

Pasternak 地基上简支板振动问题的准格林函数方法*

袁 鸿, 李善倾, 刘人怀

(暨南大学 应用力学研究所, 广州 510632)

(本刊编委刘人怀来稿)

摘要: 提出一种新的数值方法——准格林函数方法. 以 Pasternak 地基上简支多边形薄板的振动问题为例, 详细阐明了准格林函数方法的思想. 即利用问题的基本解和边界方程构造一个准格林函数, 这个函数满足了问题的齐次边界条件, 采用格林公式将 Pasternak 地基上薄板自由振动问题的振型控制微分方程化为两个耦合的第二类 Fredholm 积分方程. 边界方程有多种选择, 在选定一种边界方程的基础上, 可以通过建立一个新的边界方程来表示问题的边界, 以克服积分核的奇异性. 最后由积分方程的离散化方程组有非平凡解的条件, 求得固有频率. 数值方法表明, 该方法具有较高的精度.

关键词: 格林函数; 积分方程; 薄板振动; Pasternak 地基

中图分类号: O241.8; TU471.2 文献标识码: A

引 言

弹性地基上的板属于两种介质相互作用问题. 最早对弹性地基多采用单参数 Winkler 模式^[1], 认为地基表面位移只限于受荷区域, 这与实际是不相符的. Vlazov^[2]提出的双参数弹性地基模式能够反映出地基受载后的实际变形情况, 因而为研究者所接受.

本文应用^[3]提出的 R-函数理论和准格林函数方法, 研究了 Pasternak 双参数地基上周边简支多边形薄板的振动问题. 首先采用中间变量将简支多边形薄板振动问题的振型控制微分方程分解为两个互相耦合的二阶微分方程, 利用问题的基本解和边界方程构造准格林函数, 这个函数满足了问题的齐次边界条件, 但没能满足基本微分方程. 建立准格林函数的关键在于将问题的边界用规范化方程 $\omega = 0$ 表示出来, 问题的区域由不等式 $\omega > 0$ 表示出来. ω 将存在多种选择, 经过适当挑选, 积分方程核的奇异性可以被克服. R-函数理论保证了对于任何复杂的区域, 总可以找到函数 ω , 从而可将原问题化为无奇异性的第二类 Fredholm 积分方程. 使用这一方法, 袁鸿已成功求解了 Winkler 地基上固支薄板弯曲问题^[4], 陆伟和袁鸿成功求解了 Winkler 地基上简支薄板弯曲问题^[5], 王红和袁鸿已成功求解了弹性扭转问题^[6-7].

* 收稿日期: 2006-10-17; 修订日期: 2007-04-23

基金项目: “重大工程灾害与控制”教育部重点实验室(暨南大学); “工程结构故障诊断”广东省高等学校科研型重点实验室(暨南大学)资助项目

作者简介: 袁鸿(1963—), 男, 湘潭人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人. Tel: + 86 20 85211772; E-mail: yuanhong@snu.edu.cn).

1 基本方程

Pasternak 地基上薄板自由振动问题的振型控制微分方程^[8]为

$$D \cdot^4 W(\mathbf{x}) - G_p \cdot^2 W(\mathbf{x}) + kW(\mathbf{x}) - \omega^2 m W(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

式中, $\cdot^4 = (\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2)^2$ 为双调和算子, 弯曲刚度 $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$, h 是板的厚度, E 和 ν 分别是弹性模量和泊松比, k 为弹性地基系数, G_p 为地基剪切模量, ω 为固有频率, m 为单位面积内的质量, $W(\mathbf{x})$ 表示振型函数, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$. Ω 为笛卡儿坐标系中板的中面 (x_1-x_2 平面) 所包含的域.

引入中间变量

$$M = \frac{1}{1+\nu}(M_1 + M_2), \quad (2)$$

式中, M_1, M_2 的表达式为:

$$M_1 = -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} \right], \quad (3a)$$

$$M_2 = -D \left[\frac{\partial^2 W}{\partial x_2^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial x_1^2} \right]. \quad (3b)$$

将(2)式代入微分方程(1)中, 则 Pasternak 地基上简支薄板自由振动问题的振型控制微分方程可降阶分解为两个相互耦合的二阶微分方程的边值问题

$$\cdot^2 M = -\omega^2 m W + kW + \frac{G_p}{D} M, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (4)$$

$$\cdot^2 W = -\frac{M}{D}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (5)$$

式中, $\cdot^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ 为拉普拉斯算子.

2 边界约束条件

在简支约束边界条件下薄板边界上的挠度应为 0, 弯矩也应等于 0, 则有

$$W = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (6)$$

$$M = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma. \quad (7)$$

3 积分方程的推导

设 $\omega = 0$ 是边界 Γ 的一阶规范化方程, 即满足^[3]

$$\omega(\mathbf{x}) = 0, \quad |\cdot^2 \omega| = 1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad (8a)$$

$$\omega(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (8b)$$

构造准格林函数如下:

$$G(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln r - e(\mathbf{x}, \xi), \quad (9)$$

$$e(\mathbf{x}, \xi) = \frac{1}{2\pi} \ln R, \quad (10)$$

其中

$$r = \|\xi - \mathbf{x}\| = \sqrt{(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2}, \quad (11a)$$

$$\mathbf{r} = (\xi_1 - x_1)\mathbf{i} + (\xi_2 - x_2)\mathbf{j}, \quad (11b)$$

$$R = \sqrt{r^2 + 4\omega(\xi)\omega(\mathbf{x})}, \quad (11c)$$

式中, i, j 分别表示 x_1, x_2 方向的单位向量, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\xi = (\xi_1, \xi_2)$. 显然准格林函数 $G(\mathbf{x}, \xi)$ 满足条件

$$G(\mathbf{x}, \xi) |_{\xi \in \partial \Omega} = 0. \quad (12)$$

为了将边值问题(4)和边值问题(5)化为积分方程, 应用 $C^2(\Omega)$ 函数类的格林公式, 对所有的 $U, V \in C^2(\Omega \cup \Gamma)$ 有

$$\int_{\Omega} (V \Delta U - U \Delta V) d\xi \Omega = \int_{\Gamma} \left[V \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n} \right] d\xi \Gamma. \quad (13)$$

用 W 和准格林函数 G 分别代替(13)式中的 U, V , 并注意到 $(1/2\pi) \ln r$ 是拉普拉斯算子的基本解^[9], 则利用(5)式, (6)式和(12)式可得

$$W(\mathbf{x}) = W_0(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} W(\xi) K(\mathbf{x}, \xi) d\xi \Omega, \quad (14)$$

$$W_0(\mathbf{x}) = -\frac{1}{D} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) M(\xi) d\xi \Omega, \quad (15)$$

$$K(\mathbf{x}, \xi) = \left[\frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi_2^2} \right] e(\mathbf{x}, \xi). \quad (16)$$

同理, 用 M 和准格林函数 G 分别代替(13)式中的 U, V , 则利用(4)式, (7)式和(12)式可得

$$M(\mathbf{x}) = M_0(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} M(\xi) K(\mathbf{x}, \xi) d\xi \Omega, \quad (17)$$

$$M_0(\mathbf{x}) = (-\omega^2 m + k) \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) W(\xi) d\xi \Omega + \frac{G_p}{D} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \xi) M(\xi) d\xi \Omega. \quad (18)$$

将表达式(10)代入(16)式中, 并根据(11)式中 R 与 ω 的关系, 可以得到

$$K(\mathbf{x}, \xi) = \frac{R^2 \omega(\mathbf{x}) \Delta \omega + 4 \omega(\mathbf{x}) \omega - 4(\mathbf{r} \cdot \Delta \omega) \omega(\mathbf{x}) - 4 \omega^2(\mathbf{x}) (\Delta \omega)^2}{\pi R^4}, \quad (19)$$

式中, $\omega = \omega(\xi)$, $\Delta = \Delta_{\xi}$.

当 $R = 0$ 时, 即 $\mathbf{x} = \xi$ 且 $\omega = 0$ 时, 表达式(19)中 $K(\mathbf{x}, \xi)$ 才可能出现不连续性. 实际上, 当 $\mathbf{x} = \xi$ 时, (19)式可化为:

$$K(\mathbf{x}, \xi) |_{\mathbf{x}=\xi} = \frac{1 + \omega \Delta \omega - (\Delta \omega)^2}{4\pi \omega^2}. \quad (20)$$

为了使积分核 $K(\mathbf{x}, \xi) \in C(\Omega \cup \partial \Omega)$, 将(20)式的分子 $1 + \omega \Delta \omega - (\Delta \omega)^2$ 展开成 ω 的幂级数后, 幂级数的常数项和1次项的系数必须等于0. 下面通过构造一个新的边界规范化方程来保证 $K(\mathbf{x}, \xi)$ 的连续性, 为此假设

$$\omega = \omega_0 + \omega_0^2 \phi, \quad (21)$$

式中, $\omega_0 = 0$ 是边界 Γ 的一阶规范化方程, 即满足(8)式. 显然, $\omega = 0$ 也是一阶规范化方程. 容易证明. 只要选取

$$\phi = \frac{1}{2} \left[\Delta \omega_0 + \frac{1 - (\Delta \omega_0)^2}{\omega_0} \right], \quad (22)$$

就能保证 $K(\mathbf{x}, \xi)$ 在积分域内处处连续, 将表达式(22)代入(21)式中, 可得

$$\omega = \omega_0 + \frac{1}{2} \omega_0^2 \left[\Delta \omega_0 + \frac{1 - (\Delta \omega_0)^2}{\omega_0} \right]. \quad (23)$$

因此, 我们可以通过任意选择一个边界规范化方程 $\omega_0 = 0$, 就可以根据(23)式建立一个新的边界规范化方程 $\omega = 0$, 从而就可以保证积分核 $K(\mathbf{x}, \xi)$ 的连续性.

4 积分方程的离散

为了将 Pasternak 地基上简支多边形薄板自由振动问题的等效积分方程(14)、等效积分方

程(17)进行离散化. 把积分域 Ω 划分为若干子域 $\Omega_i (i = 1, 2, \dots, N)$, 在各子域中分别应用中矩形公式, 进行数值求积. 则积分方程(14)、积分方程(17)可化为齐次线性代数方程组:

$$\begin{bmatrix} A_{N \times N} & B_{N \times N} \\ C_{N \times N} & A_{N \times N} \end{bmatrix} [M(x_1) \quad \dots \quad M(x_N) \quad W(x_1) \quad \dots \quad W(x_N)]^T = 0, \quad (24)$$

其中 N 是划分的子域数; $M(x_l)$ 、 $W(x_l)$ 分别是 M 和 W 在 x_l 处的未知虚拟值.

$$A_{N \times N} = (a_{ij})_{N \times N}, \text{ 当 } i \neq j \text{ 时, } a_{ij} = K(x_i, \xi)A_j + \frac{G_p}{D}G(x_i, \xi)A_j,$$

$$\text{当 } i = j \text{ 时, } a_{ij} = K(x_i, \xi)A_j + \frac{G_p}{D}G(x_i, \xi)A_j - 1,$$

$$B_{N \times N} = (b_{ij})_{N \times N}, \quad b_{ij} = (-\omega^2 m + k)G(x_i, \xi)A_j,$$

$$C_{N \times N} = (c_{ij})_{N \times N}, \quad c_{ij} = -\frac{G(x_i, \xi)A_j}{D} \quad (i = 1, 2, \dots, N; j = 1, 2, \dots, N),$$

A_i 表示第 i 个子域的面积.

齐次方程组(24)有非平凡解的条件是其系数行列式等于 0, 即

$$\begin{vmatrix} A_{N \times N} & B_{N \times N} \\ C_{N \times N} & A_{N \times N} \end{vmatrix} = 0, \quad (25)$$

求解(25)式, 可以得到前 N 阶固有频率 ω , 或 $f = \omega / (2\pi)$.

将求得各阶固有频率 ω 代入线性方程组(24)中, 还可求出

各子域上挠度的比值, 即各阶振动的模态.

5 数值算例

例 1 图 1 所示 Pasternak 地基上周边简支多边形薄板, 当 $a = b = d = e = c/2 = 1$ 为正方形薄板, 取厚度 $t = 0.1$, 弹性模量取 $E = 3 \times 10^9$, 泊松比 $\nu = 0.3$, 单位面积内的质量 $m = 780$, 弹性地基系数 $k = 2 \times 10^7$, 地基剪切模量 $G_p = 2 \times 10^5$. 根据 R-函数理论^[3], 只要取

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2},$$

式中, $\omega_1 = (c - x_2)x_2/c$, $\omega_2 = (1/(2a))(a^2 - x_1^2)$. 则 $\omega_0 = 0$ 是正方形板边界的一阶规范化方程, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ 分别表示简支正方形板的各个边. 采用 4 种正方形网格布置, 计算结果列于表 1 中, 并与解析解的计算结果进行了对比.

表 1 Pasternak 地基上周边简支正方形板的固有频率 f (误差 $e_r/\%$)

方法		模态阶数					
		1		2		3	
		频率 f	误差 e_r	频率 f	误差 e_r	频率 f	误差 e_r
本文方法	5×5	30.376	1.321	48.424	5.986	71.438	9.531
	7×7	30.143	0.544	47.100	3.088	68.972	5.750
	9×9	30.062	0.274	46.502	1.779	67.511	3.510
	11×11	30.027	0.157	46.205	1.129	66.719	2.295
解析解		29.980	-	45.689	-	65.222	-

例 2 图 1 所示 Pasternak 地基上周边简支多边形薄板, 当 $a = b = d = e = 1.25$, $c = 2$ 为长方形薄板, 取厚度 $t = 0.1$, 弹性模量 $E = 3 \times 10^9$, 泊松比 $\nu = 0.3$, 单位面积内的质量 $m =$

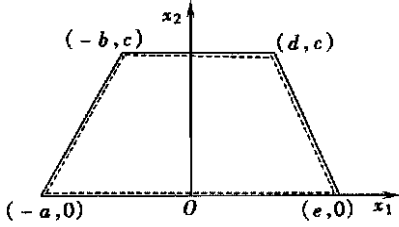


图 1 Pasternak 地基上简支多边形薄板

780, 弹性地基系数 $k = 2 \times 10^7$, 地基剪切模量 $G_p = 2 \times 10^6$. 根据 R-函数理论^[3], 只要取

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2},$$

式中, $\omega_1 = (c - x_2)x_2/c$, $\omega_2 = (1/(2a))(a^2 - x_1^2)$. 则 $\omega_0 = 0$ 是长方形板边界的一阶规范化方程, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ 分别表示简支长方形板的各个边. 采用 4 种长方形网格布置, 计算结果列于表 2 中, 并与解析解的计算结果进行了对比.

表 2 Pasternak 地基上周边简支长方形板的固有频率 f (误差 $e_r/\%$)

方法	模态阶数						
	1		2		3		
	频率 f	误差 e_r	频率 f	误差 e_r	频率 f	误差 e_r	
本文方法	5×5	32.947	1.273	45.413	3.956	53.537	5.741
	7×7	32.706	0.532	44.599	2.092	52.117	2.955
	9×9	32.620	0.267	44.206	1.193	51.491	1.719
	11×11	32.583	0.154	44.012	0.749	51.178	1.100
解析解	32.533	-	43.685	-	50.621	-	

例 3 图 1 所示 Pasternak 地基上周边简支多边形薄板, 当 $a = e$, $b = d$, $a = 1.5$, $b = 1$, $c = 2$ 为梯形薄板, 取板厚 $t = 0.1$, 板的弹性常数 $E = 3 \times 10^9$, 泊松比 $\nu = 0.3$, 单位面积内的质量 $m = 780$, 弹性地基系数 $k = 2 \times 10^7$, 地基剪切模量 $G_p = 2 \times 10^5$. 根据 R-函数理论^[3], 取

$$\omega_0 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} - \sqrt{\omega_1^2 + \omega_3^2} - \sqrt{\omega_2^2 + \omega_3^2} + \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2},$$

式中

$$\omega_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + (c/(a-b))^2}} \left\{ \frac{ac}{a-b} + \frac{c}{a-b} x_1 - x_2 \right\},$$

$$\omega_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + (c/(a-b))^2}} \left\{ \frac{ac}{a-b} - \frac{c}{a-b} x_1 - x_2 \right\},$$

$$\omega_1 = \frac{(c - x_2)x_2}{c},$$

则 $\omega_0 = 0$ 是梯形板边界的一阶规范化方程, $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ 分别表示简支梯形板的各个边. 采用 4 种梯形网格布置, 计算结果列于表 3 中.

表 3 Pasternak 地基上周边简支梯形板的固有频率 f (误差 $e_r/\%$)

方法	模态阶数			
	1	2	3	
	频率 f	频率 f	频率 f	
本文方法	5×5	32.962 6	45.574 0	53.507 0
	7×7	32.767 9	44.775 6	52.133 9
	9×9	32.699 3	44.431 2	51.538 6
	11×11	32.669 2	44.254 3	51.243 6

6 结 论

本文应用 R-函数理论来构造准格林函数, 将 Pasternak 地基上简支多边形薄板自由振动问题的振型微分方程化为第二类 Fredholm 积分方程进行求解. 通过将本文方法的计算结果与解析解进行比较, 表明本文方法的结果具有较高精度. 准格林函数方法为研究 Pasternak 地基上

的复杂边界形状薄板自由振动问题提出了一种新的数学方法. R-函数理论还可用来构造满足边界条件的试函数, 与 Ritz 法等加权残值法结合起来, 有效地解决工程中的各种边值问题^[10].

[参 考 文 献]

- [1] Winkler E. Die Lehre von der Elastigtitat und Festigkeit [M]. Dominicus: Prague, 1867.
- [2] Salvadori A D S. Elastic Analysis of Soil Foundation Interaction [M]. London: Elsevier Scientific Publishing Co, 1979.
- [3] 袁鸿. R-函数理论在薄板自由振动问题中的应用[J]. 计算力学学报, 1999, 16(4): 415-421.
- [4] 袁鸿. Winkler地基上薄板问题的准格林函数方法[J]. 计算力学学报, 1999, 16(4): 478-482.
- [5] 陆伟, 袁鸿. 准格林函数方法在 Winkler地基上简支平行四边形板中的应用[J]. 暨南大学学报(自然科学与医学版), 2006, 27(1): 81-86.
- [6] 王红, 袁鸿. 准格林函数方法在弹性扭转问题中的应用[J]. 华南理工大学学报(自然科学版), 2004, 32(11): 86-88.
- [7] 王红, 袁鸿. R-函数理论在梯形截面柱弹性扭转问题中的应用. 华中科技大学学报(自然科学版), 2005, 33(11): 99-101.
- [8] 郑建军, 樊承谋. 双参数地基板振动的中值定理[J]. 上海力学, 1995, 16(2): 166-171.
- [9] Ortner V N. Regularisierte faltung von distributionen. Teil 2: Eine tabelle von fundamentallösungen [J]. Zeitschrift Fur Angewandte Mathematik und Physik, 1980, 31(1): 155-173.
- [10] Kurpa L V. Solution of the problem of deflection and vibration of plates by the R-function method [J]. Sov Appl Mech, 1984, 20(5): 470-473.

Green Quasifunction Method for Vibration of Simply-Supported Thin Polygonic Plates on Pasternak Foundation

YUAN Hong, LI Shan-qing, LIU Ren-huai

(Institute of Applied Mechanics, Jinan University, Guangzhou 510632, P. R. China)

Abstract: A new numerical method—Green quasifunction method is proposed. The idea of Green quasifunction method was clarified in detail by considering vibration problem of simply-supported thin polygonic plates on Pasternak foundation. A Green quasifunction was established by using the fundamental solution and boundary equation of the problem. This function satisfies the homogeneous boundary condition of the problem. The mode shape differential equation of vibration problem of simply-supported thin plates on Pasternak foundation was reduced to two simultaneous Fredholm integral equations of the second kind by Green formula. There are multiple choices for the normalized boundary equation. Based on a chosen normalized boundary equation, a new normalized boundary equation can be established such that the irregularity of the kernel of integral equations was overcome. Finally, natural frequency was obtained by the condition that there exists a nontrivial solution in the numerically discrete algebraic equations derived from the integral equations. Numerical results show high accuracy of the Green quasifunction method.

Key words: Green function; integral equation; vibration of thin plate; Pasternak foundation