应用数学和力学, 第 28 卷 第 7 期
2007 年 7 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 28, No. 7, Jul. 15, 2007

文章编号: 1000-0887(2007) 07-0853-08

©应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

马氏风险过程*

王汉兴[1,2], 颜云志[2], 赵 飞[2], 方大凡[3]

(1. 中国立信风险管理研究院,上海立信会计学院, 上海 201620;
2. 上海大学 数学系, 上海 200444;
3. 湖南理工学院 数学系, 湖南 岳阳 414000)

(郭兴明推荐)

摘要: 研究了一般马氏风险过程, 它是经典风险过程的拓广. 具有大额索赔的风险过程用此马氏风险模型来描述是适合的. 在此模型中, 索赔到达过程由一点过程来描述, 该点过程是一马氏跳过程从 0 到 t 时间段内的跳跃次数. 主要研究了此风险模型的破产概率, 得到了破产概率满足的积分方程, 并应用本文引入的广更新方法, 得到了破产概率的收敛速度上界.

关 键 词: 风险过程; 破产概率; 马氏跳过程

中图分类号: O211 文献标识码: A

1 引言及模型

1903 年 Lundberg 引入了经典风险模型, Cramer, Sparre Andersen 和其他许多学者对这一模型进行了广泛的研究, 尤其是破产概率, 在文献[1] 至文献[4] 中得到了深入的研究. 经典风险模型已被拓广到多种风险模型, 并相应地得到了广泛而深入的研究[5-9]. 本文研究了一般马氏风险过程, 它是经典风险模型和离散马氏风险过程[5] 的拓广. 在此模型中, 索赔到达过程由一点过程 $\left\{N(t)\right\}_{t\geqslant 0}$ 来描述, 其中 $N(t)$ 是一马氏跳过程在时段 $(0, t]$ 内的跳跃次数, 索赔额由一 i. i. d. 非负随机序列来描述, 而保费率是一常数.

设 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是一完备概率空间, $(S, \mathscr{B})$ 是一可测空间, 其中 S 是实直线 $\mathbf{R}$ 上的子集, $\mathscr{B}$ 是其上的 Borel σ- 代数. 令 $c > 0$ 是一实常数, $\boldsymbol{Z} = \left\{Z_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ 是一 i. i. d. 非负随机序列, 其共同分布函数为 $F(\cdot)$, 均值为 μ. 设 $\boldsymbol{X} = \left\{X_t\right\}_{t\geqslant 0}$ 是一状态空间为 S 的马氏跳过程, 其强度函数为 $\lambda(\cdot)$, 跳测度为 $Q(\cdot, \cdot)$. 本文通篇假定 $\boldsymbol{X}$ 是平稳遍历的并且独立于 $\boldsymbol{Z}$, 其初始平稳分布为 $q(\cdot)$.

令

$$
\begin{aligned}
&T_0 = 0,\\
&T_n = \inf\left\{t > T_{n-1}: X_t \neq X_{T_{n-1}}\right\}, \qquad n \geqslant 1,\\
&N(t) = \sup\left\{n: T_n \leqslant t\right\}.
\end{aligned}
$$

我们定义随机过程:

---

* 收稿日期: 2006-11-07; 修订日期: 2007-04-26
作者简介: 王汉兴(1956—) , 男, 湖南长沙人, 教授, 博士, 博士生导师(联系人. E-mail: whxlqq@ 163.com) .

$$Y(t)=ct-\sum_{k=1}^{N(t)}Z_k,\qquad t\geqslant 0. \tag{1}$$

那么随机过程 $\boldsymbol{Y}=\left\{Y(t)\right\}_{t\geqslant 0}$ 就称为马氏风险过程, 其中 c 解释为保险公司的保费率, $N(t)$ 为时段 $(0,t]$ 内的索赔次数, Z_k 是第 k 次索赔时的索赔额.

当 $\lambda(x)=\lambda, x\in S$ 时, 易知 $\left\{N(t)\right\}_{t\geqslant 0}$ 是一 Poisson 点过程, 此时马氏风险过程恰是 Cramér-Lundberg 经典模型[1-2]. 当状态空间 S 仅包含两个状态时, 此时马氏风险过程即为一具有指数等待时间的交替更新模型. 当状态空间 S 仅包含有限多个状态时, 此时马氏风险过程即为文献[5]中的模型.

设 $u\geqslant 0$ 是一给定的实常数, 表示初始准备金, 那么 $u+Y(t)$ 则表示保险公司在时刻 t 的资产.

令

$$\Psi(u)=P(u+Y(t)<0),\qquad \text{对某个 } t>0,$$
$$\varphi(u)=1-\Psi(u),$$
$$\Psi_x(u)=P_x(u+Y(t)<0),\qquad \text{对某个 } t>0,$$
$$\varphi_x(u)=1-\Psi_x(u),$$
$$\rho=\left[c-\mu\int_S\lambda(x)q(\mathrm{d}x)\right]\Big\backslash\left[\mu\int_S\lambda(x)q(\mathrm{d}x)\right],$$

称 $\Psi(u)$ 为破产概率, $\varphi(u)$ 为生存概率, ρ 为相对安全负荷. 我们总是假设 $\rho>0$.

本文主要研究了破产概率 $\Psi(u)$. 在第 2 节证明了 $\Psi(u)$ 所满足的积分方程; 在第 3 节, 应用广更新方法, 得到了 $\Psi(u)$ 的收敛速度上界.

2 破产概率所满足的积分方程

引理 1 当相对安全负荷 $\rho>0$ 时, 则

1) $\lim\limits_{u\to\infty}\Psi(u)=0$;

2) $\lim\limits_{u\to\infty}\Psi_x(u)=0,\ q(\cdot)\text{-a.e.}\quad x\in S$.

证明 因为马氏过程 $\left\{X(t)\right\}_{t\geqslant 0}$ 是平稳遍历的, 所以 $\left\{N(t)\right\}_{t\geqslant 0}$ 是一平稳遍历的点过程. 于是有:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{t}Y(t)\right)=\lim_{t\to\infty}\left[c-\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{N(t)}Z_k\right]=$$
$$c-\lim_{t\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{N(t)}Z_k}{N(t)}\,\frac{N(t)}{t}=c-\mu\int_S\lambda(x)q(\mathrm{d}x).$$

因为 $\rho>0$, 所以存在随机变量 $T\geqslant 0$, 使得当 $t\geqslant T$ 时 $Y(t)>0$. 由马氏过程相关理论[6] 以及 $\lambda(x)$ 有界的假设条件, 易知 $\boldsymbol{X}$ 在 $(0,T]$ 内仅有有限多次跳, 从而 $\inf\limits_{t\geqslant 0}\left\{Y(t)\right\}>-\infty$, P-a.e., 即, $\lim\limits_{u\to\infty}\inf\limits_{t\geqslant 0}(u+Y(t))=+\infty$, P-a.e.. 于是

$$\lim_{u\to\infty}\Psi(u)=\lim_{u\to\infty}P(\inf_{t\geqslant 0}(u+Y(t))<0)=0.$$

于是引理之 1) 得证.

因为 $\Psi(u)=\int_S\Psi_x(u)q(\mathrm{d}x)$, 由控制收敛定理得

$$0=\lim_{u\to\infty}\Psi(u)=\int_S\lim_{u\to\infty}\Psi_x(u)q(\mathrm{d}x).$$

显然 $\lim_{u\to\infty}\Psi_x(u)\geqslant 0, x\in S$, 所以

$$\lim_{u\to\infty}\Psi_x(u)=0,\ q(\cdot)\text{-a.e.}\quad x\in S.$$

于是引理之 2) 得证. 从而引理1 得证.

应用向后微分技巧, 我们得到 $\Psi(u)$ 满足如下积分方程.

定理 1 如果相对安全负荷 $\rho>0$, 则

$$\Psi(0)=\frac{\mu}{c}\int_S\lambda(x)q(\mathrm{d}x),$$

$$\Psi(u)=\frac{1}{c}\int_S\lambda(x)q(\mathrm{d}x)\int_u^\infty \bar F(z)\mathrm{d}z+\frac{1}{c}\int_0^u\left[\int_S\lambda(x)\Psi_x(u-z)q(\mathrm{d}x)\right]\bar F(z)\mathrm{d}z,$$

其中 $\bar F(z)=1-F(z)$.

证明 应用向后微分技巧, 可得:

$$\varphi_x(u)=(1-\lambda(x)\Delta)\varphi_x(u+c\Delta)+\lambda(x)\Delta\int_S Q(x,\mathrm{d}y)\int_0^{u+c\Delta}\varphi_y(u+c\Delta-z)\mathrm{d}F(z)+o(\Delta),$$

于是有

$$c\varphi_x'(u)=\lambda(x)\varphi_x(u)-\lambda(x)\int_S Q(x,\mathrm{d}y)\int_0^u\varphi_y(u-z)\mathrm{d}F(z).\tag{2}$$

在 $[0,t]$ 上对(2)式两边积分得:

$$\begin{aligned}c[\varphi_x(t)-\varphi_x(0)]=&\\ &\lambda(x)\int_0^t\varphi_x(u)\mathrm{d}u-\lambda(x)\int_0^t\mathrm{d}u\int_S Q(x,\mathrm{d}y)\int_0^u\varphi_y(u-z)\mathrm{d}F(z)=\\ &\lambda(x)\int_0^t\varphi_x(u)\mathrm{d}u+\lambda(x)\int_S Q(x,\mathrm{d}y)\varphi_y(0)\int_0^t \bar F(u)\mathrm{d}u-\\ &\lambda(x)\int_S Q(x,\mathrm{d}y)\int_0^t\varphi_y(u)\mathrm{d}u+\\ &\lambda(x)\int_S Q(x,\mathrm{d}y)\int_0^t \bar F(z)[\varphi_y(t-z)-\varphi_y(0)]\mathrm{d}z=\\ &\lambda(x)\int_0^t\varphi_x(u)\mathrm{d}u-\lambda(x)\int_S Q(x,\mathrm{d}y)\int_0^t Q_y(u)\mathrm{d}u+\\ &\lambda(x)\int_S Q(x,\mathrm{d}y)\int_0^t \bar F(z)\varphi_y(t-z)\mathrm{d}z.\end{aligned}\tag{3}$$

因为 $q(\cdot)$ 是平稳分布, 易知

$$\int_B\lambda(x)q(\mathrm{d}x)=\int_S\lambda(x)Q(x,B)q(\mathrm{d}x),\qquad\forall B\in\mathscr{B}.$$

对(3)式两边关于 $q(\cdot)$ 积分, 并注意到上式, 我们得到:

$$c[\varphi(t)-\varphi(0)]=\int_S q(\mathrm{d}x)\int_S\lambda(x)Q(x,\mathrm{d}y)\int_0^t \bar F(z)\varphi_y(t-z)\mathrm{d}z=\int_0^t\left[\int_S\lambda(x)\varphi_x(t-z)q(\mathrm{d}x)\right]\bar F(z)\mathrm{d}z.$$

在上式中令 $t\to\infty$, 由控制收敛定理得:

$$c[\varphi(\infty)-\varphi(0)]=\int_0^\infty\left[\int_S\lambda(x)\varphi_x(\infty)q(\mathrm{d}x)\right]\bar F(z)\mathrm{d}z.$$

由引理1得:

$$c\Psi(0)=\int_0^{\infty}\left[\int_S\lambda(x)q(\mathrm{d}x)\right]F(z)\mathrm{d}z=\mu\int_S\lambda(x)q(\mathrm{d}x),$$

所以

$$\Psi(0)=\frac{\mu}{c}\int_S\lambda(x)q(\mathrm{d}x),$$

$$\Psi(t)=\Psi(0)-\frac{1}{c}\int_0^t\left[\int_S\lambda(x)(1-\Psi_x(t-z)q(\mathrm{d}x)\right]F(z)\mathrm{d}z=$$

$$\frac{1}{c}\int_S\lambda(x)q(\mathrm{d}x)\int_t^{\infty}F(z)\mathrm{d}z+\frac{1}{c}\int_0^t\left[\int_S\lambda(x)\Psi_x(t-z)q(\mathrm{d}x)\right]F(z)\mathrm{d}z.$$

至此定理得证.

3 破产概率收敛速率的上界

以 $F^{*n}(\cdot)$ 表示分布函数 $F(\cdot)$ 的 n 重卷积, 并令:

$$m_F(t)=\sum_{n=1}^{\infty}F^{*n}(t),\qquad t\geqslant 0.$$

引理2 设 $h(t)$ 是一$[0,\infty)$ 上的局部有界函数. 假设 $Z(t)$ 是一$[0,\infty)$ 上的局部有界函数, 且满足如下的更新不等式:

$$Z(t)\leqslant h(t)+\int_0^t Z(t-s)F(\mathrm{d}s),$$

或

$$Z(t)\geqslant h(t)+\int_0^t Z(t-s)F(\mathrm{d}s),$$

则

$$Z(t)\leqslant h(t)+\int_0^t h(t-s)m_F(\mathrm{d}s),$$

或

$$Z(t)\geqslant h(t)+\int_0^t h(t-s)m_F(\mathrm{d}s).$$

令 $\mathscr{C}([0,\infty),[1,\infty))$ 表示由定义域为$[0,\infty)$ 而值域为$[1,\infty)$ 的单调不减连续函数全体, 以及

$$\mathscr{M}=\left\{g\in\mathscr{C}([0,\infty),[1,\infty)):\forall u\geqslant 0, 0\leqslant z\leqslant u, g(u)\leqslant g(u-z)g(z)\right\}.$$

引理3 $\mathscr{M}$具有如下的性质:

1) 对一切实数 $a\geqslant 1$, 有 $a\in\mathscr{M}$;

2) 如果 $\beta\geqslant 0$, $g(x)=\mathrm{e}^{\beta x}$, $x\in[0,\infty)$, 则 $g(x)\in\mathscr{M}$;

3) 如果 g_1、$g_2\in\mathscr{M}$, 则 $g_1+g_2\in\mathscr{M}$, $g_1\cdot g_2\in\mathscr{M}$.

定理2 令 $\lambda=\sup_{x\in S}\left\{\lambda(x)\right\}$, 并假设 $\mu\cdot\lambda<c$. 如果 $g(\cdot)\in\mathscr{M}$满足:

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty}g(z)F(z)\mathrm{d}z=1, \tag{4}$$

则

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}g(u)\Psi(u)\leqslant\frac{a_1}{a_2},$$

其中

$$a_1=\frac{1}{c}\int_S\lambda(x)q(\mathrm{d}x)\int_0^{\infty}g(u)\int_u^{\infty}F(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}u,\quad a_2=\frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty}zg(z)F(z)\mathrm{d}z.$$

证明　由定理 1 有:

$$
\begin{aligned}
\Psi(u) = {} & \frac{1}{c}\int_S \lambda(x)\, q(\mathrm{d}x)\int_u^{\infty} F(z)\,\mathrm{d}z + \\
& \frac{1}{c}\int_0^u \left[\int_S \lambda(x)\ \Psi_x(u-z)\, q(\mathrm{d}x)\right] F(z)\,\mathrm{d}z \leqslant \\
& \frac{1}{c}\int_S \lambda(x)\, q(\mathrm{d}x)\int_u^{\infty} F(z)\,\mathrm{d}z + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Psi(u-z)F(z)\,\mathrm{d}z .
\end{aligned}
$$

将不等式的两端乘以 $g(u)$, 并注意到 $g(\cdot) \in \mathscr{M}$, 容易得到:

$$
\begin{aligned}
g(u)\ \Psi(u) \leqslant {} & \frac{1}{c}\int_S \lambda(x)\, q(\mathrm{d}x)\int_u^{\infty} g(z)F(z)\,\mathrm{d}z + \\
& \frac{\lambda}{c}\int_0^u g(u-z)\ \Psi(u-z)\, g(z)F(z)\,\mathrm{d}z .
\end{aligned}
$$

由 $\frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty} g(z)F(z)\,\mathrm{d}z = 1$ 的假设条件知, $G(u) \hat{=} \int_0^u \frac{\lambda}{c} g(z)F(z)\,\mathrm{d}z$ 是一分布函数. 于是由引理 2 有:

$$
\begin{aligned}
g(u)\ \Psi(u) \leqslant {} & \int_S \frac{\lambda(x)}{c} q(\mathrm{d}x)\int_u^{\infty} g(u)F(z)\,\mathrm{d}z + \\
& \int_0^u \int_S \frac{\lambda(x)}{c} q(\mathrm{d}x)\int_{u-s}^{\infty} g(u-s)F(z)\,\mathrm{d}z\, m_G(\mathrm{d}s) .
\end{aligned}
$$

对 $g(\cdot) \in \mathscr{M}$, 因 $g(\cdot)$ 单调不减, 所以由(4)式有:

$$
\begin{aligned}
0 \leqslant {} & \lim_{u\to\infty} \frac{1}{c}\int_S \lambda(x)\, q(\mathrm{d}x)\int_u^{\infty} g(u)F(z)\,\mathrm{d}z \leqslant \\
& \lim_{u\to\infty} \frac{1}{c}\int_S \lambda(x)\ q(\mathrm{d}x)\int_u^{\infty} g(z)F(z)\,\mathrm{d}z = 0.
\end{aligned}
$$

应用关键更新定理[6]得:

$$
\overline{\lim_{u\to\infty}} g(u)\ \Psi(u) \leqslant \lim_{u\to\infty}\int_0^u \frac{1}{c}\int_S \lambda(x)\, q(\mathrm{d}x)\int_{u-s}^{\infty} g(u-s)F(z)\,\mathrm{d}z\, m_G(\mathrm{d}s) = \frac{a_1}{a_2},
$$

其中

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \int_0^{\infty} \frac{1}{c}\int_S \lambda(x)\, q(\mathrm{d}x)\int_u^{\infty} g(u)\, F(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}u, \\
a_2 &= \int_0^{\infty} \frac{\lambda}{c} z g(z)\, F(z)\,\mathrm{d}z .
\end{aligned}
$$

于是定理得证.

推论 1　假设 $\mu\cdot\lambda < c$. 如果 $F(\cdot)$ 存在任意阶矩, 则对任意的 $n \geqslant 1$,

$$
\lim_{u\to\infty} u^n\ \Psi(u) = 0.
$$

证明　令 $g_1(t) = 1 + rt$, 其中 $r \geqslant 0$. 易知 $g_1(t) \in \mathscr{M}$. 由引理 3, $\forall n \geqslant 1$, $g_n(t) = (1+rt)^n \in \mathscr{M}$. 由假设条件知, $\forall n \geqslant 1$,

$$
\frac{\mu\cdot\lambda}{c} \leqslant \frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty} (1+rz)^n F(z)\,\mathrm{d}z < \infty.
$$

令 $G_n(r) = \frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty}(1+rz)^n F(z)\,\mathrm{d}z$. 显然, $G_n(r)$ 在 $[0, \infty)$ 上连续, $\lim_{r\to\infty} G_n(r) = \frac{\mu\lambda}{c}$ 而且 $\lim_{r\to\infty} G_n(r) = +\infty$. 因而必存在一常数 $r_n > 0$ 满足:

$$
G_n(r_n) = \frac{\lambda}{c}\int_0^{\infty}(1+r_n z)^n F(z)\,\mathrm{d}z = 1.
$$

由此, $g_n(z)=(1+r_nz)^n$ 满足定理 2 中的条件. 由定理 2 得:

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}(1+r_nu)^n\Psi(u)\leqslant\frac{a_1}{a_2},\qquad n\geqslant 1.$$

由于上式对一切 $n\geqslant 1$ 都成立, 立即得:

$$\lim_{u\to\infty}u^n\Psi(u)=0.$$

推理 1 证毕.

推论 2 设 $\mu\cdot\lambda<c$. 假设存在实数 $r_\infty>0$ 使得 $h(r)=\int_0^\infty e^{rz}dF(z)-1$ 在 $[0,r_\infty)$ 上有定义, 且 $\lim_{r\to\infty}h(r)=+\infty$. 设 r_1 是方程 $h(r)=\frac{c}{\lambda}r$ 的正解, r_2 是方程 $h(r)=\frac{c}{\lambda'}r$ 的正解, 其中 $\lambda'=\inf_{x\in S}\{\lambda(x)\}>0$. 则

1) $\overline{\lim_{u\to\infty}}e^{r_1u}\Psi(u)\leqslant\frac{a_1}{a_2}$,

其中 $$a_1=\frac{1}{c}\int_S\lambda(x)q(dx)\int_0^\infty e^{r_1u}\int_0^\infty F(z)dzdu,\quad a_2=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty ze^{r_1z}F(z)dz.$$

2) $\underline{\lim_{u\to\infty}}e^{r_2u}\Psi(u)\geqslant\frac{b_1}{b_2}$,

其中 $$b_1=\frac{1}{c}\int_S\lambda(x)q(dx)\int_0^\infty e^{r_2u}\int_0^\infty F(z)dzdu,\quad b_2=\frac{\lambda'}{c}\int_0^\infty ze^{r_2z}F(z)dz.$$

证明 显然 1) 是定理 2 的特款. 根据引理 2 并注意到 $e^{r_2u}=e^{r_2(u-z)}\cdot e^{r_2z}$, 类似定理 2 的证明, 即得 2) 的证明.

下面我们给出索赔分布分别是对数正态分布和重尾 Weibull 分布的两个例子.

例 1 设 $F(\cdot)$ 有密度函数:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\ln^2x/(2\sigma^2)}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

假设 $(\sigma^2/2)\cdot\lambda<c$, $0<R<1/(2\sigma^2)$, 以及 r_0 是一实数且满足

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty e^{-R}\cdot e^{R\cdot\ln^2(e+r_0z)}F(z)dz=1,\tag{5}$$

则

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}e^{R\cdot\ln^2(e+r_0u)}\Psi(u)\leqslant\frac{a_1}{a_2}e^R,$$

其中

$$a_1=\frac{1}{c}\int_S\lambda(x)q(dx)\int_0^\infty e^{-R}\cdot e^{R\cdot\ln^2(e+r_0u)}\int_u^\infty F(z)dzdu,$$

$$a_2=\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty ze^{-R}\cdot e^{R\cdot\ln^2(e+r_0z)}F(z)dz.$$

证明 设 $r\geqslant 0$, 令

$$g(u)=e^{-R}\cdot e^{R\cdot\ln^2(e+ru)},\qquad u\geqslant 0,$$

$$g_1(z)=g(u-z)g(z)-g(u),\qquad 0\leqslant z\leqslant u.$$

则

$$g_1'(z)=2R\cdot g(u-z)g(z)\cdot\left[\frac{\ln(e+rz)}{e+rz}-\frac{\ln(e+r(u-z))}{e+r(u-z)}\right]\cdot r.$$

因 $\ln(e+x)/(e+x)$ 是单调不增的, 所以

$$g_1'(z) \geqslant 0, \qquad 当\ 0 \leqslant z \leqslant u/2,$$
$$g_1'(z) \leqslant 0, \qquad 当\ u/2 \leqslant z \leqslant u.$$

显然, $g_1(0) = g_1(u) = 0$, 从而 $g_1(z) \geqslant 0, 0 \leqslant z \leqslant u$, 即

$$g(u) \leqslant g(u-z)g(z), \qquad \forall u \geqslant 0, 0 \leqslant z \leqslant u.$$

由此并注意到 $g(u)$ 是单调不减的, 知 $g(\cdot) \in \mathscr{M}$.

因 $R < 1/(2\sigma^2)$ 及 $g(\cdot)$ 的单调不减性, 有

$$\int_0^\infty g(u)F(u)\mathrm{d}u \leqslant \int_0^\infty \int_u^\infty g(z)f(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}u = \int_0^\infty zg(z)f(z)\mathrm{d}z < \infty.$$

令 $K(r) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-R} \cdot \mathrm{e}^{R \cdot \ln^2(\mathrm{e}+rz)} F(z)\mathrm{d}z$. 易知 $K(r)$ 单调不减的连续函数, 而且 $\lim_{r \to 0} K(r) = \mu$, $\lim_{r\to\infty} K(r) = +\infty$. 于是存在一常数 r_0 使得(5)式成立. 应用定理 2, 立即得到例 1 的证明.

例 2 如果索赔分布 $F(\cdot)$ 是重尾 Weibull 分布, 即其密度函数为:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha\lambda x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda x^\alpha}, & x > 0, \\ 0, & x \leqslant 0, \end{cases} \qquad \lambda > 0,\ 0 < \alpha < 1.$$

假设 $\Gamma((1+\alpha)/\alpha)\lambda^{-1/\alpha}$, $\lambda < c$, $0 < R < \alpha$, 以及 r_0 是一实数使得

$$\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \mathrm{e}^{\lambda(1+r_0 z)^R} F(z)\mathrm{d}z = 1.$$

则

$$\overline{\lim_{u\to\infty}}\, \mathrm{e}^{\lambda(1+r_0 u)^R}\Psi(u) \leqslant \frac{a_1}{a_2}\mathrm{e}^{\lambda},$$

其中

$$a_1 = \frac{1}{c}\int_S \lambda(x)q(\mathrm{d}x)\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \mathrm{e}^{\lambda(1+r_0 u)^R}\int_u^\infty F(z)\mathrm{d}z\mathrm{d}u,$$
$$a_2 = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty z\mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \mathrm{e}^{\lambda(1+r_0 z)^R} F(z)\mathrm{d}z.$$

其证明类似例 1.

4 结 论

本文研究了一般马氏风险过程, 它拓广了经典风险过程和离散马氏风险过程[1]. 具有大额索赔的风险过程用此马氏风险模型来描述是适合的. 在此模型中, 索赔到达过程由一点过程来描述, 该点过程是一马氏跳过程从 0 到 t 时间段内的跳跃次数.

我们主要研究了此风险模型的破产概率, 得到了破产概率满足的积分方程; 应用本文引入的广更新方法, 得到了破产概率的收敛速度上界; 并通过索赔分布分别是对数正态分布和重尾 Weibull 分布的两个例子说明了这一结果.

致谢 本文得到上海立信会计学院开放经济与贸易研究中心资助(P1601); 中国立信风险管理研究院资助, 特感谢.

[参 考 文 献]

[1] Grandell J. Aspects of Risk Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 1991.

[2] Gerber H U. An Introduction to Mathematical Risk Theory [M]. S S Heubner Foundation Monograph series 8, Philadelphia, 1979.

[3] Mikosch T. Heavy-tailed modelling in insurance[J]. Stochastic Models, 1997, **13**(4): 799-816.

[4] Kl ppelbery C, Mikosch T. Large deviations of heavy-tailed random sums with applications in insurance and finance[J]. J Appl Prob, 1997, **34**(2): 293-308.

[5] WANG Hang-xing, FANG Da-fan, TANG Mao-ning. Ruin probabilities under a markovian risk model [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, 2003, **19**(4): 621-630.

[6] Asmussen S. Applied Probability and Queues [M]. New York: John Wiley & Sons, 1987.

[7] Asmussen S. Risk theory in a Markovian environment[J]. Scand Act J, 1989, 69-100.

[8] Wang Y H. Bounds for the ruin probability under a Markovian modulated risk model[J]. Stochastic Models, 1999, **15**(1): 125-136.

[9] Blaszczyszyn B, Rolski T. Expansions for Markov-modulated systems and approximations of ruin probability[J]. J Appl Prob, 1996, **33**: 57-70.

Markovian Risk Process

WANG Han-xing[1,2], YAN Yun-zhi[2], ZHAO Fei[2], FANG Da-fan[3]

(1. China Linxin Risk Management Research Institute,
Shanghai Lixin University of Commerce, Shanghai 201620, P. R. China;
2. Department of Mathematics, Shanghai University, Shanghai 200444, P. R. China;
3. Department of Mathematics, Hunan Institute of Science and Technology,
Yueyang, Hunan 414000, P. R. China)

Abstract: A Markovian risk process is considered, which is the generalization of the classical risk model. It is proper that a risk process with large claims is modelled as the Markovian risk model. In such a model, the occurrence of claims was described by a point process with it being the number of jumps for a Markov jump process from time 0 to t. The ruin probability of a company facing such a risk model was mainly studied. An integral equation satisfied by the ruin probability was obtained and the bounds for the convergence rate of the ruin probability are given by using a generalized renewal technique.

Key words: risk process; ruin probability; Markov jump process