 表示 F_0 可测的有界的 $C([-\tau,0];R^n)$ – 值随机变量 ξ 族且有 $\xi=\{\xi(\theta):-\tau\leqslant\theta\leqslant0\}$. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的转置. 若 $\boldsymbol{A}$ 是矩阵, $\|\boldsymbol{A}\|$ 表示其范数, $\|\boldsymbol{A}\|=\sqrt{\mathrm{trace}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A})}$, $\lambda_{\min}(\boldsymbol{A})$ 和 $\lambda_{\max}(\boldsymbol{A})$ 分别记为 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值中绝对值最小和最大的.

考虑如下中立型随机系统:

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(\boldsymbol{x}(t)-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}(t-\tau)))=\\&\qquad\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau))\,\mathrm{d}t+\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{x}(t-\tau))\,\mathrm{d}\boldsymbol{w}(t),\qquad t\geqslant0.\end{aligned}\tag{1}$$

初始条件

$$\{\boldsymbol{x}(\theta):-\tau\leqslant\theta\leqslant0\}=\xi\in C^b_{F_0}([-\tau,0];R^n),$$

$\tau>0$ 是时滞, $\boldsymbol{G}:R^n\to R^n$, $\boldsymbol{f}:\mathbf{R}_+\times R^n\times R^n\to R^n$, $\boldsymbol{g}:\mathbf{R}_+\times R^n\times R^n\to R^{n\times m}$. 若 $\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{g}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 满足下列基本假设:

(H1) $\boldsymbol{f}$ 和 $\boldsymbol{g}$ 满足局部 Lipschitz 条件及线性增长条件;

(H2) 存在 $k\in(0,1)$ 使得 $|\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y})|\leqslant k|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|$, 对任意 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in R^n$ 成立, 且 $\boldsymbol{G}(0)=\boldsymbol{0}$.

由文献[6]知, 满足假设 H1–H2 的系统(1) 在 $t\geqslant-\tau$ 上存在由 $\boldsymbol{x}(t;\xi)$ 确定的全局唯一连续解.

令 $C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times R^n;\mathbf{R}_+)$ 表示对 t 一次连续可微对 $\boldsymbol{x}$ 二次连续可微的非负函数 $V(t,\boldsymbol{x})$ 的全体. 对任意 $V(t,\boldsymbol{x})\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times R^n;\mathbf{R}_+)$, 定义

$$\begin{aligned}LV(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\ &V_t(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}))+V_{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\\&\frac{1}{2}\mathrm{trace}[\boldsymbol{g}^{\mathrm{T}}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})V_{\boldsymbol{xx}}(t,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{G}(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{g}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})],\end{aligned}$$

其中

$$V_t(t,\boldsymbol{x})=\frac{\partial V(t,\boldsymbol{x})}{\partial t},\quad V_{\boldsymbol{x}}(t,\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial V(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_1},\frac{\partial V(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial V(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_n}\right),$$

$$V_{\boldsymbol{xx}}(t,\boldsymbol{x})=\left(\frac{\partial^2V(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_i\partial x_j}\right)_{n\times n}.$$

本文主要考虑如下不确定中立型线性随机时滞系统

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}(\boldsymbol{x}(t)-(\boldsymbol{F}+\Delta\boldsymbol{F})\boldsymbol{x}(t-\tau))=[(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(t)+(\boldsymbol{B}+\Delta\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}(t-\tau)]\,\mathrm{d}t+\\&\qquad((\boldsymbol{C}+\Delta\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}(t)+(\boldsymbol{D}+\Delta\boldsymbol{D})\boldsymbol{x}(t-\tau))\,\mathrm{d}\boldsymbol{w}(t),\end{aligned}\tag{2}$$

$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{F}\in R^{n\times n}$, 不确定矩阵 $\Delta\boldsymbol{A},\Delta\boldsymbol{B},\Delta\boldsymbol{C},\Delta\boldsymbol{D},\Delta\boldsymbol{F}\in R^{n\times n}$.

我们对不确定系统(2) 有如下假定:

(H3) 存在非负阵 $\boldsymbol{A}_m,\boldsymbol{B}_m,\boldsymbol{C}_m,\boldsymbol{D}_m,\boldsymbol{F}_m\in R^{n\times n}$ 满足

$$\Delta\boldsymbol{A}\in[-\boldsymbol{A}_m,\boldsymbol{A}_m],\quad\Delta\boldsymbol{B}\in[-\boldsymbol{B}_m,\boldsymbol{B}_m],\quad\Delta\boldsymbol{C}\in[-\boldsymbol{C}_m,\boldsymbol{C}_m],$$
$$\Delta\boldsymbol{D}\in[-\boldsymbol{D}_m,\boldsymbol{D}_m],\quad\Delta\boldsymbol{F}\in[-\boldsymbol{F}_m,\boldsymbol{F}_m].$$

1 中立型随机微分时滞方程的LaSalle 不变原理

定理 1 若(H1)(H2)成立, 且存在函数 $V(t,\boldsymbol{x})\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times R^n;\mathbf{R}_+)$, $\eta\in L^1(\mathbf{R}_+;\mathbf{R}_+)$ 及 $w_1,w_2\in C(\mathbf{R}_+\times R^n;\mathbf{R}_+)$, 使 $\forall(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\in\mathbf{R}_+\times R^n\times\mathbf{R}$ 有

$$LV(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant\eta(t)-w_1(t,\boldsymbol{x})+w_2(t,\boldsymbol{y}),\quad w_1(t,\boldsymbol{x})\geqslant w_2(t+\tau,\boldsymbol{x}).$$

并且 $\lim_{|x|\to+\infty}[\inf_{t\geqslant 0}V(t,x)]=+\infty.$

那么,对任意 $\xi\in C^b_{F_0}([-\tau,0];R^n)$, 若存在 $p>2$ 使得 $\sup_{-\tau\leqslant t<\infty}E|x(t;\xi)|^p<\infty$ 则

$$\lim_{t\to\infty}d(x(t;\xi),D_w)=0,\qquad \text{a. s.},$$

其中

$$D_w=\left\{x\in R^n: w_1(t,x(t;\xi))-w_2(t+\tau,x(t;\xi))=0\right\},$$
$$d(x,D_w)=\min_{y\in D_w}|x-y|.$$

证明 固定初始条件 $\xi\in C^b_{F_0}([-\tau,0];R^n)$, $x(t;\xi)$ 简记为 $x(t)$, 对(1)式两端积分可得

$$x(t)-G(x(t-\tau))=x(0)-G(x(-\tau))+\int_0^t f(t,x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}t+\int_0^t g(t,x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}w(t). \tag{3}$$

由文献[8]中引理2.2的结论和条件 $\lim_{|x|\to+\infty}[\inf_{t\geqslant 0}V(t,x)]=+\infty$, 易推出

$$\sigma=\sup|x(t)-G(x(t-\tau))|<\infty,\qquad \text{a. s.}$$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists T>0$, 当 $t\geqslant T$ 时

$$|x(t)|\leqslant|x(t)-G(x(t-\tau))|+k\sup_{t\geqslant 0}|x(t-\tau)|\leqslant \sigma+\varepsilon+k\sup_{t\geqslant 0}|x(t-\tau)|,$$

因此

$$\sup_{T\leqslant t\leqslant T}|x(t)|\leqslant\sigma+\varepsilon+k\sup_{T\leqslant t\leqslant T}\sup_{t\geqslant 0}|x(t-\tau)|\leqslant \sigma+\varepsilon+k\sup_{T-\tau\leqslant t\leqslant T}|x(t)|+k\sup_{T\leqslant t\leqslant T}|x(t)|.$$

故而

$$\sup_{T\leqslant t\leqslant T}|x(t)|\leqslant\frac{\sigma+\varepsilon+k\sup_{T-\tau\leqslant t\leqslant T}|x(t)|}{1-k}. \tag{4}$$

令 $T\to\infty$, 由(4)式, 我们有

$$\sup_{T-\tau\leqslant t\leqslant+\infty}|x(t)|<+\infty,\qquad \text{a. s.}\Rightarrow\sup_{-\tau\leqslant t\leqslant+\infty}|x(t)|<\infty,\qquad \text{a. s.},$$

即一定存在 $\Omega_1\subset\Omega$, $P(\Omega_1)=1$, 使得每一个 $\omega\in\Omega_1$, $|x(t,\omega)|$ 有界. 由文献[9]中的引理2.6、2.7知 $x(t)-G(x(t-\tau))$ 关于 $t\geqslant 0$ 几乎一致连续, 即 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$.

当 $|t-s|<\delta$ 时,

$$|x(t)-G(x(t-\tau))-x(s)-G(x(s-\tau))|<\varepsilon,$$

则

$$|x(t)-x(s)|\leqslant|x(t)-G(x(t-\tau))-x(s)+G(x(s-\tau))|+|G(x(t-\tau))-G(x(s-\tau))|<\varepsilon+k|x(t-\tau)-x(s-\tau)|.$$

所以有

$$\sup_{|t-s|\leqslant\delta}|x(t)-x(s)|\ \varepsilon+k\sup_{|t-s|\leqslant\delta}|x(t-\tau)-x(s-\tau)|,$$

故而

$$\sup_{|t-s|\leqslant\delta}|x(t)-x(s)|<\frac{\varepsilon}{1-k}.$$

即一定存在一个 $\Omega_2\subset\Omega$, $P(\Omega_2)=1$, 使得每一个 $\omega\in\Omega_2$, $|x(t,\omega)|$ 关于 $t\geqslant 0$ 一致连续.
并且由文献[8]中引理2.2知, 对每一 $\omega=\Omega_1\cap\Omega_2$,

$$\int_0^\infty [w_1(t, \boldsymbol{x}(t)) - w_2(t+\tau, \boldsymbol{x}(t)))] \mathrm{d}t < +\infty, \qquad \text{a.s.}$$

用反证法容易证明

$$\lim_{t\to\infty} [w_1(t, \boldsymbol{x}(t, \omega)) - w_2(t+\tau, \boldsymbol{x}(t, \omega))] = 0, \qquad \text{a.s.}, \ \omega \in \Omega_1 \cap \Omega_2. \tag{5}$$

证毕.

定理 2 若条件(H1)和(H2)成立, 且存在 $V \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times R^n; \mathbf{R}_+)$, $\eta \in L^1(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}_+)$, 以及 $w \in C(\mathbf{R}_+ \times R^n, \mathbf{R}_+)$, 常数 $\delta > 1$, 对任意 $(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \in \mathbf{R}_+ \times R^n \times R^n$ 都有

$$LV(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \leqslant \eta(t) - \delta w(t, \boldsymbol{x}) + w(t, \boldsymbol{y}).$$

更进一步, 若存在一个连续非负的函数 $\rho: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+$ 使得

$$w_1(t, \boldsymbol{x}(t, \xi)) - w_2(t+\tau, \boldsymbol{x}(t, \xi)) \geqslant \rho(V(\boldsymbol{x}(t, \xi))), \tag{6}$$

那么, 对任意 $\xi \in C^b_{F_0}([-\tau, 0]; R^n)$, 系统(1) 的解 $\boldsymbol{x}(t, \xi)$ 满足

$$\lim_{t\to\infty} V(t, \boldsymbol{x}(t; \xi)) \in D_\rho, \qquad \text{a.s.},$$

其中 $D_\rho = \left\{ \mu \geqslant 0: \rho(\mu) = 0 \right\}$.

证明 由文献[8]中引理 2.2 的结论知

$$\lim_{t\to\infty} V(t, \boldsymbol{x}(t; \xi)) < \infty, \qquad \text{a.s.}$$

及

$$\int_0^\infty w(t, \boldsymbol{x}(t; \xi)) \mathrm{d}t < \infty,$$

故

$$\lim_{t\to\infty} V(t, \boldsymbol{x}(t; \xi)) < \infty, \qquad \text{a.s. 及} \lim_{t\to\infty} \int_{-\tau}^t w(s, \boldsymbol{x}(s; \xi)) \mathrm{d}s = 0.$$

再根据条件(6)有

$$\int_0^\infty \rho(V(t, \boldsymbol{x}(t; \xi))) \mathrm{d}t < \infty, \qquad \text{a.s.}$$

由于函数 $\rho(\cdot)$ 的连续性, 可得

$$\lim_{t\to\infty} \rho(V(t, \boldsymbol{x}(t; \xi))) = \rho(\lim_{t\to\infty} V(t, \boldsymbol{x}(t; \xi))) = 0, \qquad \text{a.s.}$$

因此, 对所有的 $\omega \in \Omega$, 都有

$$\lim_{t\to\infty} V(t, \boldsymbol{x}(t; \xi)) \in D_\rho, \qquad \text{a.s.}$$

命题得证.

注 1 若 $\boldsymbol{G} \equiv \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{g} \equiv \boldsymbol{0}$, 则系统(1) 脱变为 n 维常微分时滞系统, 此时定理 2 就可演变为文献[9]中的推论 4.1. 因此, 我们的结论是文献[9]中结论的推广.

注 2 定理 1 是中立型随机时滞系统(1)的 LaSalle 不变原理, 在理论上很有价值, 但其应用上条件较难验证. 然而由定理 1 导出的定理 2 较易应用到下面不确定线性随机系统上去.

2 鲁棒稳定性

我们将上述结论应用到下面不确定中立型线性随机时滞系统(2), 建立几乎渐近稳定和几乎指数稳定的代数判据.

引理 1[2] 如果 $\Delta \boldsymbol{A} \in [-\boldsymbol{A}_m, \boldsymbol{A}_m]$, 那么 $\|\Delta \boldsymbol{A}\| \leqslant \|\boldsymbol{A}_m\|$.

定理 3 若 $\|\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_m\| \leqslant 1$, $\alpha > 0$ 且存在正定阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{QA} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QC} +$$

$$(\alpha + 2\|\boldsymbol{Q}\|\|\boldsymbol{A}_m\| + 2\|\boldsymbol{Q}\|\|\boldsymbol{C}\|\|\boldsymbol{C}_m\| + \|\boldsymbol{Q}\|\|\boldsymbol{C}_m\|^2)\boldsymbol{I}$$

是负定阵,并且

$$\lambda_1 = \lambda_{\min}(\boldsymbol{M}) > \lambda_2,$$

其中

$$\lambda_2 = \frac{1}{\alpha}\|\boldsymbol{N}\|^2 + \lambda_{\max}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}) + \|\boldsymbol{Q}\|(2\|\boldsymbol{D}\|\|\boldsymbol{D}_m\| + \|\boldsymbol{D}_m\|^2 + 2\|\boldsymbol{F}\|\|\boldsymbol{B}_m\| + 2\|\boldsymbol{F}_m\|\|\boldsymbol{B}\| + 2\|\boldsymbol{F}_m\|\|\boldsymbol{B}_m\|),$$

且

$$\|\boldsymbol{N}\| \leqslant \|\boldsymbol{Q}\|(\|\boldsymbol{B}\| + \|\boldsymbol{B}_m\|) + (\|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{A}_m\|)\|\boldsymbol{Q}\|(\|\boldsymbol{F}\| + \|\boldsymbol{F}_m\|) + (\|\boldsymbol{C}\| + \|\boldsymbol{C}_m\|)\|\boldsymbol{Q}\|(\|\boldsymbol{D}\| + \|\boldsymbol{D}_m\|),$$

那么,对任意 $\xi \in C^b_{F_0}([-\tau, 0], R^n)$, 不确定随机系统(2) 的解 $\boldsymbol{x}(t;\xi)$ 满足

1) $\lim\limits_{t\to\infty} |\boldsymbol{x}(t;\xi)| = 0$, a. s.;

2) $\limsup\limits_{t\to\infty} \frac{1}{t}\ln|\boldsymbol{x}(t;\xi)| \leqslant -\frac{r}{2}$, a. s., 其中 r 是 $\lambda_1 - r\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}) = \lambda_2 e^{r\tau}$ 的唯一根.

证明 取

$$\boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau)) = (\boldsymbol{C} + \Delta\boldsymbol{C})\boldsymbol{x}(t) + (\boldsymbol{D} + \Delta\boldsymbol{D})\boldsymbol{x}(t-\tau),$$

$$\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{x}(t-\tau)) = (\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}(t) + (\boldsymbol{B} + \Delta\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}(t-\tau),\quad \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}(t-\tau)) = (\boldsymbol{F} + \Delta\boldsymbol{F})\boldsymbol{x}(t-\tau).$$

显然函数 $\boldsymbol{f}(\cdot)$、$\boldsymbol{g}(\cdot)$ 满足(H1), 由引理1知 $\|\boldsymbol{F} + \Delta\boldsymbol{F}\| \leqslant \|\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_m\| < 1$, 所以 $\boldsymbol{G}(\cdot)$ 满足条件(H2).

1) 取 $V(t, \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}$, 记 $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}(t-\tau)$, 我们可得

$$\begin{aligned}LV(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = {}& \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{C} + \\ & \Delta\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C} + \Delta\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{C})\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B})\boldsymbol{y} + \\ & \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{D} + \Delta\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D} + \Delta\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{D} - 2\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{B} - 2\Delta\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B} - \\ & 2\Delta\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{B})\boldsymbol{y} + 2\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{B} + \Delta\boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{F} + \Delta\boldsymbol{F}) + \\ & (\boldsymbol{C} + \Delta\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{D} + \Delta\boldsymbol{D}))\boldsymbol{y}.\end{aligned} \tag{7}$$

设

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{B} + \Delta\boldsymbol{B}) - (\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{F} + \Delta\boldsymbol{F}) + (\boldsymbol{C} + \Delta\boldsymbol{C})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{D} + \Delta\boldsymbol{D}).$$

由引理1,可估计

$$\|\boldsymbol{N}\| \leqslant \|\boldsymbol{Q}\|(\|\boldsymbol{B}\| + \|\boldsymbol{B}_m\|) + (\|\boldsymbol{A}\| + \|\boldsymbol{A}_m\|)\|\boldsymbol{Q}\|(\|\boldsymbol{F}\| + \|\boldsymbol{F}_m\|) + (\|\boldsymbol{C}\| + \|\boldsymbol{C}_m\|)\|\boldsymbol{Q}\|(\|\boldsymbol{D}\| + \|\boldsymbol{D}_m\|), \tag{8}$$

及

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{A} + \Delta\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{C} + \Delta\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C} + \Delta\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{C})\boldsymbol{x} \leqslant \|\boldsymbol{Q}\|(2\|\boldsymbol{A}_m\| + 2\|\boldsymbol{C}\|\|\boldsymbol{C}_m\| + \|\boldsymbol{C}_m\|^2)|\boldsymbol{x}|^2. \tag{9}$$

同理可估计

$$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B})\boldsymbol{y} \leqslant \lambda_{\max}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B})|\boldsymbol{y}|^2, \tag{10}$$

及

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{D} + \Delta\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{D} + \Delta\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{D} - \\ &\quad 2\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{B} - 2\Delta\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B} - 2\Delta\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\Delta\boldsymbol{B})\boldsymbol{y} \leqslant \\ &\quad (2\|\boldsymbol{F}_m\|\|\boldsymbol{Q}\|(\|\boldsymbol{B}\| + \|\boldsymbol{B}_m\|) + \|\boldsymbol{Q}\|\|\boldsymbol{D}_m\|^2 +\end{aligned}$$

$$2\|\boldsymbol{Q}\|\|\boldsymbol{D}\|\|\boldsymbol{D}_m\|+2\|\boldsymbol{F}\|\|\boldsymbol{Q}\|\|\boldsymbol{B}_m\|)|\boldsymbol{y}|^2. \tag{11}$$

将(8)~(11)式代入(7)式得

$$\begin{aligned}LV(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \leqslant\ &\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{QA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QC}+(\alpha+2\|\boldsymbol{Q}\|\|\boldsymbol{A}_m\|+\\&\|\boldsymbol{Q}\|\|\boldsymbol{C}_m\|^2+2\|\boldsymbol{Q}\|\|\boldsymbol{C}\|\|\boldsymbol{C}_m\|)\boldsymbol{I})\boldsymbol{x}+\\&\Big(\frac{1}{\alpha}\|\boldsymbol{N}\|^2+\lambda_{\max}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QD}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QF}-\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QB})+\\&\|\boldsymbol{Q}\|(2\|\boldsymbol{D}\|\|\boldsymbol{D}_m\|+\|\boldsymbol{D}_m\|^2+2\|\boldsymbol{F}\|\|\boldsymbol{B}_m\|+\\&2\|\boldsymbol{F}_m\|\|\boldsymbol{B}\|+2\|\boldsymbol{F}_m\|\|\boldsymbol{B}_m\|)\Big)|\boldsymbol{y}|^2.\end{aligned} \tag{12}$$

令

$$\begin{aligned}&w(\boldsymbol{x})=|\boldsymbol{x}|^2,\ \boldsymbol{M}=\boldsymbol{QA}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}+\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QC}+(\alpha+2\|\boldsymbol{Q}\|\|\boldsymbol{A}_m\|+\\&\quad 2\|\boldsymbol{Q}\|\|\boldsymbol{C}\|\|\boldsymbol{C}_m\|+\|\boldsymbol{Q}\|\|\boldsymbol{C}_m\|^2)\boldsymbol{I},\\&\lambda_1=\lambda_{\min}(-\boldsymbol{M}),\\&\lambda_2=\frac{1}{\alpha}\|\boldsymbol{N}\|^2+\lambda_{\max}(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QD}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QF}-\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{QB})+\\&\quad\|\boldsymbol{Q}\|(2\|\boldsymbol{D}\|\|\boldsymbol{D}_m\|+\|\boldsymbol{D}_m\|^2+2\|\boldsymbol{F}\|\|\boldsymbol{B}_m\|+\\&\quad 2\|\boldsymbol{F}_m\|\|\boldsymbol{B}\|+2\|\boldsymbol{F}_m\|\|\boldsymbol{B}_m\|).\end{aligned}$$

由(12)式及定理3可得

$$LV(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\leqslant-\lambda_1|\boldsymbol{x}|^2+\lambda_2|\boldsymbol{y}|^2.$$

取 $\eta(t)=0,\ w_1(t,\boldsymbol{x})=\lambda_1 w(\boldsymbol{x}),\ w_2(t,\boldsymbol{y})=\lambda_2 w(\boldsymbol{y})$.

由条件知

$$w_1(t,\boldsymbol{x})\geqslant w_2(t+\tau,\boldsymbol{x}),\qquad (t,\boldsymbol{x})\in\mathbf{R}_+\times R^n.$$

取 $\rho(\boldsymbol{x})=(\lambda_1-\lambda_2)\boldsymbol{x}/(2\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}))$ 则

$$w_1(t,\boldsymbol{x}(t,\xi))-w_2(t+\tau,\boldsymbol{x}(t,\xi))\geqslant\rho(V(\boldsymbol{x}(t,\xi))),$$

因此通过上述讨论知: 定理2的所有条件满足, 则

$$\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{x}(t;\xi)=0,\qquad \text{a. s.}$$

2) 令 $m(r)=\lambda_1-r\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q})-\lambda_2\mathrm{e}^{r\tau}$, 我们有

$$m(0)>0,\ m[(\lambda_1-\lambda_2)/(\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}))]<0,\ m'(r)=-\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q})-\lambda_2\tau\mathrm{e}^{r\tau}<0.$$

故, $m(r)=0$ 有唯一正根 $r\in(0,(\lambda_1-\lambda_2)/(\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q})))$.

定义 $U(t,\boldsymbol{x}(t))=\mathrm{e}^{rt}V(t,\boldsymbol{x}(t))$, 则

$$\begin{aligned}LU(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\ &\mathrm{e}^{rt}(rV(t,\boldsymbol{x}(t))+LV(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}))\leqslant\\&\mathrm{e}^{rt}[-(\lambda_1-r\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}))|\boldsymbol{x}(t)|^2+\lambda_2|\boldsymbol{y}(t)|^2]=\\&-w_1(t,\boldsymbol{x})+w_2(t,\boldsymbol{y}),\end{aligned}$$

这里 $w_1(t,\boldsymbol{x})=(\lambda_1-r\lambda_{\max}(\boldsymbol{Q}))\mathrm{e}^{rt}|\boldsymbol{x}|^2,\ w_2(t,\boldsymbol{y})=\lambda_2\mathrm{e}^{rt}|\boldsymbol{y}|^2$.

令 $\eta(t)=0$, 所以由文献[9]中引理2.2知

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}U(t,\boldsymbol{x})<\infty,\qquad \text{a. s.}$$

因此我们可以得到

$$\lim_{t\to\infty}\sup\mathrm{e}^{rt}V(t,\boldsymbol{x}(t,\xi))<\infty,\qquad \text{a. s.}$$

即 $$\lim_{t\to\infty}\sup\frac{1}{t}\ln|\boldsymbol{x}(t;\xi)|\leqslant-\frac{r}{2},\qquad \text{a. s.}$$

证毕.

3 例子与仿真

这里我们举例说明定理 3 的有效性.

例 设 $w(t) = (w_1(t), w_2(t))$ 是二维 Brown 运动, 考虑下列二维不确定中立型线性随机时滞系统(2),

$$A = \begin{pmatrix} -9 & 1 \\ -2 & -10 \end{pmatrix},\ A_m = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.4 & 1.5 \end{pmatrix},\ B_m = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix},$$

$$C_m = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.2 \end{pmatrix},\ D_m = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 \end{pmatrix},\ F_m = \begin{pmatrix} 0.05 & 0.01 \\ 0.03 & 0.04 \end{pmatrix},$$

$$C = D = F = 0_{2\times 2}.$$

取 $Q = I$, $\tau = 0.002$, $\alpha = 2$ 经计算得

$$M = \begin{pmatrix} -9.5485 & -1.0000 \\ -1.0000 & -11.5485 \end{pmatrix},\ \lambda_1 = 9.1343,\ \lambda_2 = 6.7398,\ r = 2.3626.$$

由于满足定理 3 的条件, 因此二维不确定中立型线性随机时滞系统(2) 最终收敛于平衡点(0, 0). 图 1、2 的仿真结果是基于 Runge-Kutta 算法[11] 实现的, 其初始条件 $x_1(0) = 1.5$, $x_2(0) = -3.0$.

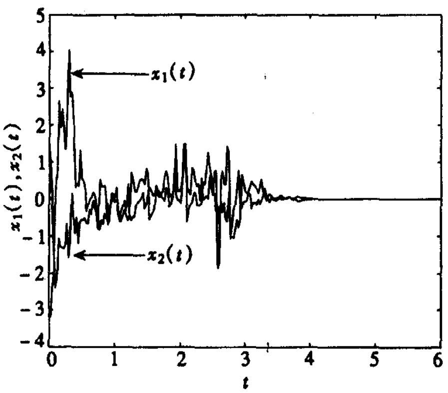

图 1 状态时间关系图

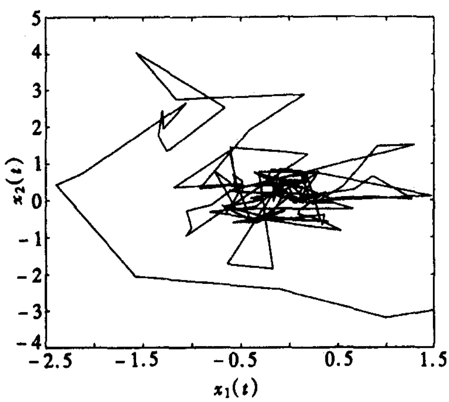

图 2 相图

致谢 作者感谢三峡大学自然科学基金的资助, 感谢编辑和审稿先生对本文提出的合理建议.

[参 考 文 献]

[1] Rubanik V P. Oscillations of Quasilinear Systems With Retardation [M]. Moscow: Nauka, 1969, 2-3.

[2] Mao X, Selfridge C. Stability of stochastic interval systems with time delays[J]. Systems and Control Letters, 2001, **42**(3): 279-290.

[3] Mao X. Robustness of stability of nonlinear systems with stochastic delay perturbations[J]. Systems and Control Letters, 1992, **19**(4): 391-400.

[4] Karatzas I, Shreve S E. Brownian Motion and Stochastic Calculus [M]. Berlin: Springer Verlag, 1991, 55-56.

[5] Mao X. Exponential Stability of Stochastic Differential Equations [M]. London: Marcel Dekker,

1994, 123-124.
[6] Mao X. Stochastic Differential Equations and Applications[M]. London: Horwood, 1997, 84-85.
[7] 邓飞其, 陈金堂, 刘永清. 多模态 Itô 随机系统的均方稳定性与鲁棒镇定[J]. 控制理论与应用, 2000, **17**(4): 569-572.
[8] Mao X. Asymptotic properties of neutral stochastic differential delay equations[J]. Stochastic and Stochastic Reports, 2000, **68**(3): 273-295.
[9] Mao X. LaSalle-type theorems for stochastic differential delay equations [J]. J Math Anal Appl, 1999, **236**(3): 350-369.
[10] Mao X. Stochastic versions of the LaSalle-type theorem[J]. Differential Equations, 1999, **153**(2): 175-195.
[11] Tocino A, Ardanuy R. Runge-Kutta methods for numerical solution of stochastic differential equations [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2002, **138**(2): 219-241.

Robust Stability of Uncertain Neutral Linear Stochastic Differential Delay Systems

JIANG Ming-hui[1,2], SHEN Yi[2], LIAO Xiao-xin[2]
(1. Institute of Nonlinear Complex Systems, China Three Gorges University, Yichang, Hubei 443000, P. R. China;
2. Department of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, P. R. China)

Abstract: The LaSalle-type theorem for the neutral stochastic differential equations with delay was established and then applied to propose algebraic criteria of the stochastically asymptotic stability and almost exponential stability for the uncertain neutral stochastic differential systems with delay. An example was also given to verify the effectiveness of the obtained results.

Key words: neutral stochastic differential system with delay; LaSalle-type theorem; robust stability