文章编号: 1000-0887(2007) 07-0877-06

一类拟线性 Schrödinger 方程*

舒 级[1,2], 张 健[2]

(1. 四川师范大学 计算机软件实验室, 成都 610066;
2. 四川师范大学 数学与软件科学学院, 成都 610066)

(李继彬推荐)

摘要: 在二维空间中讨论一类拟线性 Schrödinger 方程, 该方程在物理学上描述了吸引玻色-爱因斯坦凝聚. 通过建立这个方程的性质, 运用能量方法, 证明了该方程所对应的初值问题的解在一定条件下爆破. 同时利用变分方法, 也得到了整体解存在的一个充分条件, 该条件与一个经典的椭圆方程的基态有关.

关 键 词: 拟线性 Schrödinger 方程; 爆破; 整体解; 基态; 玻色-爱因斯坦凝聚

中图分类号: O175.27 文献标识码: A

引 言

对于如下的拟线性 Schrödinger 方程:

$$\mathrm{i}\varphi_t = -\Delta\varphi + V(x)\varphi - f(|\varphi|^2)\varphi - k(\Delta h(|\varphi|^2))h'(|\varphi|^2)\varphi, \tag{1}$$

已被证明可以作为几种物理现象的模型. 这里 $V = V(x)$, $x \in R^N$ 是一个给定的势, k 是一个实常数, f、h 是实函数. 例如, 对于 $h(s) = s$, 我们可得方程:

$$\mathrm{i}\varphi_t = -\Delta\varphi + V(x)\varphi - f(|\varphi|^2)\varphi - k(\Delta|\varphi|^2)\varphi. \tag{2}$$

该方程在等离子物理中被称为超流质薄膜方程[1]. 对于 $h(s) = (1+s)^{1/2}$, 方程(1)描述了一类高幂超短激光在物质中的自引导现象[2]. 方程(1)也出现在等离子物理, 流体力学[3-4], Heisenberg 铁磁和岩浆理论[5-6], 耗散量子力学[7]和凝聚态理论中[8]. 关于方程(1)和方程(2)的数学文献目前还非常少. 对于初值问题的局部适定性和整体适定性, 文献[2]研究了 $h(s) = (1+s)^{1/2}$ 和 $N = 1, 2, 3$ 的情形; 文献[1]研究了 $h(s) = s$ 和 $N = 1$ 的情形; 文献[9]至文献[11]研究了 h 为一般函数的情形. 另外, 文献[12]和文献[13]研究了驻波的存在性, 文献[14]和文献[15]研究了解的爆破和整体存在性.

在(1)式中, 令 $h(s) = s$, $V(x) = |x|^2$, $k = 1$ 以及 $f(s) = s^{(p-1)/2}$, 则得到如下的拟线性 Schrödinger 方程:

$$\mathrm{i}\varphi_t = -\Delta\varphi + |x|^2\varphi - |\varphi|^{p-1}\varphi - \varphi\Delta(|\varphi|^2), \qquad t > 0, x \in R^2, \tag{3}$$

* 收稿日期: 2006-09-04; 修订日期: 2007-04-27
基金项目: 四川省教育厅资助科研项目
作者简介: 舒级(1977-), 男, 四川纳溪人, 讲师, 博士(联系人. Tel: +86-28-84761502; E-mail: shu.ji@163.com; shuji2008@hotmail.com).

其中 $\varphi = \varphi(t, x): R^+ \times R^2 \to C$, $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$, Δ 是 Laplace 算子, $1 \leqslant p < \infty$. 在物理上该模型近似地描述了吸引玻色-爱因斯坦凝聚现象[14].

本文借助能量方法[16-17]和变分法[18-20], 研究方程(3)所对应的初值问题的解爆破和整体存在的条件. 本文结构如下: 第1节我们给出方程(3)的一些预备知识. 第2节我们证明方程(3)所对应的初值问题解在一定条件下爆破. 第3节我们给出方程(3)所对应的初值问题解整体存在的一个充分条件.

1　预备知识

对方程(3), 我们引进初值如下:

$$\varphi(0, x) = \varphi_0, \qquad x \in R^2. \tag{4}$$

对应于方程(3), 定义一个能量空间

$$H := \left\{ \psi \in H_r^1(R^2), \int |x|^2 |\psi|^2 \mathrm{d}x < \infty \right\},$$

这里 $H_r^1 = \left\{ \psi \in H^1(R^2), \psi(x) = \psi(|x|) \right\}$ 表示由径向对称函数组成的空间, 并在 H 上赋予如下的范数:

$$\|\cdot\|_H = \|\nabla\psi\|_{L^2} + \|\psi\|_{L^2} + \|x\psi\|_{L^2}.$$

为了简便起见, 以后都记 $\int_{R^2} \cdot \, \mathrm{d}x = \int \cdot \, \mathrm{d}x$.

在本文里我们不研究初值问题(3)和初值问题(4)在空间 H 上关于时间的局部适定性, 正如文献[15]、文献[16]和文献[21]一样.

下面我们给出两个引理(参见文献[15]和文献[22]).

引理 1.1　设 $\varphi_0 \in H$, $\varphi(t, x)$ 是初值问题(3)和初值问题(4)在 $C([0, T); H)$ 中的解. 令能量泛函为:

$$E(t) := \int \left(|\nabla\varphi|^2 + |x|^2 |\varphi|^2 + \frac{1}{2} |\nabla|\varphi|^2|^2 - \frac{2}{p+1} |\varphi|^{p+1} \right) \mathrm{d}x.$$

那么我们有:

$$\int |\varphi|^2 \mathrm{d}x = \int |\varphi_0|^2 \mathrm{d}x. \tag{5}$$

$$E(t) \equiv E(0). \tag{6}$$

引理 1.2　设 $\varphi(t, x)$ 是初值问题(3)和初值问题(4)在 $C([0, T); H)$ 中的解, $|x|\varphi_0 \in L^2(R^2)$. 令 $J(t) = \int |x|^2 |\varphi|^2 \mathrm{d}x$, 则有

$$J''(t) = 8\int \left(|\nabla\varphi|^2 - |x|^2 |\varphi|^2 + |\nabla|\varphi|^2|^2 - \frac{p-1}{p+1} |\varphi|^{p+1} \right) \mathrm{d}x. \tag{7}$$

证明　由 $J(t) = \int |x|^2 |\varphi|^2 \mathrm{d}x$, 可得:

$$J'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int |x|^2 |\varphi|^2 \mathrm{d}x = \int |x|^2 (\varphi\overline{\varphi}_t + \overline{\varphi}\varphi_t) \mathrm{d}x = 2\mathrm{R}\int |x|^2 \overline{\varphi}\varphi_t \mathrm{d}x,$$

根据方程(3), 有

$$\varphi_t = \mathrm{i}\Delta\varphi + \mathrm{i}\varphi(\Delta|\varphi|^2) + \mathrm{i}|\varphi|^{p-1}\varphi - \mathrm{i}|x|^2\varphi,$$

从而

$$J'(t) = 2\mathrm{R}\int |x|^2 \overline{\varphi}(\mathrm{i}\Delta\varphi + \mathrm{i}\varphi(\Delta|\varphi|^2) + \mathrm{i}|\varphi|^{p-1}\varphi - \mathrm{i}|x|^2\varphi) \mathrm{d}x =$$

$$2\mathrm{I}\int |x|^2\varphi\Delta\varphi\,\mathrm{d}x = -2\mathrm{I}\int \nabla\varphi\cdot\nabla(|x|^2\varphi)\,\mathrm{d}x =$$

$$-2\mathrm{I}\int[|x|^2|\nabla\varphi|^2+2x\varphi\cdot\nabla\varphi]\,\mathrm{d}x = 4\mathrm{I}\int x\varphi\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x.$$

因此

$$J''(t) = 4\mathrm{I}\int(x\bar{\varphi}_t\cdot\nabla\varphi + x\varphi\cdot\nabla\varphi_t)\,\mathrm{d}x.$$

注意到

$$\int x\varphi\cdot\nabla\varphi_t\,\mathrm{d}x = -\int\varphi_t\nabla\cdot(x\varphi)\,\mathrm{d}x = -\int\varphi_t(2\varphi + x\cdot\nabla\varphi)\,\mathrm{d}x,$$

于是

$$J''(t) = 4\mathrm{I}\int x\bar{\varphi}_t\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x - 4\mathrm{I}\int\varphi_t(2\varphi + x\cdot\nabla\varphi)\,\mathrm{d}x =$$

$$-8\mathrm{I}\int x\varphi_t\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x - 4\mathrm{I}\int 2\varphi\varphi_t\,\mathrm{d}x =$$

$$-8\mathrm{I}\int x(\mathrm{i}\Delta\varphi + \mathrm{i}\varphi(\Delta|\varphi|^2) + \mathrm{i}|\varphi|^{p-1}\varphi - \mathrm{i}|x|^2\varphi)\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x -$$

$$4\mathrm{I}\int 2\varphi(\mathrm{i}\Delta\varphi + \mathrm{i}\varphi(\Delta|\varphi|^2) + \mathrm{i}|\varphi|^{p-1}\varphi - \mathrm{i}|x|^2\varphi)\,\mathrm{d}x =$$

$$-8\mathrm{R}\int x(\Delta\varphi + \varphi(\Delta|\varphi|^2) + |\varphi|^{p-1}\varphi - |x|^2\varphi)\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x -$$

$$4\mathrm{R}\int 2\varphi(\Delta\varphi + \varphi(\Delta|\varphi|^2) + |\varphi|^{p-1}\varphi - |x|^2\varphi)\,\mathrm{d}x,$$

因为:

$$\mathrm{R}\int x\cdot\nabla\varphi\Delta\varphi\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\mathrm{R}\int x\cdot\nabla\varphi\varphi(\Delta|\varphi|^2)\,\mathrm{d}x = 0,\quad \mathrm{R}\int\varphi\Delta\varphi\,\mathrm{d}x = -\int|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{R}\int\varphi\varphi(\Delta|\varphi|^2)\,\mathrm{d}x = -\int|\nabla|\varphi|^2|^2\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{R}\int x\cdot\nabla\varphi|\varphi|^{p-1}\varphi\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{p+1}\int|\varphi|^{p+1}\,\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{R}\int x\cdot\nabla\varphi|x|^2\varphi\,\mathrm{d}x = -2\int|x|^2|\varphi|^2\,\mathrm{d}x,$$

所以我们有:

$$J''(t) = 8\int\left(|\nabla\varphi|^2 - |x|^2|\varphi|^2 + |\nabla|\varphi|^2|^2 - \frac{p-1}{p+1}|\varphi|^{p+1}\right)\mathrm{d}x.$$

2 爆破定理

这节给出解的爆破定理.

定理 2.1 设 $p\geqslant 5$, $\varphi_0\in H$, 如果下列条件之一满足:

(Ⅰ) $E(0)<0$;

(Ⅱ) $E(0)=0$, $\mathrm{I}\int\bar{\varphi}_0 x\cdot\nabla\varphi_0\,\mathrm{d}x<0$;

(Ⅲ) $E(0)>0$, $\left|\mathrm{I}\int\bar{\varphi}_0 x\cdot\nabla\varphi_0\,\mathrm{d}x\right|^2\geqslant 2E(0)\int|x\varphi_0|^2\,\mathrm{d}x$.

则初值问题(3)和初值问题(4)的解 $\varphi(t,x)$ 将在有限时间 $T<\infty$ 内发生爆破.

证明 我们用反证法来证明定理 2.1. 假定解 $\varphi(t,x)$ 的最大存在时间 T 无限. 由经典

分析，下面等式成立.

$$J(t)=J(0)+J'(0)t+\int_0^t(t-s)J''(s)\mathrm{d}s,\qquad 0\leqslant t<\infty.\tag{8}$$

根据定理 2.1 的假设以及(7)式，可得

$$J''(t)=16E(0)-12\int\left(|\nabla\varphi|^2+3|x|^2|\varphi|^2+\frac{p-5}{p+1}|\varphi|^{p+1}\right)\mathrm{d}x\leqslant 16E(0),\qquad 0\leqslant t<\infty.\tag{9}$$

因此

$$J(t)\leqslant J(0)+J'(0)t+8E(0)t^2,\qquad 0\leqslant t<\infty.\tag{10}$$

注意到 $J(t)$ 是一个非负函数，而且

$$J(0)=\int|x|^2|\varphi_0|^2\mathrm{d}x$$

以及

$$J'(t)=4\mathrm{I}\int x\overline{\varphi_0}\nabla\varphi_0\mathrm{d}x,$$

所以，在假设(Ⅰ)或(Ⅱ)或(Ⅲ)下，(10)式表明存在 $T^*<\infty$ 使得

$$\lim_{t\to T^*}J(t)=0,$$

即

$$\lim_{t\to T^*}\int|x|^2|\varphi_0|^2\mathrm{d}x=0,$$

这与引理 1.1 矛盾. 因此初值问题(3)和初值问题(4)的解在有限时间内爆破.

3 整体存在性

这节使用变分方法建立方程(3)和一个经典的椭圆方程之间的关系，然后可以得到带临界幂非线性项的初值问题(3)和初值问题(4)整体解存在的一个充分条件.

考虑非线性数量场方程

$$-\Delta u+u-|u|^2u=0,\qquad u\in H^1(R^2).\tag{11}$$

由文献[18]至文献[20]，我们得到下面的引理.

引理 3.1 方程(11)有一个唯一的径向对称解 $Q(x)$(基态解)，即 $Q(x)$ 只依赖于 $|x|$. 而且，$\frac{1}{2}\left(\int Q^2\mathrm{d}x\right)$ 是下面泛函的最小值

$$I(\psi)=\frac{\left(\int|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int|\psi|^2\mathrm{d}x\right)}{\int|\psi|^4\mathrm{d}x},\qquad \psi\in H.\tag{12}$$

注记 3.1 由引理 3.1，得到

$$\int|\psi|^4\mathrm{d}x\leqslant 2\left(\int Q^2\mathrm{d}x\right)^{-1}\left(\int|\nabla\psi|^2\mathrm{d}x\right)\left(\int|\psi|^2\mathrm{d}x\right).\tag{13}$$

这就是 Gagliardo-Nirenberg 不等式.

下面，我们给出初值问题(3)和初值问题(4)整体解存在的一个定理.

定理 3.1 设 $Q(x)$ 是方程(11)的正径向对称解而且 $p=3$. 如果 φ_0 满足 $\varphi_0\in H$ 和 $\|\varphi_0\|_{L^2}<\|Q\|_{L^2}$，那么初值问题(3)和初值问题(4)的解 $\varphi(t,x)$ 关于时间 $t\in[0,\infty)$ 整体存在.

证明 设 $\varphi(t,x)\in C([0,T);H)$ 是初值问题(3)和初值问题(4)的解. 由引理 1.1 和引理1.2, 应用引理 3.1, 可得

$$\int\left\{\left(1-\frac{\int|\varphi|^2\mathrm{d}x}{\int Q^2\mathrm{d}x}\right)|\nabla\varphi|^2+|x|^2|\varphi|^2+\frac{1}{2}|\nabla|\varphi|^2|^2\right\}\mathrm{d}x\leqslant E(0),\qquad(14)$$

从而由

$$\|\varphi_0\|_{L^2}<\|Q\|_{L^2},$$

我们得出 $\int|\nabla\varphi|^2\mathrm{d}x$ 和 $\int|x|^2|\varphi|^2\mathrm{d}x$ 对于 $t\in[0,T)$ 和任何的 $T<\infty$ 是有界的. 于是可推出 $\varphi(t,x)$ 关于时间 $t\in[0,\infty)$ 整体存在. □

致谢 本得到四川师范大学校级科研基金资助, 特此感谢.

[参 考 文 献]

[1] Laedke E W, Spatschek K H, Stenflo L. Evolution theorem for a class of perturbed envelope soliton solutions[J]. J Math Phys, 1983, **24**(12): 2764-2769.

[2] De Bouard A, Hayashi N, Saut J C. Global existence of small solutions to a relativistic nonlinear Schrödinger equation[J]. Comm Math Phys, 1997, **189**(1): 73-105.

[3] Nakamura A. Damping and modification of exciton solitary waves[J]. J Phys Soc Japan, 1977, **42**(6): 1824-1835.

[4] Porkolab M, Goddman M V. Upper-hybrid solitons and oscillating two-stream instabilities[J]. Phys Fluids, 1976, **19**(6): 872-881.

[5] Quispel G R W, Capel H W. Equation of motion for the Heisenberg spin chain[J]. Physica A, 1982, **110**(1/2): 41-80.

[6] Takeno S, Homma S. Classical planar Heisenberg ferromagnet, complex scalar fields and nonlinear excitations[J]. Progr Theoret Physics, 1981, **65**(1): 172-189.

[7] Hasse R W. A general method for the solution of nonlinear soliton and kink Schrödinger equations [J]. Z Physik B, 1980, **37**(1): 83-87.

[8] Makhankov V G, Fedyanin V K. Non-linear effects in quasi-one-dimensional models of condensed matter theory[J]. Physics Reports, 1984, **104**(1): 1-86.

[9] Poppenberg M. Smooth solutions for a class of fully nonlinear Schrödinger type equations[J]. Non-linear Analysis TMA, 2001, **45**(6): 723-741.

[10] Poppenberg M. On the local well posedness of quasi-linear Schrödinger equations in arbitrary space dimension[J]. J Differnatial Equations, 2001, **172**(1): 83-115.

[11] Poppenberg M. An inverse function theorem in Sobolev spaces and applications to quasi-linear Schrödinger equations[J]. J Math Anal Appl, 2001, **258**(1): 146-170.

[12] Poppenberg M, Schmitt K, Wang Z Q. On the existence of soliton solutions to quasi-linear Schrödinger equations[J]. Calc var Partial Differential Equations, 2002, **14**(3): 329-344.

[13] Liu J Q, Wang Y Q, Wang Z Q. Soliton solutions for quasi-linear Schrödinger equations Ⅱ[J]. J Differnatial Equations, 2003, **187**(2): 473-493.

[14] Juan J. Garcia, Vladimir V. Konotop, Boris Malomed. A quasi-local Gross-Pitaevskii equation for attractive Bose-Einstein condensates[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2003, **62**(1/2): 21-30.

[15] 张健. 具非线性二阶导数项的 Schrödinger 方程混合问题的爆破性质[J]. 数学物理学报, 1994, **14**

(增刊): 89-94.

[16] Glassey R T. On the blowup of nonlinear Schrödinger equations[J]. J Math Phys, 1977, **18**(9): 1794-1797.

[17] Tsutsumi Y, Zhang Jian. Instability of optical solitions for two-wave interaction model in cubic nonlinear media[J]. Adv Math Sci Appl, 1998, **8**(2): 691-713.

[18] Weinstein M I. Nonlinear Schrödinger equations and sharp interpolations estimates[J]. Comm Math Phys, 1983, **87**(4): 567-576.

[19] Kwong M K. Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in R^N[J]. Arch Ration Mech Anal, 1989, **105**(3): 243-266.

[20] ZHANG Jian. Stability of attractive Bose-Einstein condensates[J]. J Stat Phys, 2000, **101**(3/4): 731-746.

[21] Kavian O. A remark on the blowing up of solutions to the Cauchy problem for nonlinear Schrödinger equations[J]. Trans Amer Math Soc, 1987, **299**(1): 193-203.

[22] Cazenave T. An Introduction to Nonlinear Schrödinger Equations[M]. Rio de Janeiro: Textos de Metods Matematicos, 1989.

On a Class of Quasilinear Schrödinger Equations

SHU Ji[1,2], ZHANG Jian[2]

(1. Sichuan Provincial Key Laboratory of Computer Software, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P. R. China;

2. College of Mathematics and Software Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610066, P. R. China)

Abstract: A type of quasilinear Schrödinger equations in two dimensions are discussed, which describe attractive Bose-Einstein Condensates in physics. By establishing the property of the equation and applying the energymethod, was proved the blowup of the solutions to the Cauchy problem for the equation under certain conditions. At the same time, by the variational method, the a sufficient condition of global existence was got, which is related to the ground state of a classical elliptic equation.

Key words: quasilinear Schrödinger equations; blow up; global solution; ground state; Bose-Einstein condensates