

任意精度的三点紧致显格式 及其在 CFD 中的应用*

林建国, 谢志华, 周俊陶

(大连海事大学 环境科学与工程学院, 辽宁 大连 116026)

(林建忠推荐)

摘要: 通过在泰勒级数展开中运用逐阶迭代的方法, 推导出了空间任意精度的三点紧致显格式的表达式, 又由 Fourier 分析法得到了格式的数值弥散和耗散特性. 与以往的高精度紧致差分格式不同, 提出的格式不用隐式求解代数方程组并且可以达到任意精度. 通过方波问题和顶盖方腔流的算例表明, 格式在稀疏网格下可以得到很高的精度, 不仅能节省计算量, 而且易于编程, 有很高的计算效率.

关键词: 任意精度; 紧致; 三节点; 显格式; 方腔流
中图分类号: O241.82; X145 **文献标识码:** A

引 言

近年来, 高精度紧致格式在模拟 Navier-Stokes 方程中越来越受到重视, 而且已经有了很多效果很好的应用. 当达到相同的精度时, 传统的格式需要更多的节点, 并且对边界点的处理比较复杂; 而紧致格式由于差分模板的节点数少, 而且精度高, 所以应用前景很好. 关于紧致格式的边界处理可以参见 Carpenter^[1] 的文献.

基于 Lele^[2], 各种高精度的紧致格式发展得很快, 如 Chu 和 Fan^[3] 通过在各节点上应用 Hermite 插值得到了三点六阶和八阶高精度紧致格式; Mahesh^[4] 也通过把一阶导数和二阶导数的离散方程耦合起来求解, 得到了高精度的紧致格式, 与文献[3] 中的差别是差分模板不仅仅局限于三点. Hixon^[5] 通过对导数的系数矩阵进行预处理, 得到了求解高阶紧致格式的预处理方法, 可以节省部分导数方程组求解的工作量. 与此同时, Tolstykh 和 Lipavskii^[6] 提出了三阶和五阶精度的迎风紧致格式, Ma 等^[7] 也提出了三阶和五阶精度迎风紧致格式. Ma 和 Fu^[8] 通过把节点的任意阶导数加在方程里一起求解, 又提出了任意精度的超紧致格式. Boersma^[9] 发展了交错格式的高精度紧致格式, 袁湘江和周恒^[10] 利用了三阶迎风紧致格式求解了激波捕获问题. 近期, 刘儒勋和吴玲玲^[11] 利用四阶的小模板简化 Padé 格式求解了非线性发展方程.

以上高精度紧致格式大都是隐式求解, 需要求解大型的联立代数方程组得到节点的导数

* 收稿日期: 2006-05-15; 修订日期: 2007-04-26

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50479053)

作者简介: 林建国(1960—), 男, 大连人, 教授, 博士生导师(联系人, Tel: + 86-411-82931948; Fax: + 86-411-84727632; E-mail: ljlin@126.com).

值、函数值, 计算量比较大. 而且很多高精度的紧致格式不是完全意义的紧致, 因为它的差分模板用的不仅仅是 3 个点, 有可能是更多的点. 关于高精度的传统差分格式、交错格式的差分格式和各种紧致的差分格式可以参见 Fomberg 和 Christ^[12]. 基于以上原因, 本文利用文献[13]中逐阶迭代的思想, 提出了任意精度的三点紧致显格式, 本格式用的是完全意义下的 3 个节点上的值, 与 Ma 和 Fu^[8]提出的超紧致格式不同, 本文提出的是显式的格式, 不用求解代数方程组, 不仅能够节省计算量, 而且易于编程, 有很高的计算效率.

本文首先给出了三点紧致空间导数的推导, 接下来利用 Lele^[2]的分析方法对提出的格式进行了 Fourier 分析, 得到了格式的数值弥散与耗散特性. 通过方波和顶盖方腔流的算例, 表明本文格式可以在稀疏网格下得到很高的精度, 具有很高的计算效果.

1 三点紧致空间导数的推导

本文推导以一维为例, 二维、三维情况类似.

首先定义本文所用算子和差商如下:

$$\begin{aligned} D_x &= h \frac{\partial}{\partial x}, \quad D_x^\pm = h \frac{\partial^\pm}{\partial x}, \quad D_{xx} = h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \delta_x \phi_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2}, \\ \delta_x^+ \phi_i &= (\delta_x^+)^1 \phi_i = \phi_{i+1} - \phi_i, \quad \delta_x^- \phi_i = (\delta_x^-)^1 \phi_i = \phi_i - \phi_{i-1}, \quad \delta_{xx}^1 \phi_i = \phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i, \\ \delta_{xx}^k \phi_i &= \delta_{xx}^{k-1} \phi_{i+1} + \delta_{xx}^{k-1} \phi_{i-1} - 2\delta_{xx}^{k-1} \phi_i, \quad (\delta_x^+)^k \phi_i = (\delta_x^+)^{k-1} \phi_{i+1} - (\delta_x^+)^{k-1} \phi_i, \\ (\delta_x^-)^k \phi_i &= (\delta_x^-)^{k-1} \phi_i - (\delta_x^-)^{k-1} \phi_{i-1}, \end{aligned}$$

其中 ϕ_i 为 i 点的函数值 ($i = 0, 1, 2, \dots, M-1, M$), $k \geq 2$, h 为空间网格步长.

1.1 二阶导数 D_{xx} 高阶精度的推导

把函数值 ϕ_{i-1} 和 ϕ_{i+1} 在 i 点进行 $(2N)$ 阶泰勒展开并相加, 引入以上定义得到:

$$D_{xx} \phi_i = \left[\delta_{xx}^1 - \sum_{k=2}^N \frac{2}{(2k)!} \cdot \left[h \frac{\partial}{\partial x} \right]^{2k} \right] \phi_i + O(h^{2(N+1)}), \quad (1)$$

进一步把 $(h(\partial/\partial x))^2 = D_{xx}$ 代入(1)式得到:

$$D_{xx} \phi_i = \left[\delta_{xx}^1 - \sum_{k=2}^N \frac{2}{(2k)!} \cdot (D_{xx})^k \right] \phi_i + O(h^{2(N+1)}). \quad (2)$$

我们的目的是要得到紧致形式的二阶导数公式, 只要将(2)式表达的二阶导数用仅含有 $\delta_{xx}^k \phi_i$, $k = 1, 2, 3, \dots, N$ 的式子表达即可. 假设进行 $2(N-1)$ 阶展开时, $D_{xx} \phi_i$ 可表示为:

$$D_{xx} \phi_i = \left[\delta_{xx}^1 - \sum_{k=2}^{N-1} A_k \cdot \delta_{xx}^k \right] \phi_i + O(h^{2N}), \quad (3)$$

A_k ($k = 2 \sim N-1$) 为已知. 则进行 $(2N)$ 阶展开时, $D_{xx} \phi$ 可以表达为:

$$D_{xx} \phi = \left[\delta_{xx}^1 - \sum_{k=2}^{N-1} A_k \cdot \delta_{xx}^k - A_N \cdot \delta_{xx}^N \right] \phi + O(h^{2(N+1)}). \quad (4)$$

在 A_k ($k = 2 \sim N-1$) 均已知的条件下, 求得 A_N , 这样我们就得到了二阶导数的任意 $(2N)$ 阶精度的显式紧致表达式, 下面, 进行 A_N 的推导

把(4)式代入(2)式的右边得到:

$$D_{xx} \phi = \left\{ \delta_{xx}^1 - \sum_{k=2}^N \frac{2}{(2k)!} \cdot \left[\delta_{xx}^1 - \sum_{j=2}^{N-1} A_j \cdot \delta_{xx}^j - A_N \cdot \delta_{xx}^N \right]^k \right\} \phi_i + O(h^{2(N+1)}), \quad (5)$$

由于只保留到 $O(h^{2N})$ 且 $k \geq 2$, $\delta_{xx}^k \sim O(h^{2k})$, 所以(5)式中的 $A_N \cdot \delta_{xx}^N$ 这项已经可以忽略, 上式变为:

$$D_{xx}\phi = \left\{ \delta_{xx}^1 - \sum_{k=2}^N \frac{2}{(2k)!} \cdot \left[\delta_{xx}^1 - \sum_{j=2}^{N-1} A_j \cdot \delta_{xx}^j \right]^k \right\} \phi_i + O(h^{2(N+1)}). \quad (6)$$

由(6)式可以看出

$$\sum_{k=2}^N \frac{2}{(2k)!} \cdot \left[\delta_{xx}^1 - \sum_{j=2}^{N-1} A_j \cdot \delta_{xx}^j \right]^k,$$

展开后 δ_{xx}^N 的系数即为所求的 A_N . 下面我们通过多项式定理推导出 δ_{xx}^N 的系数 A_N 的表达式.

多项式定理 设 x_1, x_2, \dots, x_p 是 p 个不同的数, n, p 是任意两个正整数, 则有

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_p)^n = \sum_{\substack{n_1+n_2+\dots+n_p=n \\ n_i \geq 0, i=1,2,\dots,p}} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_p!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_p^{n_p}. \quad (7)$$

由多项式定理得: 即把 $x_1 = \delta_{xx}^1, x_2 = -A_2 \cdot \delta_{xx}^2, \dots, x_p = -A_{N-1} \cdot \delta_{xx}^{N-1}$ 代入到多项式定理, 可以得到 D_{xx} 中的 δ_{xx}^N 前的系数 A_N ($N \geq 3$) 为(其中 $A_2 = 1/12$)

$$A_N = \sum_{k=2}^N \frac{2}{(2k)!} \cdot \sum_{\substack{n_i \geq 0, i=1,2,\dots,N-1 \\ n_1+2n_2+\dots+(N-1)n_{N-1}=N \\ n_1+n_2+\dots+n_{N-1}=k}} \frac{k!}{n_1! n_2! \dots n_{N-1}!} \cdot (-1)^{n_2+n_3+\dots+n_{N-1}} \cdot \prod_{j=2}^{N-1} (A_j)^{n_j}, \quad (8)$$

通过(8)式, 就可以得到二阶空间导数的任意阶精度的紧致显格式. 限于篇幅, 本文仅给出 A_k ($k = 2 \sim 10$) 的值, 如表 1 所示.

表 1 高阶紧致二阶导数式(4)中的系数

A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
1/12	-1/90	1/560	-1/3 150	1/16 632	-1/84 084	1/411 840	-1/1 969 110	1/9 237 800

1.2 一阶空间导数 D_x 高阶精度的推导

1.2.1 中心差分的 $|$ 阶空间导数

把函数值 ϕ_{i-1} 和 ϕ_{i+1} 在 i 点进行 $(2N)$ 阶泰勒展开并相减, 与(1)式类似, 得到

$$D_x \phi_i = \left[\delta_x - \sum_{k=2}^N \frac{1}{(2k-1)!} \cdot \left(h \frac{\partial}{\partial x} \right)^{2k-1} \right] \phi_i + O(h^{2(N+1)}), \quad (9)$$

把 $(h(\partial/\partial x)) = D_x$ 代入上式得到:

$$D_x \phi_i = \left[\delta_x - \sum_{k=2}^N \frac{1}{(2k-1)!} \cdot (D_x)^{2k-1} \right] \phi_i + O(h^{2(N+1)}), \quad (10)$$

由于 $(2N-1)$ 阶的导数可以由一阶导数和 $2(k-1)$ 阶的导数表示而成, 即

$$(D_x)^{2k-1} = D_x (D_{xx})^{k-1}. \quad (11)$$

所以把(11)式代入(10)式便得到了我们逐步求解高阶精度一阶导数的公式

$$D_x \phi_i = \left[\delta_x - \sum_{k=2}^N \frac{1}{(2k-1)!} \cdot D_x (D_{xx})^{k-1} \right] \phi_i + O(h^{2(N+1)}), \quad (12)$$

由于截断误差为 $O(h^2)$ 的 $D_x \phi_i$ 的表达式已知为 $D_x \phi_i = \delta_x \phi_i$, 而截断误差为 $O(h^{2N})$ 的 $D_{xx} \phi_i$ 的表达式我们已经在上一节得到了. 所以我们利用低阶的 $D_x \phi_i$ 的表达式逐阶往(12)式中迭代, 然后舍去高于截断误差阶数的高阶项, 我们就可以得到了只用 $\delta_x \phi_i$ 和 $\delta_{xx}^k \phi_i$ 表示成的 $D_x \phi_i$ 的高阶表达式. 具体推导与 $D_{xx} \phi_i$ 的推导类似, 我们假设 $D_x \phi_i$ 可以化为只含 $\delta_x \phi_i$ 和 $\delta_{xx}^k \phi_i$ 的形式, 且认为进行 $2(N-1)$ 阶的泰勒展开时, $D_x \phi_i$ 可以化为:

$$D_x \phi_i = \left[\delta_x - \sum_{k=2}^{N-1} B_k \cdot \delta_x (\delta_{xx}^{k-1}) \right] \phi_i + O(h^{2N}), \quad (13)$$

$B_k (k = 2 \sim N-1)$ 为已知. 则进行 $(2N)$ 泰勒展开时, $D_x \phi_i$ 可以化为:

$$D_x \phi_i = \left[\delta_x - \sum_{k=2}^{N-1} B_k \cdot \delta_x (\delta_{xx}^{k-1}) - B_N \cdot \delta_x (\delta_{xx}^{N-1}) \right] \phi_i + O(h^{2N+2}). \quad (14)$$

我们的目的就是求出新的一阶的未知数 B_N , 这样我们就得到了一阶导数的任意阶精度的显式紧致表达式.

把(3)式和(13)式代入(12)式得到:

$$D_x \phi_i = \left\{ \delta_x - \sum_{k=2}^N \frac{1}{(2k-1)!} \cdot \left\{ \left[\delta_x - \sum_{j=2}^{N-1} B_j \cdot \delta_x (\delta_{xx}^{j-1}) \right] \times \left[\delta_{xx}^1 - \sum_{j=2}^{N-1} A_j \cdot \delta_{xx}^j \right]^{k-1} \right\} \right\} \phi_i + O(h^{2(N+1)}), \quad (15)$$

由于 A_k 和 $B_k (k = 1 \sim N-1)$ 都是已知的, 所以通过展开(15)式, 忽略高阶项, 便得到了我们更高一阶 $\delta_x (\delta_{xx}^{N-1})$ 的系数 B_N . 以下给出了 $N = 5$ 时的表达式

$$D_x \phi_i = \left[\delta_x - \frac{1}{6} \delta_x (\delta_{xx}^1) + \frac{1}{30} \delta_x (\delta_{xx}^2) - \frac{1}{140} \delta_x (\delta_{xx}^3) + \frac{1}{630} \delta_x (\delta_{xx}^4) \right] \phi_i + O(h^{12}). \quad (16)$$

1.2.2 前差的 $|$ 阶空间导数

把函数值 ϕ_{i+1} 在 i 点进行 (N) 阶泰勒展开得到:

$$D_x \phi_i = \left[\delta_x^+ - \sum_{k=2}^N \frac{1}{k!} \cdot \left(h \frac{\partial}{\partial x} \right)^k \right] \phi_i + O(h^{N+1}). \quad (17)$$

同理, 通过同样的方法可以得到前差一阶导数的高阶精度公式为:

$$D_x \phi_i = \left[\delta_x^+ - \sum_{k_1=1}^{(N-1)/2} \frac{1}{(2k_1+1)!} \cdot [D_x (D_{xx})^{k_1}] - \sum_{k_2=1}^{N/2} \frac{1}{(2k_2)!} \cdot (D_{xx})^{k_2} \right] \phi_i + O(h^{N+1}), \quad (18)$$

其中 $(N-1)/2$ 和 $N/2$ 取其整数部分的值.

以下给出了 $N = 10$ 的一阶前差导数的表达式如下:

$$D_x \phi_i = \left[\delta_x^+ - \frac{1}{2} \delta_{xx}^1 - \frac{1}{6} \delta_x^+ (\delta_{xx}^1) + \frac{1}{12} \delta_{xx}^2 + \frac{1}{30} \delta_x^+ (\delta_{xx}^2) - \frac{1}{60} \delta_{xx}^3 - \frac{1}{140} \delta_x^+ (\delta_{xx}^3) + \frac{1}{280} \delta_{xx}^4 + \frac{1}{630} \delta_x^+ (\delta_{xx}^4) - \frac{1}{1260} \delta_{xx}^5 \right] \phi_i + O(h^{11}). \quad (19)$$

接下来, 我们导出完全单侧的前差一阶导数的表达式如下:

$$\delta_x^+ \phi_i = \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{k!} \cdot (D_x^+)^k \right] \phi_i + O(h^{N+1}). \quad (20)$$

由上面的运用逐阶迭代的方法, 可以得到高阶精度的 $D_x^+ \phi_i$ 的表达式如下:

$$D_x^+ \phi_i = \left[\sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot (\delta_x^+)^k \right] \phi_i + O(h^{N+1}). \quad (21)$$

1.2.3 后差的 $|$ 阶空间导数

把函数值 ϕ_{i-1} 在 i 点进行 (N) 阶泰勒展开得到:

$$D_x \phi_i = \left[\delta_x^- + \sum_{k=2}^N \frac{(-1)^k}{k!} \cdot \left(h \frac{\partial}{\partial x} \right)^k \right] \phi_i + O(h^{N+1}). \quad (22)$$

同理, 通过同样的方法可以得到后差一阶导数的高阶精度公式为:

$$D_x \phi_i = \left\{ \bar{\delta}_x - \sum_{k_1=1}^{(N-1)/2} \frac{1}{(2k_1+1)!} \cdot [D_x(D_{xx})^{k_1}] + \sum_{k_2=1}^{N/2} \frac{1}{(2k_2)!} \cdot (D_{xx})^{k_2} \right\} \phi_i + O(h^{N+1}). \quad (23)$$

以下给出了 $N = 10$ 的一阶后差导数的表达式如下:

$$D_x \phi_i = \left[\bar{\delta}_x + \frac{1}{2} \delta_{xx}^1 - \frac{1}{6} \bar{\delta}_x (\delta_{xx}^1) - \frac{1}{12} \delta_{xx}^2 + \frac{1}{30} \bar{\delta}_x (\delta_{xx}^2) + \frac{1}{60} \delta_{xx}^3 - \frac{1}{140} \bar{\delta}_x (\delta_{xx}^3) - \frac{1}{280} \delta_{xx}^4 + \frac{1}{630} \bar{\delta}_x (\delta_{xx}^4) + \frac{1}{1260} \delta_{xx}^5 \right] \phi_i + O(h^{11}). \quad (24)$$

接下来, 我们导出完全单侧的后差一阶导数的表达式如下:

$$\bar{D}_x \phi_i = \left[\sum_{k=1}^N \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \cdot (D_x^-)^k \right] \phi_i + O(h^{N+1}). \quad (25)$$

由上面的运用逐阶迭代的方法, 可以得到高阶精度的 $\bar{D}_x \phi_i$ 的表达式如下:

$$\bar{D}_x \phi_i = \left[\sum_{k=1}^N \frac{1}{k} \cdot (\bar{\delta}_x)^k \right] \phi_i + O(h^{N+1}). \quad (26)$$

由(21)式和(26)式可以看出本文导出的完全单侧的一阶导数的前差和后差公式与牛顿插值的一阶前差和后差是完全一致的, 进一步证明了本文推导的正确性.

1.3 边界处理

由二阶导数 $D_{xx} \phi_i$ 和一阶导数 $D_x \phi_i$ 的表达式可知, 在求解过程中必须用到左、右边界的 $\delta_{xx}^k \phi_0$ 、 $\bar{\delta}_{xx}^k \phi_M$ ($k = 1 \sim N$). 由泰勒展开可以得到, 对于左边界的 $\delta_{xx}^1 \phi_0$ 为:

$$\delta_{xx}^1 \phi_0 = \left[\sum_{j=1}^N \frac{2}{(2j)!} \cdot (D_x^+)^{2j} \right] \phi_0 + O(h^{2(N+1)}). \quad (27)$$

把(21)式代入(27)式可以得到:

$$\delta_{xx}^1 \phi_0 = \left[\sum_{k=2}^N (-1)^k \cdot (\delta_x^+)^k \right] \phi_0 + O(h^{N+1}). \quad (28)$$

同理, 对于右边界的 $\bar{\delta}_{xx}^1 \phi_M$ 为:

$$\bar{\delta}_{xx}^1 \phi_M = \left[\sum_{j=1}^N \frac{2}{(2j)!} \cdot (D_x^-)^{2j} \right] \phi_M + O(h^{2(N+1)}). \quad (29)$$

把(26)式代入(29)式得到:

$$\bar{\delta}_{xx}^1 \phi_M = \left[\sum_{k=1}^N (\bar{\delta}_x)^k \right] \phi_M + O(h^{N+1}). \quad (30)$$

而左、右边界的 $\delta_{xx}^k \phi_0$ 、 $\bar{\delta}_{xx}^k \phi_M$ ($2 \leq k \leq N$) 可以运用 $\delta_{xx}^{k-1} \phi_i$ ($i = 0, \dots, M$) 的值通过(28)式和(30)式计算得到.

2 Fourier 分析

我们利用 Lele^[2]的分析方法分别得到了本文提出的一阶导数(16)式、(19)式和二阶导数(4)式的一直到 $O(h^{12})$ 阶的修正波数为:

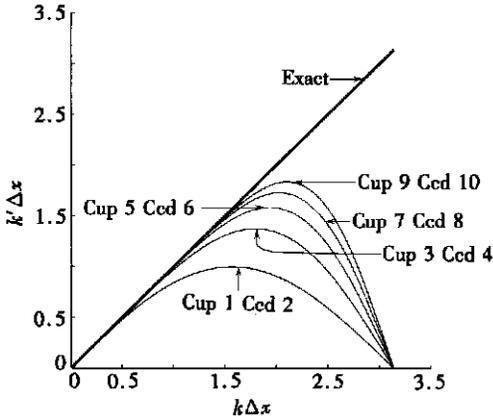
$$k' \Delta x^- D_x(k \Delta x) = \alpha - \frac{1}{6} \alpha^3 + \frac{1}{30} \alpha^5 - \frac{1}{140} \alpha^7 + \frac{1}{630} \alpha^9 + O(h^{12}), \quad (31)$$

$$k' \Delta x^- D_{xx}(k \Delta x) = - \left[\beta - \frac{1}{12} \beta^2 + \frac{1}{90} \beta^3 - \frac{1}{560} \beta^4 + \frac{1}{3150} \beta^5 \right] + O(h^{12}), \quad (32)$$

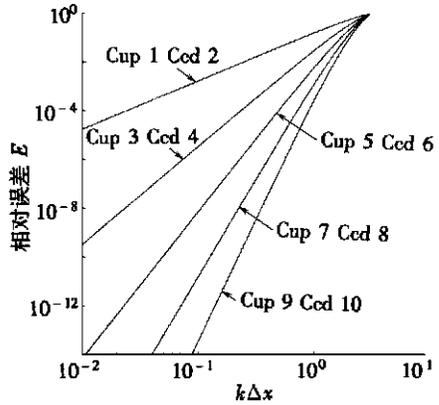
其中, $\alpha = \sin(k \Delta x)$, $\beta = 2(\cos(k \Delta x) - 1)$, $k \Delta x = 2\pi \Delta x / L$, L 和 Δx 分别为波长和网格步长.

本文的修正波数与精确解的比较如图 1、图 2 所示. 其中各阶精度的表达式分别取(31)式和(32)式中前面相对应的项而得到. 各种格式的 $k' \Delta x$ 与 $k \Delta x$ 精确解的相对误差为:

$$E = |k' \Delta x - k \Delta x| / (k \Delta x).$$

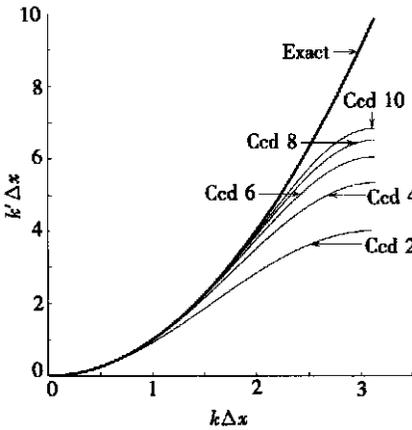


(a) 修正波数

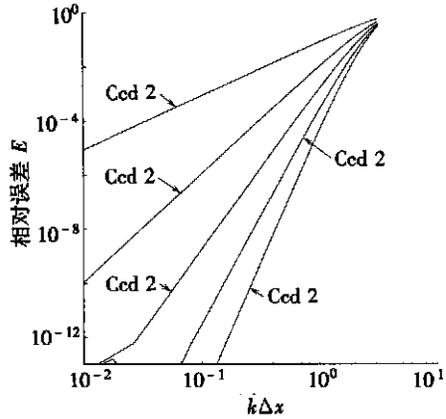


(b) 相对误差 E

图 1 本文提出的各阶精度的一阶导数与精确解的比较图(其中: Cup 为紧致迎风格式, Ced 为紧致中心格式, 后面的数字代表精度的阶数, Exact 为精确解)



(a) 修正波数



(b) 相对误差 E

图 2 本文提出的各阶精度的二阶导数与精确解的比较图(其中: Ced 为紧致中心格式, 后面的数字代表精度的阶数, Exact 为精确解)

3 数值算例与结果分析

3.1 方波问题的模拟

为了分析本文所给出的任意精度的三点紧致空间显格式, 我们以一维的对流扩散方程来进行验证.

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} = \varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, & t > 0, -\infty < x < \infty, \\ \phi(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0.1 \leq x \leq 0.2, \\ 0, & -\infty < x < 0.1, 0.2 < x < \infty, \end{cases} \end{cases} \quad (33)$$

它的精确解为:

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \operatorname{erf} \left[\frac{x_1 - x + u \cdot t}{2 \sqrt{\varepsilon t}} \right] + \operatorname{erf} \left[\frac{x_0 + x - u \cdot t}{2 \sqrt{\varepsilon t}} \right] \right\},$$

erf 为误差函数 $f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$.

在处理对流项时,我们采用四阶精度的一阶导数((16)式);在处理扩散项时,采用四阶精度的二阶导数((4)式);对时间项的处理采用四阶标准的 Runge-Kutta 方法.

本文取 $\Delta x = 0.01$, $\Delta t = 0.0001$, $t = 0.006$. 通过改变库朗数 $c = u\Delta t/(\Delta x)$ 和扩散参数 $r = \varepsilon\Delta t/(\Delta x^2)$, 模拟了 4 种情况,其中库朗数分别取 $c = 0.2$, $c = 0.4$, $c = 0.6$, $c = 1$; 而 Peclet 数 ($Pe = c/r$) 均为 10.

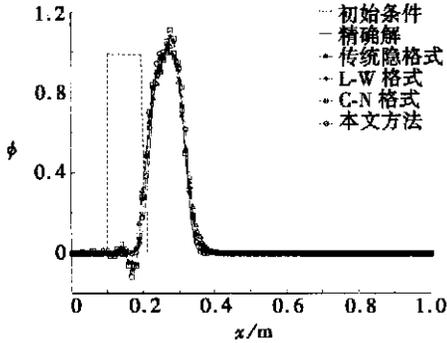


图 3 $c = 0.2, r = 0.02$

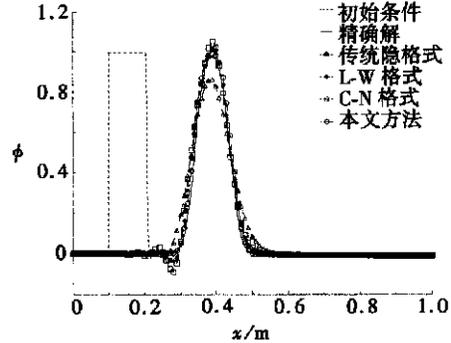


图 4 $c = 0.4, r = 0.04$

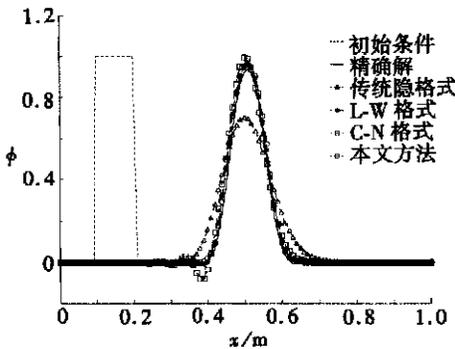


图 5 $c = 0.6, r = 0.06$

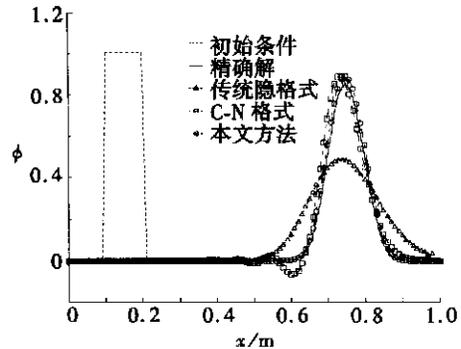


图 6 $c = 1, r = 0.1$
(注: L-W 格式已经发散)

表 3 几种格式的数值解与精确解的 L_2 和 L_∞ 误差比较

4 种情况	传统隐格式		Lax-Wendroff 格式		Crank-Nicolson 格式		本文格式	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞	L_2	L_∞
$c = 0.2$	0.044 9	0.229 6	0.040 8	0.222 9	0.046 4	0.234 9	0.030 0	0.124 8
$c = 0.4$	0.058 2	0.204 8	0.030 5	0.153 4	0.039 9	0.191 1	0.025 3	0.090 3
$c = 0.6$	0.081 4	0.215 0	0.024 5	0.101 0	0.038 7	0.146 5	0.023 1	0.074 3
$c = 1$	0.113 5	0.217 1	发	散	0.047 7	0.185 2	0.021 2	0.059 0

注 $L_2(U) = \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (U_i^{\text{exact}} - U_i^{\text{num}})^2 \right]^{1/2}$, $L_\infty(U) = \max_i |U_i^{\text{exact}} - U_i^{\text{num}}|$.

由图 3 至图 6 可以看出,当模拟对流占优的方波问题时,本文所提出的格式能够很好的模

拟出方波运动的过程. 而传统 Lax-Wendroff 格式和 Crank-Nicolson 格式会在波峰和尾波出产生震荡, 传统隐格式虽然波峰位置模拟得比较准确, 但是产生了很大的数值耗散.

3.2 顶盖方腔流的模拟

作为 CFD 的实际应用, 对方腔流进行了数值模拟, 采用涡量流函数的方程, 由时间相关法求方腔 ($0 \leq x, y \leq 1$) 流动的定常解. 涡量的对流扩散方程在空间上采用本文提出的四阶精度的三点紧致显格式处理, 时间上为一阶的欧拉前差. 流函数的泊松方程采用迭代求解, 利用本文的四阶精度格式得到速度 u, v . 取 41×41 个网格和 81×81 个网格分别计算了 $Re = 100$ 和 $Re = 1000$ 的两种流动, 两种情况下的流函数和涡量如图 7、图 8 所示, 所得到的结果比文献 [14] 中的紧致格式效果要好, 与文献 [15] 中的结果基本一致, 而文献 [15] 中是在 81×81 个网格计算的 $Re = 100$ 和在 129×129 网格中计算的 $Re = 1000$. 与 Ghia 等^[16] 的 129×129 网格下得到的中心线上的速度 u, v 进行了比较, 如图 9、图 10 所示, 可以看出通过本文提出的高精度的三点紧致显格式处理, 在稀疏网格内能得到很好的精度, 可以节省总体的计算量和提高整体的精度.

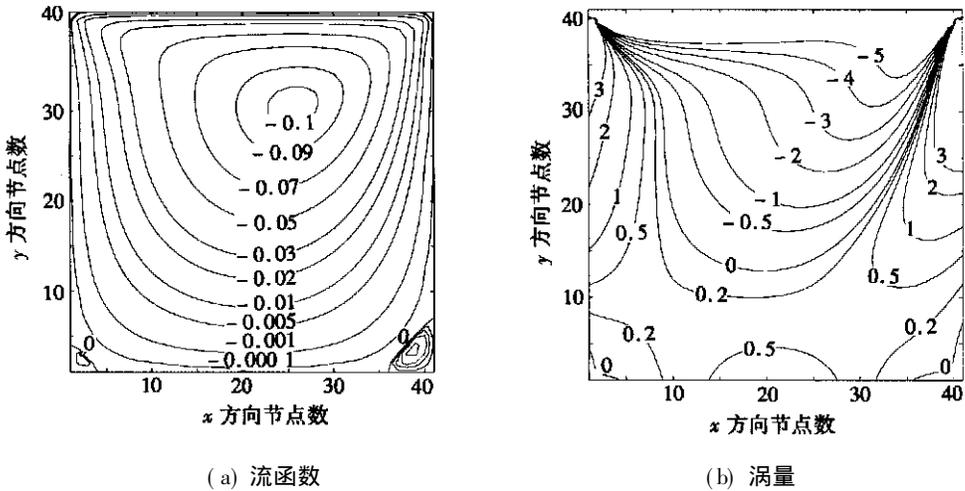


图 7 在 41×41 个网格下得到的 $Re = 100$ 时的定常解

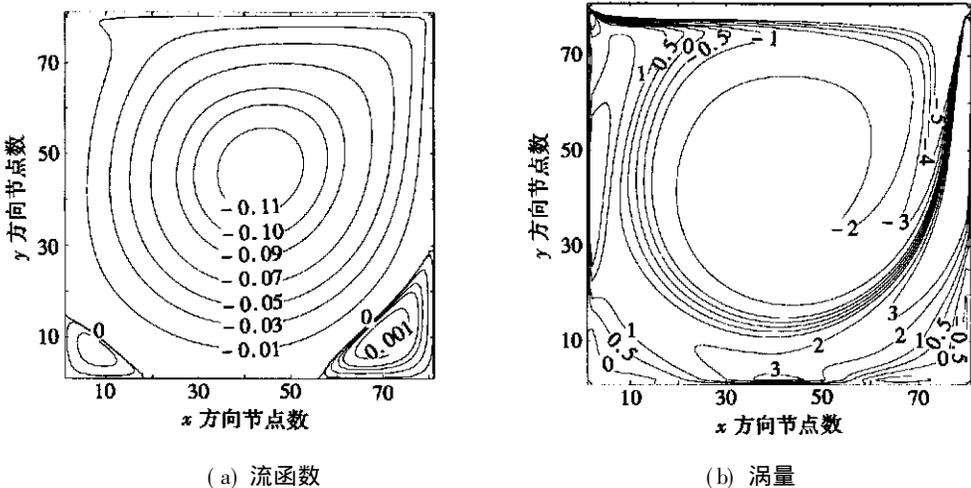


图 8 在 81×81 个网格下得到的 $Re = 1000$ 时的定常解

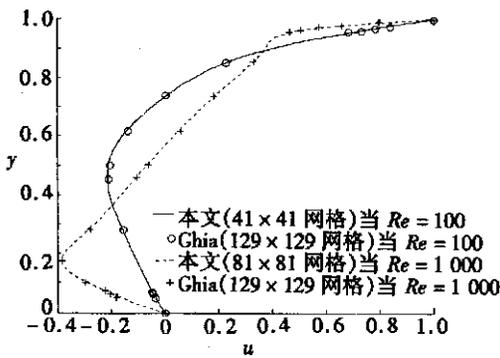


图9 在 $x = 0.5$ 处的 u 与 Ghia 等^[16]结果的比较

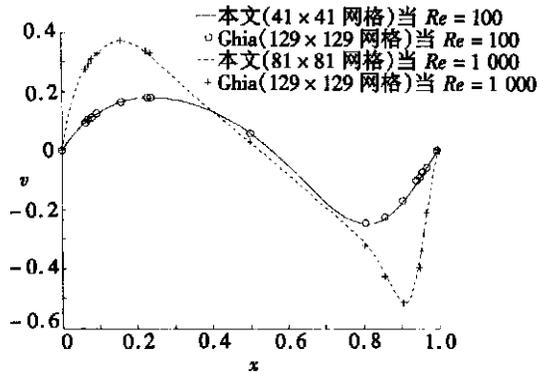


图10 在 $y = 0.5$ 处的 v 与 Ghia 等^[16]结果的比较

由以上 2 个算例可以看出, 本文所提出的三点紧致显格式能够很好的处理偏微分方程中的空间导数, 当与一些时间上高精度的 Runge-Kutta 和 Adams-Bashforth 格式结合后, 能够很好的模拟出计算流体力学中的一些实际问题。

4 结 论

与以往的高精度紧致格式不同, 本文基于文献[13]的逐阶迭代思想, 提出了任意精度的 3 点紧致显格式, 在差分模板中始终用的是 3 个节点, 实现了真正意义上的紧致效果, 而且可以达到任意精度, 并且是一个显式求解的过程, 不用求解各个节点上的导数和函数值组成的代数方程组。最后通过模拟方波问题和顶盖方腔流的算例表明, 本文格式可以在稀疏网格内得到很高的精度, 不仅能节省计算量, 而且易于编程, 有很高的计算效率。

[参 考 文 献]

- [1] Carpenter M H, Gottlieb D, Abarband S. The stability of numerical boundary treatments for compact high-order finite-difference schemes[J]. Journal of Computational Physics, 1993, **108**(2): 272-295.
- [2] Lele S K. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution[J]. Journal of Computational Physics, 1992, **103**(1): 16-42.
- [3] Chu P C, FAN Chen-wu. A three-point combined compact difference scheme[J]. Journal of Computational Physics, 1998, **140**(2): 370-399.
- [4] Mahesh K. A family of high order finite difference schemes with good spectral resolution[J]. Journal of Computational Physics, 1998, **145**(1): 332-358.
- [5] Hixon R. Prefactored small-stencil compact schemes[J]. Journal of Computational Physics, 2000, **165**(2): 522-541.
- [6] Tolstykh A I, Lipavskii M V. On performance of methods with third- and fifth-order compact upwind differencing[J]. Journal of Computational Physics, 1998, **140**(2): 205-232.
- [7] MA Yan-wen, FU De-xun, Kobayashi N, et al. Numerical solution of the incompressible Navier-Stokes equations with an upwind compact difference scheme[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 1999, **30**(5): 509-521.
- [8] MA Yan-wen, FU De-xun. Analysis of super compact finite difference method and application to simulation of vortex-shock interaction[J]. International Journal for Numerical Methods in Fluids,

- 2001, **36**(7): 773-805.
- [9] Boersma B J. A staggered compact finite difference formulation for the compressible Navier-Stokes equations[J]. *Journal of Computational Physics*, 2005, **208**(2): 675-690.
- [10] 袁湘江, 周恒. 计算激波的高精度数值方法[J]. *应用数学和力学*, 2000, **21**(5): 441-450.
- [11] 刘儒勋, 吴玲玲. 非线性发展方程的小模板简化 pade 格式[J]. *应用数学和力学*, 2005, **26**(7): 801-809.
- [12] Fomberg B, Ghrist M. Spatial finite difference approximations for wave-type equation[J]. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1999, **37**(1): 105-130.
- [13] 林建国, 邱大洪. 二阶非线性与色散性的 Boussinesq 类方程[J]. *中国科学, E 辑*, 1998, **28**(6): 567-573.
- [14] Spitz W F. High order compact finite difference schemes for computational mechanics[D]. Austin: University of Texas, 1995.
- [15] Kalita J C, Dalal D C, Dass A K. A class of higher order compact schemes for the unsteady two-dimensional convection diffusion equation with variable convection coefficients[J]. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 2002, **38**(12): 1111-1131.
- [16] Ghia U, Ghia K N, Shin C T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equation and a multigrid method[J]. *Journal of Computational Physics*, 1982, **48**(3): 387-411.

Three-Point Explicit Compact Difference Scheme With Arbitrary Order of Accuracy and Its Application in CFD

LIN Jian-guo, XIE Zhi-hua, ZHOU Jun-tao

(College of Environmental Science and Engineering, Dalian Maritime University,
Dalian 116026, P. R. China)

Abstract: Based on the successive iterative approach in the Taylor series expansion method, a three-point explicit compact difference scheme with arbitrary order of accuracy is derived, and the numerical characteristic of the scheme was studied by the Fourier analysis. Unlike the conventional compact difference schemes which need to solve the equation to obtain the unknown derivatives in each node, the proposed scheme is explicit and can achieve arbitrary order of accuracy in space. Application examples for the convection-diffusion problem with a sharp front gradient and the typical lid-driven cavity flow were given. It is found that the proposed compact scheme is not only simple to implement and economical to use, but also effective to simulate the convection-dominated problem and obtain high-order accurate solution in coarse grid systems.

Key words: arbitrary order of accuracy; compact scheme; three-point stencil; explicit; lid-driven cavity flow