

# 水波中弹性浮板的减振问题研究<sup>\*</sup>

赵存宝, 张嘉钟, 黄文虎

(哈尔滨工业大学 航天工程与力学系, 哈尔滨 150001)

(傅衣铭推荐)

**摘要:** 基于线性水波理论和 Mindlin 厚板动力学理论, 采用 Wiener-Hopf 方法, 分析研究了水面上弹性浮板对水波的动响应及其减振问题。首先, 在不考虑弹性联接情况下, 将分析计算结果与前人的计算结果及实验数据进行了对比, 验证了该方法的有效性。其次, 基于该方法分析了连接浮板与水底的弹簧刚度与浮板振动响应各参数之间的关系, 从而为超大型浮台系统的设计提供理论依据。

**关键词:** 水波衍射; 弹性浮板; Mindlin 厚板理论; Wiener-Hopf 方法; 减振; 反射和透射系数

**中图分类号:** O353.4; P752      **文献标识码:** A

## 引 言

近年来, 海面上的浮板水弹性问题越来越引起了人们的关注。这些关注与目前许多海上超大型浮动平台的工程设计背景有关, 例如: 人造陆地、机场、航天器发射基地等。由于这些物体的尺寸大, 长和宽有时可达数公里, 所以很难满足实验相似准则。因此, 采用数值模拟研究浮板水弹性与水波散射问题具有重要意义。同时, 许多这类结构系统在工作时, 对其允许的最大振动幅值和承载都有较严格的要求。例如, 由于飞行器垂直发射的时候偏离铅垂位置不能超过几个分度, 故安装在浮台跑道上的导航仪表等装置对浮台的振幅要求就会很高, 所以对浮台结构进行减振研究具有重要意义。

Wu 等人利用本征函数, 采用匹配渐近展开方法, 研究了弹性浮板的水波动响应问题<sup>[1]</sup>。Korobkin 采用数值和渐近展开方法, 对水波中的浮板水弹性问题进行了研究<sup>[2]</sup>。Linton 等人采用复变函数留数定理, 分析研究了有限水深半无限大冰层边缘的水波衍射问题<sup>[3]</sup>。Andrianov 等人针对无限水深、有限水深和浅水 3 种不同情况, 研究了二维大型海上平台对平面入射波的水弹性响应<sup>[4]</sup>。Ohkusu 等人提出一种新的解析方法, 研究浅水中特大矩形薄壁浮板上的单色水波散射问题<sup>[5-6]</sup>。

Kanoria 等人采用 Wiener-Hopf 方法, 分析研究了深水域中二维半无限大薄壁浮动惯性表面的水波散射问题, 以及两种不同密度非溶流体界面波的散射问题<sup>[7]</sup>。Balmforth 等人基于 Wiener-Hopf 方法, 详细研究了海洋浮冰对表面重力波入射的散射问题。浮冰弯曲运动描述采

\* 收稿日期: 2006-02-28; 修订日期: 2007-05-21

作者简介: 赵存宝(1972—), 男, 内蒙古丰镇人, 博士生(联系人, Tel/Fax: + 86-451-83063160; E-mail: zcb818857@sohu.com)。

用 Timoshenko-Mindlin 方程<sup>[8]</sup>。采用 Wiener-Hopf 方法, Tkacheva 分别研究了有限水深半无限大及条状浮板的平面波衍射问题<sup>[9-10]</sup>, 同时给出了一种求解两个未知常数的计算方法。

可以看到, 目前对浮板水波衍射的分析, 平板运动的控制方程大都采用的是经典薄板理论。由于 Mindlin 厚板理论考虑了横向剪切变形和转动惯量的影响, 其动力学分析结果更接近工程实际, 故本文将采用 Mindlin 厚板动力学理论来描述弹性浮板的控制方程。所以, 本章采用 Wiener-Hopf 方法和 Mindlin 厚板理论, 对二维有限长度浮板在单色水波作用下的振动响应参数与端部约束弹簧刚度之间的关系进行了系统地分析研究。

## 1 控制方程与分析求解

### 1.1 控制方程及其边界条件

假设流体是理想不可压的有势流, 在线性理论框架内, 研究深度为  $a$  的流体波动中的浮板水弹性问题。取平板的左边缘作为直角坐标系  $(x, y, z)$  的原点, 如图 1 所示。设平板的厚度和长度分别为  $h$  和  $L$ , 忽略平板的吃水深度, 即把底面边界条件移到水的表面。假设小振幅入射水波沿  $x$  轴正向传播。浮板左端边缘通过刚度为  $K_a$  的弹簧与水底垂直相联。

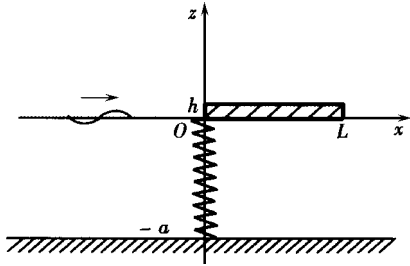


图 1 流场-结构示意图

根据 Mindlin 厚板动力学理论, 二维板中的广义位移函数可描述为<sup>[11]</sup>

$$\phi(x) = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad (1a)$$

$$M(x) = -D \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad (1b)$$

$$Q(x) = C \left[ \frac{\partial w}{\partial x} - \phi \right], \quad (1c)$$

其中,  $\phi$  是浮板的转角;  $M$  是浮板的弯矩;  $Q$  是板的剪力;  $D = Eh^3/(12(1-\nu^2))$  是弯曲刚度;  $E$  和  $\nu$  分别是弹性模量和泊松比;  $C = \epsilon gh$  是剪切刚度,  $\epsilon = \pi^2/12$  是剪切折算因子,  $G$  是剪切弹性模量;  $w$  是平板的挠度或表示水面的振动位移;  $F$  是一广义函数, 满足下面的微分方程:

$$w = \left[ 1 + \frac{\rho_0 J}{C} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{D}{C} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] F, \quad (2)$$

其中,  $J = h^3/12$  是板的转动惯量,  $\rho_0$  是板的密度,  $t$  是时间。

方程(2)的解可有其 Green 函数表示为

$$F = \frac{C}{D} \int_0^L G(x, x') w(x') dx', \quad (3a)$$

式中,  $G(x, x')$  是满足方程(2)的 Green 函数, 其有限形式<sup>[12]</sup>为

$$G(x, x') = \begin{cases} \frac{\sinh \gamma x}{\gamma \sinh \gamma L} \sinh \gamma(L-x') & (0 \leq x < x'), \\ \frac{\sinh \gamma(L-x)}{\gamma \sinh \gamma L} \sinh \gamma x' & (x' \leq x < L), \end{cases} \quad (3b)$$

式中,  $\gamma$  是平板剪切振动的波数,  $\gamma = \sqrt{(C - \rho_0 J \omega^2)/D}$ 。

这样, 在区域  $(z = 0, 0 < x < L)$ , 平板的弹性波动控制方程为

$$D \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} w - \rho_0 J \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ 1 + \frac{Dh}{JC} \right] \frac{\partial^2}{\partial t^2} w + \rho_0 h \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left[ 1 + \frac{\rho_0 J}{C} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right] w =$$

$$\left[ 1 + \frac{\rho_0 J}{C} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{D}{C} \dots \right] p, \quad (4a)$$

式中,  $\dots$  是 Laplace 算子,  $\dots = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$ ,  $p$  是水的动压力.

流场速度势应满足 Laplace 方程

$$\dots \varphi = 0 \quad (-a < z < 0). \quad (4b)$$

自由水面、平板与水的界面, 以及水底的边界条件为如下形式:

$$p = -\rho \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + gw \right] \quad (z = 0, 0 < x < L) \quad (\text{Bernoulli 方程}), \quad (5a)$$

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho gw = 0 \quad [z = 0, x \in (-\infty, 0) \cup (L, \infty)]$$

(自由表面的动力学边界条件),

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial t} \quad (z = 0, 0 < x < L) \quad (\text{浮板与水界面的速度不穿透条件}), \quad (5c)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (z = -a) \quad (\text{水与水底壁面的速度不穿透条件}), \quad (5d)$$

式中,  $g$  是重力加速度,  $\rho$  是流体的密度.

由于板的左边缘与水底是通过弹簧垂直相连, 所以板两端弯矩和右端剪力为 0, 而左端剪力不为 0, 可有如下表达式

$$\frac{d^2 F}{dx^2} = 0 \quad (x = 0, L), \quad (6a)$$

$$\frac{d}{dx} [w(x) - F(x)] = 0 \quad (x = L), \quad (6a)$$

$$C \frac{d}{dx} [w(x) - F(x)] = -K_a w(x) \quad (x = 0), \quad (6c)$$

其中  $K_a$  为相应的弹簧刚度. 引进以下无量纲变量

$$\varphi = \frac{\varphi}{A \sqrt{gl}}, \quad x = \frac{x}{a}, \quad z = \frac{z}{a}, \quad p = \frac{p}{\rho g A}, \quad t = \omega t, \quad k = ka,$$

$$L = \frac{L}{a}, \quad l = \frac{l}{a}, \quad h = \frac{h}{a}, \quad \rho = \frac{\rho}{\rho_0},$$

其中,  $A$  是入射波的幅值;  $l = g/\omega^2$ ;  $a$  是特征尺度, 将在问题研究中取为水深. 以下分析研究将采用无量纲形式. 为书写方便, 我们将略去变量上的符号  $\sim$ .

流场速度势由入射波速度势  $\varphi^{(i)}$  和散射波速度势  $\varphi^{(s)}$  构成, 对于等深小幅入射水波有

$$\varphi = (\varphi^{(i)} + \varphi^{(s)}) e^{-it}, \quad \varphi^{(i)} = e^{ikx} \cosh k(z+1) / (\cosh k), \quad (7)$$

式中,  $k$  是水波的入射波波数.

根据式(4a)、(5a)、(5c)和(7), 散射波速度势  $\varphi^{(s)}$  在  $(z = 0, 0 < x < L)$  处应满足的边界条件为

$$H(x) = B e^{ikx}, \quad (8a)$$

其中

$$H(x) = \left\{ \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \left[ k^4 h^2 \left[ \frac{1}{12} + \frac{2}{\pi^2(1-\nu)} \right] - k^4 \rho h l \frac{2}{\pi^2(1-\nu)} \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} - k^4 \left[ 1 - k^4 \frac{h^4}{6\pi^2(1-\nu)} \right] + k^4 \frac{\rho}{h} \left[ 1 - k^4 \frac{h^4}{6\pi^2(1-\nu)} \right] \right\} \frac{\partial \varphi^{(s)}}{\partial z} - k^4 \frac{\rho}{h} \left[ 1 - k^4 \frac{h^4}{6\pi^2(1-\nu)} - \frac{2h^2}{\pi^2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \varphi^{(s)},$$

$$B = - [\beta(k) + lb(k)] k \tanh(k) + b(k),$$

$$b(\alpha) = k^4 \frac{\rho}{h} \left[ 1 - \frac{1}{6\pi^2(1-\nu)} k^4 h^4 + \frac{2}{\pi^2} \frac{h^2}{1-\nu} \alpha^2 \right],$$

$$\beta(\alpha) = \alpha^4 - k^4 h^2 \left[ \frac{2}{\pi^2(1-\nu)} + \frac{1}{12} \right] \alpha^2 - \left[ 1 - \frac{1}{6\pi^2(1-\nu)} k^4 h^4 \right] k^4,$$

式中,  $k_0 = (\rho_0 h \omega^2 / D)^{1/4}$ ,  $\kappa = k_0 \alpha$ 。

由边界条件表达式(5b)和(7)联立, 散射波速度势  $\varphi^{(s)}$  在  $[z = 0, x \in (-\infty, 0) \cup (L, \infty)]$  处应满足的边界条件为

$$l \frac{\partial \varphi^{(s)}}{\partial z} - \varphi^{(s)} = 0 \quad (8b)$$

## 1.2 水波的色散方程

首先, 研究流体中水波的传播特性, 以确定流体中的导波模式。当没有弹性浮板时, 即水面为完全自由时水波的色散关系可描述为

$$K_1(\alpha) = \alpha \tanh \alpha - 1 = 0, \quad (9)$$

式中,  $\alpha$  表示水波传播波数。方程(9)有2个实根  $\pm k$  和无穷个纯虚根  $\pm k_n (n = 1, 2, \dots, \infty)$ 。

当水面有弹性浮板时, 流体中水波的色散方程为

$$K_2(\alpha) = [\beta(\alpha) + lb(\alpha)] \alpha \tanh \alpha - b(\alpha) = 0 \quad (10)$$

色散关系式(10)有2个实根  $\pm \alpha_0$  及一系列纯虚根  $\pm \alpha_n (n = 1, 2, \dots, \infty)$ , 还有关于实轴和虚轴是对称的4个复根, 即满足关系  $\alpha_{-1} = -\alpha_2 = -\alpha_3 = \alpha_4$ 。  $\alpha_i (i = 1, 2, 3, 4)$  表示第  $i$  象限的根。

## 1.3 采用 Wiener-Hopf 方法求解

采用 Wiener-Hopf 方法构造问题的解<sup>[13]</sup>。引进关于复变量(空间波数)  $\alpha$  的函数, 将空间域问题转化为空间波数的(周期性)问题

$$\Phi_{\pm}(\alpha, z) = \int_L^{\infty} e^{i\alpha(x-L)} \varphi^{(s)}(x, z) dx, \quad \Phi_{\pm}(\alpha, z) = \int_{-\infty}^0 e^{i\alpha x} \varphi^{(s)}(x, z) dx, \quad (11a, b)$$

$$\Phi_1(\alpha, z) = \int_0^L e^{i\alpha x} \varphi^{(s)}(x, z) dx, \quad (11c)$$

$$\Phi(\alpha, z) = \Phi_{\pm}(\alpha, z) + \Phi_1(\alpha, z) + e^{i\alpha L} \Phi_{\pm}(\alpha, z) \quad (11d)$$

研究函数  $\Phi_{\pm}(\alpha, z)$  的性质。当  $x \rightarrow -\infty$  时, 散射速度势是形式为  $R e^{-ikx}$  的反射波、一些局部化振动模和衰减波模。最低阶局部化振动模式所对应的根为  $k_1$ 。因此, 函数  $\Phi_{\pm}(\alpha, z)$  除了在极点  $\alpha = k$  外, 在  $\text{Im} \alpha < |k_1|$  的半平面内是解析的。当  $x \rightarrow \infty$  时, 散射速度势是形式为  $T e^{ikx}$  的透射波、一些局部化振动和衰减波。因此, 函数  $\Phi_{\pm}(\alpha, z)$  除了在极点  $\alpha = -k$  外, 在  $\text{Im} \alpha > -|k_1|$  的上半平面内是解析的。

函数  $\Phi(\alpha, z)$  是函数  $\varphi(x, z)$  关于空间变量  $x$  的 Fourier 变换, 且满足方程  $\partial^2 \Phi / \partial z^2 - \alpha^2 \Phi = 0$ 。此方程满足水底边界条件(5d)的通解形式为

$$\Phi(\alpha, z) = Y(\alpha) \frac{\cosh[\alpha(z+1)]}{\cosh(\alpha)} \quad (12)$$

将边界条件式(8a)的左端做 Fourier 变换, 并用  $J_{\pm}(\alpha)$  和  $J_1(\alpha)$  表示, 可有

$$J(\alpha) = J_{-}(\alpha) + J_1(\alpha) + e^{i\alpha L} J_{+}(\alpha) = Y(\alpha) K_2(\alpha), \quad (13)$$

其中

$$J_-(\alpha) = \int_{-\infty}^0 H(x) e^{i\alpha x} dx, \quad J_+(\alpha) = \int_L^{\infty} H(x) e^{i\alpha x} dx,$$

$$J_1(\alpha) = \int_0^L H(x) e^{i\alpha x} dx = \frac{B[e^{i(\alpha+k)L} - 1]}{i(\alpha+k)}.$$

相似地将边界条件式(8b)的左端做 Fourier 变换,并用  $X_{\pm}(\alpha)$  和  $X_1(\alpha)$  表示,有

$$X(\alpha) = X_-(\alpha) + X_1(\alpha) + e^{-i\alpha L} X_+(\alpha) = X_1(\alpha) = Y(\alpha) K_1(\alpha), \quad (14)$$

其中  $X_-(\alpha) = X_+(\alpha) = 0$ ,  $X_1(\alpha) = \int_0^L \left[ l \frac{\partial \Phi^{(s)}}{\partial z} - \Phi^{(s)} \right] e^{i\alpha x} dx \cdot$

由表达式(13)和(14)消去  $Y(\alpha)$ , 可得如下表达式

$$J_-(\alpha) + \frac{B[e^{i(\alpha+k)L} - 1]}{i(\alpha+k)} + e^{i\alpha L} J_+(\alpha) = X_1(\alpha) K(\alpha), \quad (15)$$

其中,  $K(\alpha) = K_2(\alpha)/K_1(\alpha)$ .

根据文献[13]可知,函数  $K(\alpha)$  可以分解因式

$$K(\alpha) = K_+(\alpha) K_-(\alpha), \quad (16)$$

其中,  $K_{\pm}(\alpha)$  与函数  $\Phi_{\pm}(\alpha, z)$  的正则区域是相同的,分别是  $S_{\pm}$ , 其中  $S_+$  是指  $\text{Im} \alpha > -|k_1|$  半平面剔除  $-\alpha_0$  和  $-k$  点的切缝的区域,  $S_-$  是指  $\text{Im} \alpha < |k_1|$  半平面剔除  $\alpha_0$  和  $k$  点的切缝的区域.

将式(15)分别乘以  $e^{-i\alpha L} [K_+(\alpha)]^{-1}$  和  $[K_-(\alpha)]^{-1}$ , 可得到如下两个方程:

$$\frac{J_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{B e^{i\alpha L}}{i(\alpha+k)K_+(\alpha)} + U_+(\alpha) - V_+(\alpha) =$$

$$X_1(\alpha) K_-(\alpha) e^{-i\alpha L} - U_-(\alpha) + V_-(\alpha), \quad (17a)$$

$$\frac{J_-(\alpha)}{K_-(\alpha)} + R_-(\alpha) - S_-(\alpha) - \frac{B}{i(\alpha+k)} \left[ \frac{1}{K_-(\alpha)} - \frac{1}{K_-(\alpha-k)} \right] =$$

$$X_1(\alpha) K_+(\alpha) - R_+(\alpha) + S_+(\alpha) + \frac{B}{i(\alpha+k)K_+(\alpha)}, \quad (17b)$$

其中

$$U_{\pm}(\alpha) = \frac{\pm 1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\sigma}^{\infty - i\sigma} \frac{e^{-i\alpha \zeta} J_-(\zeta) d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta - \alpha)},$$

$$V_{\pm}(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty - i\sigma}^{\infty - i\sigma} \frac{e^{-i\alpha \zeta} d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta + k)(\zeta - \alpha)},$$

$$R_{\pm}(\alpha) = \frac{\pm 1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\sigma}^{\infty - i\sigma} \frac{e^{i\alpha \zeta} J_+(\zeta) d\zeta}{K_-(\zeta)(\zeta - \alpha)},$$

$$S_{\pm}(\alpha) = \frac{\pm B}{2\pi} \int_{-\infty - i\sigma}^{\infty - i\sigma} \frac{e^{i(\alpha+k)\zeta} d\zeta}{K_-(\zeta)(\zeta + k)(\zeta - \alpha)}.$$

方程(17a)和(17b)等号两侧的函数都是在相同区域内解析. 通过分析表达式,利用解析延拓概念,可以在整个复平面上定义这个函数. 根据文献[13]和 Liouville 定理可知,这个函数是一多项式函数,且最高次数为一次,可有如下表达式:

$$\frac{\Psi_+(\alpha)}{K_+(\alpha)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\sigma}^{\infty - i\sigma} \frac{e^{-i\alpha \zeta} \Psi_+(\zeta) d\zeta}{K_+(\zeta)(\zeta - \alpha)} = a_1 \alpha + b_1, \quad (18a)$$

$$\frac{\Psi_-(\alpha)}{K_-(\alpha)} + \frac{B}{i(\alpha+k)K_-(\alpha-k)} - \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - i\sigma}^{\infty - i\sigma} \frac{e^{i\alpha \zeta} \Psi_-(\zeta) d\zeta}{K_-(\zeta)(\zeta - \alpha)} = a_2 \alpha + b_2, \quad (18b)$$

式中,  $a_1, b_1, a_2, b_2$  是未知常数,  $\Psi_+(\alpha) = J_+(\alpha) + B e^{i\alpha L}/(i(\alpha+k))$ ,  $\Psi_-(\alpha) = J_-(\alpha) - B/(i(\alpha+k))$ . 分别利用式(6a)、(6b)和(6c)的边界条件,利用留数定理运算后可得到未知常

数的表达式

## 2 平板动响应、反射和透射系数

为了计算平板挠度分布,由式(12)、(13)可得

$$Y(\alpha) = \frac{1}{K_2(\alpha)} [\Psi_+(\alpha)e^{i\alpha x} + \Psi_-(\alpha)] \quad (19)$$

由式(5c)和式(19)可得到平板挠度的如下表达式

$$w(x) = - \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{\alpha_m \tanh(\alpha_m) K_+(\alpha_m)}{K_2(\alpha_m)} [e^{-i\alpha_m(x-L)} \xi_m + e^{i\alpha_m x} \eta_m], \quad (20)$$

式中,  $\xi_m = \Psi_+(\alpha_m)/(K_+(\alpha_m))$ ,  $\eta_m = \Psi_-(\alpha_m)/(K_-(\alpha_m))$

板内无量纲动弯矩幅值表达式为

$$M(x) = \frac{D}{\rho g L_0 a^2} \sum_{m=-2}^{\infty} \frac{q \alpha_m^3 \tanh(\alpha_m) K_+(\alpha_m) N_1(\alpha_m)}{K_2(\alpha_m)} [e^{-i\alpha_m(x-L)} \xi_m + e^{i\alpha_m x} \eta_m], \quad (21)$$

当  $x \rightarrow -\infty$ ,  $\varphi^{(s)}(x, 0) = R e^{-ikx}$ .  $R$  的值可由求散射速度势在点  $\alpha = k$  处的留数来确定,

$$R = \frac{i}{K_+(k)K_1(k)} \left\{ -\frac{B}{2ikK_+(k)} + \frac{Q_1(P_{22}k - P_{21}) - Q_2(P_{12}k - P_{11})}{P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21}} + \sum_{m=-2}^{\infty} \xi_m \frac{e^{i\alpha_m L} K_1(\alpha_m) K_+^2(\alpha_m)}{K_2(\alpha_m)} \left[ \frac{1}{\alpha_m - k} + \sum_{s=1}^4 \frac{b(x_s) [N_3(-x_s)(P_{12}k - P_{11}) - x_s^2 N_1(x_s)(P_{22}k - P_{21})]}{\beta(x_s) K_+(x_s)(P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21})(\alpha_m - x_s)} + \frac{ib(i\gamma) [q(P_{12}k - P_{11}) - \gamma(P_{22}k - P_{21})]}{2\beta(i\gamma)(P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21})K_+(i\gamma)(\alpha_m - i\gamma)} + \frac{ib(i\gamma) [q(P_{12}k - P_{11}) + \gamma(P_{22}k - P_{21})]}{2\beta(i\gamma)(P_{11}P_{22} - P_{12}P_{21})K_+(-i\gamma)(\alpha_m + i\gamma)} \right] \right\}. \quad (22)$$

当  $x \rightarrow \infty$ ,  $\varphi(x, 0) = T e^{ikx}$ .  $T$  的值由求散射速度势点  $\alpha = -k$  处的留数来得到,

$$T = \frac{ie^{-ikL}}{K_-(k)K_1(-k)} \sum_{m=-2}^{\infty} \eta_m \frac{e^{i\alpha_m L} K_1(\alpha_m) K_+^2(\alpha_m)}{K_2(-\alpha_m)} \left\{ \frac{1}{k - \alpha_m} + \sum_{s=1}^4 \frac{x_s b(x_s) [x_s N_1(x_s)(A_{21} + A_{22}k) - N_2(x_s)(A_{11} + A_{12}k)]}{\beta(x_s) K_-(x_s)(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})(\alpha_m + i\gamma)} + \frac{b(i\gamma) [i\gamma(A_{21} + A_{22}k) - q(A_{11} + A_{12}k)]}{2\beta(i\gamma)(A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21})} \times \left[ \frac{1}{K_-(i\gamma)(\alpha_m + i\gamma)} + \frac{1}{K_+(i\gamma)(\alpha_m - i\gamma)} \right] \right\}, \quad (23)$$

幅值  $|R|$  和  $|T|$  分别代表反射系数和透射系数

## 3 数值算例

为验证分析计算方法的有效性,采用上述求解列式对一个具体的物理模型进行了分析计算,模型参数取为<sup>[1+12]</sup>: 弹性模量  $E = 103 \text{ MPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ , 板长  $L = 10 \text{ m}$ , 板厚  $h = 38 \text{ mm}$ , 板的吃水深度  $d = 8.36 \text{ mm}$ , 水的密度  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , 水深  $a = 1.1 \text{ m}$ , 水与板的密度比  $\rho/\rho_0 = 4.5455$ , 无量纲入射波数分别为  $k = 9.0434, 2.2216, 0.8044$ . 当弹簧刚度取为  $K_a = 0$  时,即没有弹簧约束情况,就与文献[1, 10]中的模型相同

本文分析计算结果与文献[1]中的实验结果,以及基于经典薄板理论的分析结果是一致

的,如图2至图7所示,说明本文分析求解方法是正确的,可用来分析预测其他参数下的系统的动力学行为。可以看到,在长波入射时,分析计算值与实验结果符合得较好。

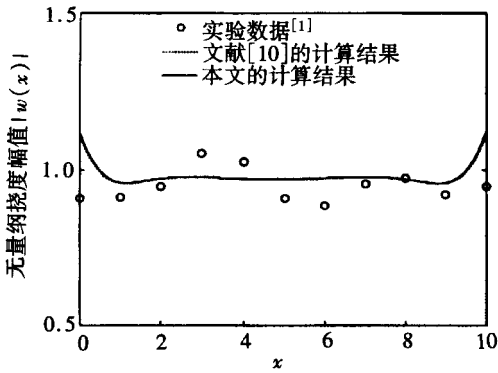


图2 板的挠度幅值分布 ( $k = 0.8044$ )

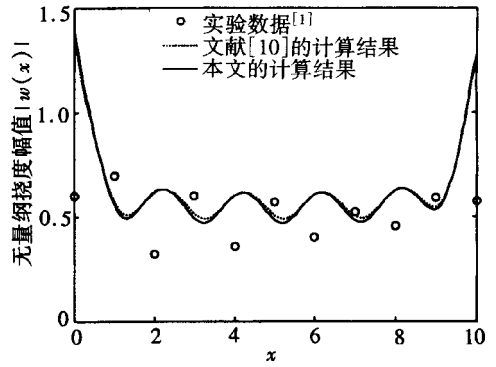


图3 板的挠度幅值分布 ( $k = 2.2216$ )

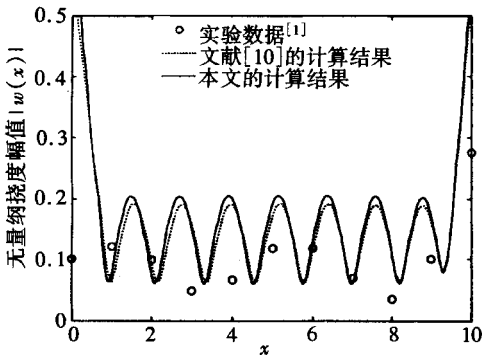


图4 板的挠度幅值分布 ( $k = 9.0435$ )

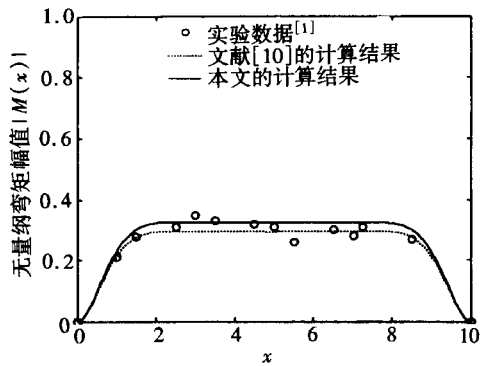


图5 板的弯矩幅值分布 ( $k = 0.8044$ )

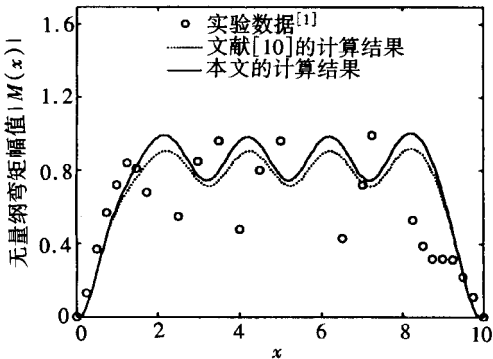


图6 板的弯矩幅值分布 ( $k = 2.2216$ )

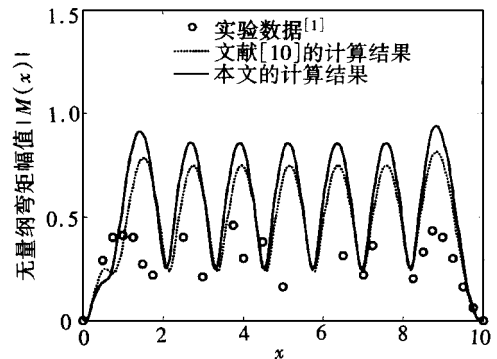


图7 板的弯矩幅值分布 ( $k = 9.0434$ )

采用本文求解方法,我们对连接弹簧选取不同刚度值,而其它参数不变的工况下进行了分析计算,图8至图10分别给出了水波入射波数分别取  $k = 0.8044, 2.2216, 9.0434$  三种值时,不同弹簧刚度对板上无量纲挠度幅值分布的影响;图11至图13分别给出了水波入射波数分别取  $k = 0.8044, 2.2216, 9.0434$  三种值时,不同弹簧刚度对板上无量纲弯矩幅值分布的影响。

由图8至图10可以看出,增加弹簧约束后,可以明显地抑制板的振动;不同的水波入射频

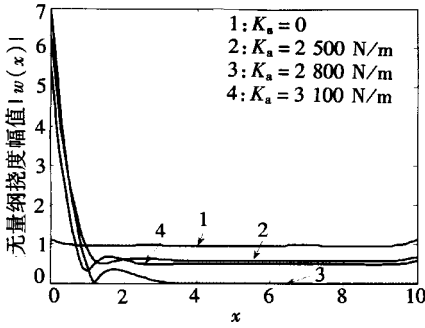


图8 板的挠度幅值分布 ( $k = 0.8044$ )

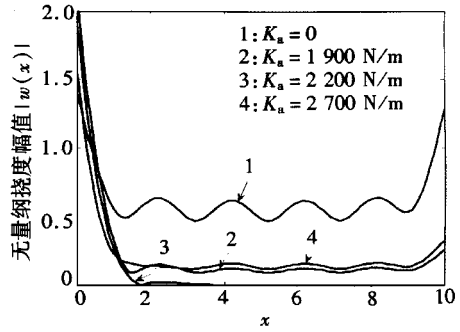


图9 板的挠度幅值分布 ( $k = 2.2216$ )

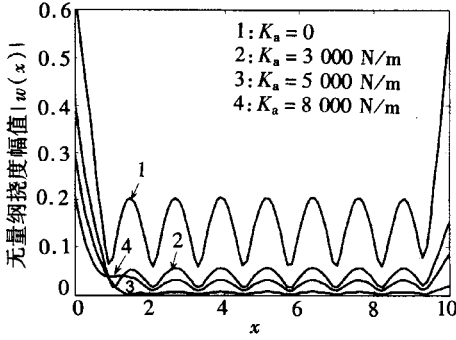


图10 板的挠度幅值分布 ( $k = 9.0434$ )

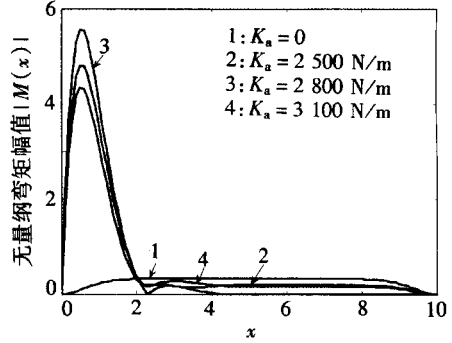


图11 板的弯矩幅值分布 ( $k = 0.8044$ )

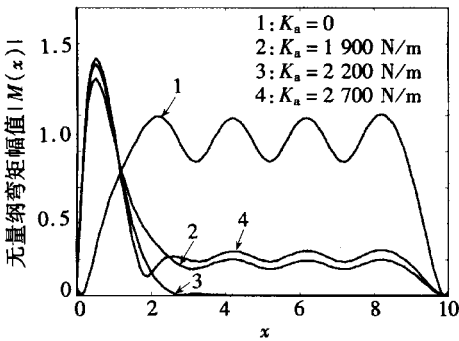


图12 板的弯矩幅值分布 ( $k = 2.2216$ )

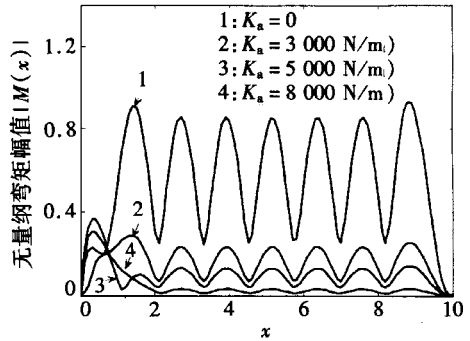


图13 板的弯矩幅值分布 ( $k = 9.0434$ )

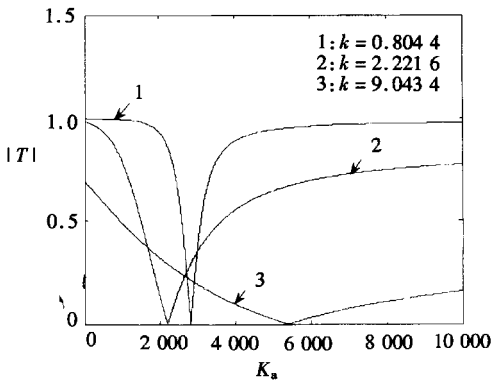


图14  $|T|$  与连接弹簧刚度之间的关系

率对应不同的最优减振弹簧刚度; 针对不同表面入射水波频率, 选取相应的弹簧刚度值可以使板的绝大部分 (可达到板长的 80% 左右) 挠度和弯矩幅值大幅度降低, 甚至接近 0。

同时也可以看到, 增加弹簧约束后, 对于入射水波波长较长的情况, 靠近板左缘附近区域振动会加剧, 波长越长, 振动也越大; 而对于入射波长较短情况, 整个板上的振动都会被减弱。

图 14 分别给出了入射水波波数为  $k = 0.8044$ ,  $2.2216$ ,  $9.0434$  时, 透射系数  $|T|$  与弹簧刚度  $K_a$



之间的关系。由图中可以看出, 对应于最小透射系数的弹簧刚度值与上面计算的挠度和弯矩幅值分布中最优减振弹簧刚度值是完全一致的。因此, 在浮台系统设计过程中, 可以通过求解最小透射系数来确定联结弹簧的刚度值, 以代替求解板的挠度和弯矩幅值过程。

## 4 结 论

本文首先基于水波动力学和 Mindlin 厚板理论, 采用 Wiener-Hopf 方法分析计算了水面浮板对水波的散射问题。当弹簧刚度为 0 时, 即没有弹簧约束, 本文分析计算结果与文献 [1] 中的实验结果是一致的, 说明本文分析方法是正确有效的。随着海洋工程的研究发展, 在工程中更多采用复合材料结构, 制造海洋平台, 以及人造陆地等, 对于这种工程结构的动力学, 有必要采用考虑横向剪切和转动惯量影响的 Mindlin 厚板理论, 以更好地刻画这种流-固耦合系统的动力学行为。

其次, 基于上述理论和方法, 本文着重对有限长度浮板在单色水波作用下的振动响应参数与减振弹簧刚度之间的关系进行了系统地分析研究。结果表明, 对于不同频率的入射水波, 通过选择相应刚度值的弹簧可以有效地抑制浮板的振动以及降低浮板内的动应力幅值, 从而为超大型浮台系统减振设计提供重要的理论依据。

### [参 考 文 献]

- [1] Wu C, Watanabe E, Utsunomiya T. An eigenfunction expansion-matching method for analyzing the wave-induced responses of an elastic floating plate[J]. *Applied Ocean Research*, 1995, **17**(5): 301-310.
- [2] Korobkin A A. Numerical and asymptotic investigation of the problem of the hydroelastic behavior of a floating plate in waves[J]. *Zh Prikl Mekh Tekh Fiz*, 2000, **41**(2): 90-92.
- [3] Linton C M, Hyuck Chung. Reflection and transmission at the ocean/ sea-ice boundary[J]. *Wave Motion*, 2003, **38**: 43-52.
- [4] Andrianov A I, Hemmans A J. The influence of water depth on the hydroelastic response of a very large floating platform[J]. *Marine Structures*, 2003, **16**(5): 355-371.
- [5] Ohkusu M, Namba Y. Analysis of hydroelastic behaviour of a large floating platform of thin plate configuration in waves[A]. In: *Proceedings of the International Workshop on Very Large Floating Structures* [C]. Hayama, Japan, 1996, 143-148.
- [6] Ohkusu M, Namba Y. Hydroelastic analysis of a large floating structure[J]. *Journal of Fluids and Structures*, 2004, **19**(4): 543-555.
- [7] Kanoria M, Mandal B N, Chakrabarti A. The Wiener-Hopf solution of a class of mixed boundary value problems arising in surface water wave phenomena[J]. *Wave Motion*, 1999, **29**: 267-292.
- [8] Balnforth N J, Craster R V. Ocean waves and ice sheets[J]. *Journal of Fluid Mechanics*, 1999, **395**: 89-124.
- [9] Tkacheva L A. Scattering of surface waves by the edge of a floating elastic plate[J]. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2001, **42**(4): 638-649.
- [10] Tkacheva L A. Plane problem of surface wave diffraction on a floating elastic plate[J]. *Fluid Dynamics*, 2003, **38**(3): 465-481.
- [11] 胡海昌. 弹性力学的变分原理及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 1981.
- [12] 胡嗣柱, 倪光炯. 数学物理方法[M]. 北京: 高等教育出版社, 1989, 316-319.

- [13] Noble B. Methods Based on the Wiener-Hopf Technique for the Solution of Partial Differential Equations [M]. London: Pergamon Press, 1958.

## Vibration Reduction of Floating Elastic Plates in Surface Waves

ZHAO Cun-bao, ZHANG Jia-zhong, HUANG Wen-hu

(Department Aerospace Engineering & Mechanics, Harbin Institute of Technology,  
Harbin 150001, P. R. China)

**Abstract:** Based on the dynamical theories of water waves and dynamics of Mindlin thick plates, the investigation of the wave-induced responses and the vibration reduction of an elastic floating plate were presented by using the Wiener-Hopf technique. Firstly, regardless of without the case of elastic connector, the calculated results obtained by the present method were in good agreement with the results from the literature and the experiment. So it can be shown that the present method is valid. Finally, the relation between the spring stiffness to be used to connect the sea bottom and the floating plate, and the parameters of wave-induced responses of floating plates was analyzed by using the present method. Therefore, these results can be used as theoretical bases at the design stage of the super floating platform systems.

**Key words:** diffraction of water wave; elastic floating plate; Mindlin thick plates theory; Wiener-Hopf technique; vibration reduction; transmission and reflection coefficient