文章编号: 1000-0887(2007) 08-0949-09

准晶弹性理论边值问题的可解性*

郭丽辉, 范天佑

(北京理工大学 理学院, 北京 100081)

(叶开沅推荐)

摘要: 通过给出准晶弹性偏微分方程组边值问题的矩阵表示去定义弱解, 利用 Korn 不等式和函数空间理论证明了这种弱解的存在性与唯一性, 从而把经典弹性理论边值问题解的存在性定理推广到准晶弹性理论上, 这种理论为发展极其复杂与困难的准晶弹性的偏微分方程的边值问题的数值解提供了一个基础•

关 键 词: 准晶; 弹性理论; 边值问题; 弱解; 可解性

中图分类号: O346; O175.4 文献标识码: A

引 言

Shechtman 等人 1982 年通过衍射实验发现[1], 固相物质的一种具有非晶体学对称性的新结构 ——准晶, 这就是物理准晶• 这一发现从根本上改变了凝聚态物理学把固体分成晶体与非晶体的传统观念• 之后在不同合金系中发现了大约 200 种准晶, 其中大部分热力学性能稳定, 而且这一趋势仍在进一步发展中• 因而固体包含晶体、准晶体和非晶体三大类• 物理准晶的发现也为在这之前诞生的数学准晶提供了物理实例, 进而推进了这一研究• 其中称为 Penrose 拼砌[2] 的准周期对称性理论现已成为物理准晶的(离散) 几何基础• 准晶学科除了促进离散几何、遍历论等的发展之外, 还促进了群表示理论、Fourier 分析等数学分支的发展(Radin[3], Fan 和 Mai[4]) • 在文献[4] 中范天佑等揭示了准晶弹性理论研究向传统连续力学提出的挑战, 该问题的解决与偏微分方程密切相关, 本文就就这一问题进行讨论•

准晶既是固体的一种结构, 又是一种新型材料• 作为材料, 研究其力学性能, 尤其是弹性与缺陷等有极其重要的意义• 由于这种结构具有准周期对称性, 普通三维物理空间不能描述它的电子衍射图谱, 而必须引入高维(六维) 空间概念• 三维物理空间 $E^{\parallel}$ 是它的一个子空间(称为平行空间), $E^{\perp}$ (称为垂直空间) 是其补空间• 在准晶中, 质点的运动必须用 $E^{\parallel}$ 中位移场 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$(称为声子场) 和 $E^{\perp}$ 中位移场 $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$(称为相位子场) 才能描写, 并且除立方准晶系之外, $\boldsymbol{u}$ 与 $\boldsymbol{w}$ 具有不同的不可约表示, 与前者对应的应变张量 $\varepsilon_{ij} =$

* 收稿日期: 2006-03-09; 修订日期: 2007-06-10
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10372016; 10672022)
作者简介: 郭丽辉(1970—), 女, 辽宁瓦房店人, 副教授, 硕士. 现在通讯址: 中国人民公安大学 理科部, 北京 100084(E-mail: guolihui@cppsu.edu.cn);
范天佑, 教授(联系人. E-mail: tyfan2006@yahoo.com.cn).

$0.5(\partial u_i/\partial x_j+\partial u_j/\partial x_i)$ 描述准晶晶胞的体积与形状的改变，与后者对应的应变张量 $w_{ij}=\partial w_i/\partial x_j$ 描述准晶晶胞中的原子局部重新排列• 由此可知，准晶弹性的场变量和场方程超过经典弹性的场变量和场方程的一倍还多，并且与经典弹性不同，它在数学结构上已不再是对称的，而是非对称的，大大增加了数学求解的困难•

本课题组在准晶弹性边值问题的解析解或精确解(又称为古典解)的研究方面做出了许多努力，例如见文献[4]至文献[15]• 他们发展了经典弹性理论的方法论，即力图减少未知函数的个数，把数量庞大的准晶弹性方程组，化成一个或少数几个高阶偏微分方程，然后用数学物理或复变函数方法求解这些高阶偏微分方程的精确解• 此外，本文作者之一和他的学生也讨论过二维准晶弹性边值问题的弱解(或称为广义解)[4],[15-16]• 本文致力于三维准晶边值问题的弱解，全面讨论它的存在与唯一性•

1 准晶弹性理论的矩阵表示

准晶数学弹性力学基本方程为[4],[15],[17]

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+f_i=\rho\ddot{u}_i,\quad \dfrac{\partial H_{ij}}{\partial x_j}+g_i=\rho\ddot{w}_i, & (1)\\[2mm] \varepsilon_{ij}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),\quad w_{ij}=\dfrac{\partial w_i}{\partial x_j},\qquad x_i\in\Omega,\ i,j=1,2,3,\ t>0, & (2)\\[2mm] \sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}+R_{ijkl}w_{kl},\quad H_{ij}=K_{ijkl}w_{kl}+R_{klij}\varepsilon_{kl}, & (3)\end{cases}$$

其中 $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$ 表示声子场位移，$\boldsymbol{w}=(w_1,w_2,w_3)$ 表示相位子场位移，ε_{ij}、$w_{ij}(i,j=1,2,3)$ 分别表示声子场应变和相位子场应变，σ_{ij}、$H_{ij}(i,j=1,2,3)$ 分别表示声子场应力和相位场应力张量，C_{ijkl}、K_{ijkl}、$R_{ijkl}(i,j,k,l=1,2,3)$ 分别表示声子场弹性常数、相位子弹性常数、声子场－相位子场耦合弹性常数，f_i 和 g_i 分别表示体积力和广义体积力，ρ 表示质量密度，$\ddot{u}_i$ 表示 $\partial^2u_i/\partial t^2$，$\ddot{w}_i$ 表示 $\partial^2w_i/\partial t^2$•

用 $\partial\Omega=(\partial\Omega)_u+(\partial\Omega)_\sigma$ 表示准晶体所占区域的边界，边界条件为

$$\boldsymbol{x}\in(\partial\Omega)_u:\ u_i=u_i^0,\ w_i=w_i^0, \tag{4}$$

$$\boldsymbol{x}\in(\partial\Omega)_\sigma:\ \sigma_{ij}n_j=T_i,\ H_{ij}n_j=h_i, \tag{5}$$

其中 u_i^0 和 w_i^0 表示边界 $(\partial\Omega)_u$ 上的已知的函数，T_i 和 h_i 表示边界 $(\partial\Omega)_\sigma$ 上的已知的面力密度和广义面力密度，n_j 表示边界上任意一点的外法线方向单位矢量•

对于动力学问题还应满足初始条件：

$$u_i\mid_{t=0}=a_i(\boldsymbol{x}),\ w_i\mid_{t=0}=b_i(\boldsymbol{x}),\ \dot{u}_i\mid_{t=0}=c_i(\boldsymbol{x}),\ \dot{w}_i\mid_{t=0}=d_i(\boldsymbol{x}), \tag{6}$$

其中 a_i、b_i、c_i、d_i 是已知的函数，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3)\in\Omega$•

记

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm T}=(u_1\quad u_2\quad u_3\quad w_1\quad w_2\quad w_3)_{1\times6},$$

$$\boldsymbol{F}^{\mathrm T}=(f_i\quad g_i)_{1\times6}=(f_1\quad f_2\quad f_3\quad g_1\quad g_2\quad g_3)_{1\times6},$$

$$\begin{aligned}\sigma^{\mathrm T}=(&\sigma_{11}\quad\sigma_{22}\quad\sigma_{33}\quad\sigma_{12}\quad\sigma_{23}\quad\sigma_{31}\\ &H_{11}\quad H_{22}\quad H_{33}\quad H_{12}\quad H_{23}\quad H_{31}\quad H_{13}\quad H_{21}\quad H_{32})_{1\times15},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\mathrm T}=(&\varepsilon_{11}\quad\varepsilon_{22}\quad\varepsilon_{33}\quad2\varepsilon_{12}\quad2\varepsilon_{23}\quad2\varepsilon_{31}\\ &w_{11}\quad w_{22}\quad w_{33}\quad w_{12}\quad w_{23}\quad w_{31}\quad w_{13}\quad w_{21}\quad w_{32})_{1\times15},\end{aligned}$$

$$\tilde{\partial} = \begin{bmatrix} \tilde{\partial}^{(1)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{\partial}^{(2)} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\partial}^{(1)} = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_2 & \partial_1 & 0 \\ 0 & \partial_3 & \partial_2 \\ \partial_3 & 0 & \partial_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\partial}^{(2)} = \begin{bmatrix} \partial_1 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_2 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_3 \\ \partial_2 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_3 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_1 \\ \partial_3 & 0 & 0 \\ 0 & \partial_1 & 0 \\ 0 & 0 & \partial_2 \end{bmatrix}, \quad \partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i},$$

其中 $\boldsymbol{U}^{\mathrm{T}}$、$\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$、$\partial^{\mathrm{T}}$、$\sigma^{\mathrm{T}}$、$\varepsilon^{\mathrm{T}}$ 分别表示 $\boldsymbol{U}$、$\boldsymbol{F}$、∂、σ、ε 的转置, $\sigma^i = (\sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \sigma_{i3})$ 为矩阵$(\sigma_{ij})_{3\times3}$ 的第 i 行, $\boldsymbol{H}^i = (H_{i1}, H_{i2}, H_{i3})$ 为矩阵$(H_{ij})_{3\times3}$ 的第 i 行•

于是, (2) 式可以改写成矩阵的形式

$$\varepsilon = \partial \boldsymbol{U} \cdot \tag{2$'$}$$

注意到 $\left(\partial\sigma_{1j}/\partial x_j \quad \partial\sigma_{2j}/\partial x_j \quad \partial\sigma_{3j}/\partial x_j \quad \partial H_{1j}/\partial x_j \quad \partial H_{2j}/\partial x_j \quad \partial H_{3j}/\partial x_j\right)^{\mathrm{T}} = \partial^{\mathrm{T}}\sigma$,

(1) 式可以改写为

$$\partial^{\mathrm{T}}\sigma + \boldsymbol{F} = \rho\ddot{\boldsymbol{U}} \cdot \tag{1$'$}$$

记

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} & C_{11ij} & \\ & C_{22ij} & \\ & C_{33ij} & \\ \cdots & C_{12ij} & \cdots \\ & C_{23ij} & \\ & C_{31ij} & \end{bmatrix}_{6\times6} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1112} & C_{1123} & C_{1131} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2212} & C_{2223} & C_{2231} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3312} & C_{3323} & C_{3331} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1212} & C_{1223} & C_{1231} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2312} & C_{2323} & C_{2331} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3112} & C_{3123} & C_{3131} \end{bmatrix}_{6\times6},$$

$$\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} & & & & \cdots & & & & \\ K_{11ij} & K_{22ij} & K_{33ij} & K_{12ij} & K_{23ij} & K_{31ij} & K_{13ij} & K_{21ij} & K_{32ij} \\ & & & & \cdots & & & & \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}_{9\times9} =$$

$$\begin{bmatrix} K_{1111} & K_{1122} & K_{1133} & K_{1112} & K_{1123} & K_{1131} & K_{1113} & K_{1121} & K_{1132} \\ K_{2211} & K_{2222} & K_{2233} & K_{2212} & K_{2223} & K_{2231} & K_{2213} & K_{2221} & K_{2232} \\ K_{3311} & K_{3322} & K_{3333} & K_{3312} & K_{3323} & K_{3331} & K_{3313} & K_{3321} & K_{3332} \\ K_{1211} & K_{1222} & K_{1233} & K_{1212} & K_{1223} & K_{1231} & K_{1213} & K_{1221} & K_{1232} \\ K_{2311} & K_{2322} & K_{2333} & K_{2312} & K_{2323} & K_{2331} & K_{2313} & K_{2321} & K_{2332} \\ K_{3111} & K_{3122} & K_{3133} & K_{3112} & K_{3123} & K_{3131} & K_{3113} & K_{3121} & K_{3132} \\ K_{1311} & K_{1322} & K_{1333} & K_{1312} & K_{1323} & K_{1331} & K_{1313} & K_{1321} & K_{1332} \\ K_{2111} & K_{2122} & K_{2133} & K_{2112} & K_{2123} & K_{2131} & K_{2113} & K_{2121} & K_{2132} \\ K_{3211} & K_{3222} & K_{3233} & K_{3212} & K_{3223} & K_{3231} & K_{3213} & K_{3221} & K_{3232} \end{bmatrix}_{9\times9},$$

$$\boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} & & \cdots & & & \\ R_{11ij} & R_{22ij} & R_{33ij} & R_{12ij} & R_{23ij} & R_{31ij} \\ & & \cdots & & & \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}_{6\times9} =$$

$$
\begin{bmatrix}
R_{1111} & R_{1122} & R_{1133} & R_{1112} & R_{1123} & R_{1131} & R_{1113} & R_{1121} & R_{1132} \\
R_{2211} & R_{2222} & R_{2233} & R_{2212} & R_{2223} & R_{2231} & R_{2231} & R_{2221} & R_{2232} \\
R_{3311} & R_{3322} & R_{3333} & R_{3312} & R_{3323} & R_{3331} & R_{3313} & R_{3321} & R_{2232} \\
R_{1211} & R_{1222} & R_{1233} & R_{1212} & R_{1223} & R_{1231} & R_{1213} & R_{1221} & R_{1232} \\
R_{2311} & R_{2322} & R_{2333} & R_{2312} & R_{2323} & R_{2331} & R_{2313} & R_{2321} & R_{2332} \\
R_{3111} & R_{3122} & R_{3133} & R_{3112} & R_{3123} & R_{3131} & R_{3113} & R_{3121} & R_{3132}
\end{bmatrix}_{6\times 9},
$$

那么有 $\boldsymbol{D} = (d_{ij})_{15\times 15} = \left[\begin{array}{c|c} \boldsymbol{C} & \boldsymbol{R} \\ \hline \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{K} \end{array}\right]$,

这里 C 的下标ij 的顺序与声子场应变张量下标的顺序相同, K 和R 的下标ij 的顺序与相位子场应变张量下标的顺序相同, $\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的转置•

广义 Hooke 定律(3) 可以改写成

$$\sigma = \boldsymbol{D}\,\varepsilon \tag{3$'$}$$

(1)$'$ 和(2)$'$ 式可以化成下面的方程组

$$\partial^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\,\partial\,\boldsymbol{U} + \boldsymbol{F} = \rho\ddot{\boldsymbol{U}}• \tag{7}$$

记

$$
\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} a_1(\boldsymbol{x}) \\ a_2(\boldsymbol{x}) \\ a_3(\boldsymbol{x}) \\ b_1(\boldsymbol{x}) \\ b_2(\boldsymbol{x}) \\ b_3(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}_{6\times 1}, \quad
\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} c_1(\boldsymbol{x}) \\ c_2(\boldsymbol{x}) \\ c_3(\boldsymbol{x}) \\ d_1(\boldsymbol{x}) \\ d_2(\boldsymbol{x}) \\ d_3(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix}_{6\times 1}, \quad
\boldsymbol{U}^0 = \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \\ u_3^0 \\ w_1^0 \\ w_2^0 \\ w_3^0 \end{bmatrix}_{6\times 1}, \quad
\sigma^0 = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}_{6\times 1},
$$

$$
\tilde{\partial}_n = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{\partial}_n^{(1)} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{0} & \tilde{\partial}_n^{(2)} \end{array}\right], \quad
\tilde{\partial}_n^{(1)} = \begin{bmatrix}
\cos(n,x_1) & 0 & 0 \\
0 & \cos(n,x_2) & 0 \\
0 & 0 & \cos(n,x_3) \\
\cos(n,x_2) & \cos(n,x_1) & 0 \\
0 & \cos(n,x_3) & \cos(n,x_2) \\
\cos(n,x_3) & 0 & \cos(n,x_1)
\end{bmatrix},
$$

$$
\tilde{\partial}_n^{(2)} = \begin{bmatrix}
\cos(n,x_1) & 0 & 0 \\
0 & \cos(n,x_2) & 0 \\
0 & 0 & \cos(n,x_3) \\
\cos(n,x_2) & 0 & 0 \\
0 & \cos(n,x_3) & 0 \\
0 & 0 & \cos(n,x_1) \\
\cos(n,x_3) & 0 & 0 \\
0 & \cos(n,x_1) & 0 \\
0 & 0 & \cos(n,x_2)
\end{bmatrix},
$$

这里 $\tilde{\partial}_n$、$\tilde{\partial}_n^{(1)}$、$\tilde{\partial}_n^{(2)}$ 分别由微分算子阵 $\tilde{\partial}$、$\tilde{\partial}^{(1)}$、$\tilde{\partial}^{(2)}$ 把元素 ∂_i 换成 $\cos(n,x_i)$ 而得•

于是, 方程(4) 可以改写为

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t) = \boldsymbol{U}^0, \qquad \boldsymbol{x} \in (\partial\Omega)_u. \tag{4$'$}$$

注意到(5)式左端与(1)式左端第1项的相似性,(5)式可以改写成 $\tilde{\partial}_n^{\mathrm{T}}\sigma = \sigma^0$, $\boldsymbol{x} \in (\partial\Omega)_\sigma$, 再由(2)$'$式、(3)$'$式有

$$\tilde{\partial}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{D}\,\tilde{\partial}\,\boldsymbol{U} = \sigma^0, \qquad \boldsymbol{x} \in (\partial\Omega)_\sigma. \tag{5$'$}$$

若准晶处于静止平衡态: $\rho\ddot{\boldsymbol{U}} = 0$(惯性力为零), 这时题问不需要初始条件, 准晶弹性边值问题为

$$-\tilde{\partial}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\,\tilde{\partial}\,\boldsymbol{U} = \boldsymbol{F}, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega,\ t > 0, \tag{8}$$

$$\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t)\big|_{(\partial\Omega)_u} = \boldsymbol{U}^0,\ \ \tilde{\partial}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\,\tilde{\partial}\,\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, t)\big|_{(\partial\Omega)_\sigma} = \sigma^0, \tag{9}$$

其中 $\partial\Omega = (\partial\Omega)_u + (\partial\Omega)_\sigma$.

2 准晶弹性理论边值问题的弱解

为简单起见, 下面仅考虑准晶弹性位移边值问题. 设 $\boldsymbol{F} \in (L_2(\Omega))^6$, 若 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) \in (C^2(\Omega))^6$ 是(8)式、(9)式的解, 则对任意的向量函数

$$\eta = \begin{bmatrix} \eta^1_{3\times 1} \\ \eta^2_{3\times 1} \end{bmatrix} = [\eta^1_1 \quad \eta^1_2 \quad \eta^1_3 \quad \eta^2_1 \quad \eta^2_2 \quad \eta^2_3]^{\mathrm{T}}_{1\times 6} \in (C_0^\infty(\Omega))^6,$$

用 η 点乘(8)式的两边, 并沿 Ω 积分, 我们有

$$\iiint_\Omega (-\tilde{\partial}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\,\tilde{\partial}\,\boldsymbol{U})\cdot \eta\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \iiint_\Omega \boldsymbol{F}\cdot\eta\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{10}$$

由(3)式和文献[4]、文献[15]和文献[17]知 $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, 利用 Gauss 公式和(2)$'$式、(3)$'$式, 我们有

$$\begin{aligned}
&\iiint_\Omega (-\tilde{\partial}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\,\tilde{\partial}\,\boldsymbol{U})\cdot\eta\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\iiint_\Omega \left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\eta^1_i + \frac{\partial H_{ij}}{\partial x_j}\eta^2_i\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\
&\quad -\iiint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}\eta^1_i + H_{ij}\eta^2_i) - \left(\sigma_{ij}\frac{\partial\eta^1_i}{\partial x_j} + H_{ij}\frac{\partial\eta^2_i}{\partial x_j}\right)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\
&\quad -\iint_{\partial\Omega}(\sigma_{ij}\eta^1_i + H_{ij}\eta^2_i)\,n_j\,\mathrm{d}S + \iiint_\Omega \left(\sigma_{ij}\frac{\partial\eta^1_i}{\partial x_j} + H_{ij}\frac{\partial\eta^2_i}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\
&\quad \iiint_\Omega \left(\frac{1}{2}\sigma_{ij}\frac{\partial\eta^1_i}{\partial x_j} + \frac{1}{2}\sigma_{ij}\frac{\partial\eta^1_j}{\partial x_i} + H_{ij}\frac{\partial\eta^2_i}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\
&\quad \iiint_\Omega [\sigma_{ij}(\boldsymbol{U})\varepsilon_{ij}(\eta^1) + H_{ij}(\boldsymbol{U})w_{ij}(\eta^2)]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\
&\quad \iiint_\Omega \sigma(\boldsymbol{U})\cdot\varepsilon(\eta)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \iiint_\Omega (\tilde{\partial}\,\eta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\,\tilde{\partial}\,\boldsymbol{U}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}.
\end{aligned} \tag{11}$$

由(10)式、(11)式我们有

$$\iiint_\Omega (\tilde{\partial}\,\eta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\,\tilde{\partial}\,\boldsymbol{U}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \iiint_\Omega \sigma\boldsymbol{U}\cdot\varepsilon(\eta)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \iiint_\Omega \boldsymbol{F}\cdot\eta\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}. \tag{12}$$

由于 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $H_0^1(\Omega)$ 中稠密, 故(12)式对 $\forall\,\eta(\boldsymbol{x}) \in (H_0^1(\Omega))^6$ 亦成立.

反过来, 若 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) \in (C^2(\Omega))^6$, 且(12)式成立, 对 $\forall\,\eta(\boldsymbol{x}) \in (H_0^1(\Omega))^6$, 我们将上述推导过程反推回去, 由变分法基本引理[18]立即得到(10)式. 所以, 我们有

定义 设 $\boldsymbol{F} \in (L_2(\Omega))^6$, 若 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) \in (H_0^1(\Omega))^6$, 且对 $\forall\,\eta(\boldsymbol{x}) \in (H_0^1(\Omega))^6$, (12)式成立, 则称 $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})$ 是位移边值问题

$$\begin{cases} -\tilde{\partial}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\,\tilde{\partial}\,\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), & (8) \\ \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})\big|_{\partial\Omega} = 0 & (9)' \end{cases}$$

的广义解•

3　解的存在唯一性

用$(\cdot,\cdot)$表示$L_2(\Omega)$中的内积, 相应的范数为$\|\cdot\|$: $\|v\|=\left(\int_\Omega v^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}$, 对标量函数$v\in L_2(\Omega)$• 用$(\cdot,\cdot)$表示$H_0^1(\Omega)$中的内积, 相应的范数为$\|\cdot\|_1$: $\|v\|_1=\left[\int_\Omega v^2\mathrm{d}x+\sum_{k=1}^{3}\int_\Omega\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2\mathrm{d}x\right]^{1/2}$, 半范数为$|\cdot|_1$: $|v|_1=\left[\sum_{k=1}^{3}\int_\Omega\left(\frac{\partial v}{\partial x_k}\right)^2\mathrm{d}x\right]^{1/2}$, 对标量函数$v\in L_2(\Omega)$•

注 1　模$\|\cdot\|_1$与半模$|\cdot|_1$等价•

注 2　向量函数$\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\in(H_0^1(\Omega))^n$(有时也简记为$H_0^1(\Omega)$)的范数、半范数也分别记为$\|\cdot\|_1$和$|\cdot|_1$:

$$\|\boldsymbol{v}\|_1^2=\sum_{i=1}^{n}\|v_i\|_1^2=\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega v_i^2\mathrm{d}x+\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{3}\int_\Omega\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)^2\mathrm{d}x=\int_\Omega|\boldsymbol{v}|^2\mathrm{d}x+\int_\Omega|\boldsymbol{v}_x|^2\mathrm{d}x,$$

$$|\boldsymbol{v}|_1^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{3}\int_\Omega\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)^2\mathrm{d}x,$$

其中　$|\boldsymbol{v}|^2=\sum_{i=1}^{n}v_i^2,\ |\boldsymbol{v}_x|^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)^2,\ \frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_k}=\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_k},\frac{\partial v_2}{\partial x_k},\cdots,\frac{\partial v_n}{\partial x_k}\right)$•

显然, 注 1 对向量函数也成立•

引理(Korn 不等式[19-20])　设Ω是R^n中的有界域, 其边界$\partial\Omega$充分光滑, 对$\forall\boldsymbol{v}=(v_1,v_2,\cdots,v_n)\in H_0^1(\Omega)$有

$$\sum_{i,k=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}x\geqslant c_1\|\boldsymbol{v}\|_1^2,$$

其中正常数c_1仅与Ω有关•

由上面注 2 有

$$\sum_{i,k=1}^{3}\int_\Omega\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)^2\mathrm{d}x\geqslant c_2\sum_{i,k=1}^{3}\int_\Omega\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)^2\mathrm{d}x,$$

其中正数c_2与Ω有关•

定理　设Ω是R^3中的有界域, 其边界$\partial\Omega$充分光滑• 若实对称矩阵$\boldsymbol{D}=(d_{ij})_{15\times15}$满足不等式

$$\lambda_1\sum_{i=1}^{15}\xi_i^2\leqslant\sum_{i,j=1}^{15}\xi_i d_{ij}\xi_j\leqslant\lambda_2\sum_{i=1}^{15}\xi_i^2,$$

其中λ_1、λ_2是正的常数, 则对任意的$\boldsymbol{F}\in(L_2(\Omega))^6$, 位移边值问题(8)式、(9)$'$, 存在唯一的广义解•

证明　记$\lceil\boldsymbol{U},\eta\rfloor=\iiint_\Omega(\partial\eta)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\partial\boldsymbol{U}\mathrm{d}\boldsymbol{x}$, 则(12)式改写为

$$\lceil\boldsymbol{U},\eta\rfloor=(\boldsymbol{F},\eta),\qquad\forall\eta\in(H_0^1(\Omega))^6• \tag{13}$$

首先证明$\lceil\cdot,\cdot\rfloor$是$(H_0^1(\Omega))^6$上的新内积• 为此只须证: $\lceil\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}\rfloor\geqslant0$, 且$\lceil\boldsymbol{U},\boldsymbol{U}\rfloor=0\Leftrightarrow\boldsymbol{U}=\boldsymbol{0}$, 对$\forall\boldsymbol{U}\in(H_0^1(\Omega))^6$•

下面给出定理证明的梗概(细节这里略去, 由于公式(13)中的$\lceil\boldsymbol{U},\eta\rfloor$是$H_0^1(\Omega)$上的正定

双线性形式, 由著名的 Lax-Milgram 定理[21] 可以做出相应的证明)．

由假设知, 矩阵 $\boldsymbol{D}$ 正定, 故 $\boldsymbol{D}$ 与单位阵 $\boldsymbol{I}$ 合同, 即存在可逆矩阵(注意: 这里的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 与第 951 页的 $\boldsymbol{C}$ 意义不同) $\boldsymbol{C}$, 使得 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}$． 则有

$$\langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}\rangle = \iiint_\Omega (\tilde{\partial}\boldsymbol{U})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\tilde{\partial}\boldsymbol{U}\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \iiint_\Omega (\tilde{\partial}\boldsymbol{U})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C})\tilde{\partial}\boldsymbol{U}\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \iiint_\Omega (\boldsymbol{C}\tilde{\partial}\boldsymbol{U})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\tilde{\partial}\boldsymbol{U})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0};$$

$$\langle \boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}\rangle = 0 \Leftrightarrow \iiint_\Omega (\boldsymbol{C}\tilde{\partial}\boldsymbol{U})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{C}\tilde{\partial}\boldsymbol{U})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{C}\tilde{\partial}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{0}.$$

又因为 $\boldsymbol{C}$ 是可逆的, 所以有 $\tilde{\partial}\boldsymbol{U}=0$, 即

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0,\quad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} = 0\ (i \neq j),\quad \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = 0 \qquad i, j = 1, 2, 3.$$

于是, 由 $\partial w_i/\partial x_j=0$ 知 w_i 为常数, 再由 $\boldsymbol{U}|_{\partial\Omega}=\boldsymbol{0}$, 在边界上我们有 $w_i=0$． 类似地我们可以得到, 在边界上 $u_i=0$． 因此我们得到在边界上 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{0}$．

这样我们证明了 $\langle\cdot, \cdot\rangle$ 是 $(H_0^1(\Omega))^6$ 上的新内积, 相应的范数为 $\|\boldsymbol{U}\|_{(1)}=\langle\boldsymbol{U}, \boldsymbol{U}\rangle^{1/2}$．

其次, 下面我们证明 $(H_0^1(\Omega))^6$ 上的新范数 $\|\cdot\|_{(1)}$ 与初始范数 $\|\cdot\|_1$ 等价． 由 Cauchy 不等式, 定理的假定及注 1 有

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{U}\|_{(1)}^2 &= \iiint_\Omega \sum_{i,j=1}^{15}(\tilde{\partial}\boldsymbol{U})_i d_{ij}(\tilde{\partial}\boldsymbol{U})_j\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \lambda_2\iiint_\Omega (\tilde{\partial}\boldsymbol{U})^{\mathrm{T}}(\tilde{\partial}\boldsymbol{U})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\
&\lambda_2\iiint_\Omega\left[\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i}\right)^2\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \\
&\lambda_2\iiint_\Omega\left\{\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2+\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2\right] + \sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right)^2\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \\
&2\lambda_2\iiint_\Omega\sum_{i,j=1}^{3}\left[\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2+\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right)^2\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\
&2\lambda_2|\boldsymbol{U}|_1^2 \leqslant 2c\|\boldsymbol{U}\|_1^2.
\end{aligned}$$

另一方面, 由定理假定、注 1 和 Korn 不等式有

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{U}\|_{(1)}^2 &= \iiint_\Omega \sum_{i,j=1}^{15}(\tilde{\partial}\boldsymbol{U})_i d_{ij}(\tilde{\partial}\boldsymbol{U})_j\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant \lambda_1\iiint_\Omega (\tilde{\partial}\boldsymbol{U})^{\mathrm{T}}(\tilde{\partial}\boldsymbol{U})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\
&\lambda_1\iiint_\Omega\left[\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right)^2\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\
&\lambda_1\iiint_\Omega\left[\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)^2 + \sum_{i,j=1}^{3}\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right)^2\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant \\
&\frac{1}{4}\lambda_1 c_2\iiint_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \lambda_1\sum_{i,j=1}^{3}\iiint_\Omega\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_j}\right)^2\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant \\
&\min\left\{\frac{1}{4}\lambda_1 c_2, \lambda_1\right\}|\boldsymbol{U}|_1^2 \geqslant c\|\boldsymbol{U}\|_1^2.
\end{aligned}$$

这样, 我们证明了 $\|\cdot\|_{(1)}$ 与初始范数 $\|\cdot\|_1$ 等价性．

最后, 对 $\boldsymbol{F}\in(L_2(\Omega))^6$, 利用 Schwarz 不等式及嵌入 $H_0^2(\Omega)\hookrightarrow L_2(\Omega)$ 是紧嵌入, 我们有

$$\left|\iiint_{\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\eta\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right| \leqslant \|\boldsymbol{F}\|\cdot\|\eta\| \leqslant M\|\boldsymbol{F}\|\cdot\|\eta\|_1 \leqslant M_1\|\boldsymbol{F}\|\cdot\|\eta\|_1,$$
$$\forall\eta\in(H_0^1(\Omega))^6,$$

即 $\eta\mapsto\iiint_{\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\eta\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ ($\forall\eta\in(H_0^1(\Omega))^6$ 是$(H_0^1(\Omega))^6$ 上的一个连续线性泛函•

因此, 由 Riesz 定理, 存在唯一的 $\boldsymbol{y_F}\in(H_0^1(\Omega))^6$, 使得

$$\iiint_{\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\eta\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \langle\boldsymbol{y_F},\eta\rangle, \qquad \forall\eta\in(H_0^1(\Omega))^6\cdot$$

于是, (13) 式改写为

$$\langle\boldsymbol{U},\eta\rangle = \langle\boldsymbol{y_F},\eta\rangle, \qquad \forall\eta\in(H_0^1(\Omega))^6,$$

这表明 $\boldsymbol{U}=\boldsymbol{y_F}$ 是位移边值问题(8)、边值问题(9)′唯一的广义解•

4 结论与讨论

在证明准晶弹性边值问题解的存在性时 Korn 不等式仍是关键(若对应力边值问题, 证明中要用到第二 Korn 不等式)•

本文是经典弹性理论边值问题解的存在性理论(见文献[19]和文献[20]) 的发展, 也是本小组关于二维准晶弹性边值问题弱解理论(见文献[4]、文献[15] 和文献[16]) 的发展•

本文的工作不仅对三维而且对一维、二维准晶弹性都是成立的(只需把矩阵的元素换一下即可)• 本文的结果提供了准晶弹性边值问题的数值解的一个理论基础, 这里的矩阵表示不仅使我们的叙述简化, 并且为弱解的数值实现给出了直接的用处• 此项研究的目的在于创立三维准晶弹性有限元分析的基础, 我们此前的工作已经给出了二维准晶弹性有限元的计算模式、计算机实现和若干数值结果, 表明它是有效的[4],[15-16]•

关于三维准晶弹性应力边值和混合边值问题广义解的理论在我们后续工作中报导•

致谢 此工作是在国家自然科学基金的资助下完成的(资助号为 10372016, 10672022)• 衷心地感谢叶开沅老师的推荐•

[参 考 文 献]

[1] Shechtman D, Blech I, Gratias D, et al. Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry[J]. Phys Rev Lett, 1984, **53**(20): 1951-1953.

[2] Penrose H. The role of arethtics in pure and applied mathematical research[J]. Bull Inst Math Appl, 1974, **10**(3): 266-271.

[3] Radin C. Quasicrystals and geometry[J]. Notices of the American Mathematical Society, 1996, **43**(4): 416-419.

[4] Fan T Y, Mai Y W. Elasticity theory, fracture mechanics and some relevant thermal properties of quasicrystalline materials[J]. Appl Mech Rev, ASME, 2004, **57**(5): 325-344.

[5] Li X F, Fan T Y. New method for solving elasticity problems of some planar quasicrystals and solutions[J]. Chinese Phys Lett, 1998, **15**(4): 278-280.

[6] Li X F, Fan T Y, Sun Y F. A decagonal quasicrystal with a Griffith crack[J]. Philos Mag A, 1999, **79**(8): 1943-1952.

[7] Fan T Y, Li X F, Sun Y F. Moving screw dislocation in a one-dimensional hexagonal quasicrystal[J]. Chin Phys, 1999, **8**(4): 288-295.

[8] Fan T Y. A study on specific heat of one-dimensional hexagonal quasicrystals[J]. J Phys Condens Matter, 1999, **11**(45): L513-517.

[9] Liu G T, Fan T Y. Complex method of the plane elasticity in 2D quasicrystals with point group 10 mm ten-fold symmetry and notch problems[J]. Sci China, Ser E, 2003, **46**(3): 326-336.

[10] Fan T Y, Guo L H. Final governing equation of plane elasticity of icosahedral quasicrystals[J]. Phys Lett A, 2005, **341**(4): 235-239.

[11] Li L H, Fan T Y. Final governing equation of plane elasticity of icosahedral quasicrystals and general solution based on stress potential function[J]. Chinese Phys Lett, 2006, **23**(9): 2519-2521.

[12] Li L H, Fan T Y. Stress potential function formulation and complex variable function method for solving elasticity of quasicrystals of point group 10 and exact solution for notch problem[J]. J Phys Condens Matter, 2006, **18**(47): 10631-10641.

[13] Zhu A Y, Fan T Y. Elastic field of mode II crack in an icosahedral quasicrystal[J]. Chin Phys, 2007, **16**(4): 1111-1118.

[14] Zhu Ai Y, Fan T Y, Guo L H. Elastic field for a dislocation in an icosahedral quasicrystal[J]. J Phys Condens Matter, 2007, **19**(19): 236212.

[15] 范天佑. 准晶数学弹性理论及应用[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 1999.

[16] 吴祥法. 准晶弹性的数学模拟和数值分析[D]. 博士学位论文. 北京: 北京理工大学, 1998.

[17] Ding D H, Yang W G, Wang R H, et al. Generalized elasticity theory of quasicrystals[J]. Phys Rev B, 1993, **48**(10): 7003-7010.

[18] Courant R, Hilbert D. Methods of Mathematical Physics[M]. New York: Interscience Publisher Inc, 1955.

[19] º¼¶Â± . ¶ÀÂ¶¾Í ÅË¶ÃÄ³À³ ±¿ºÑ Ä¶ÀÂºº ÁÂÅ´ÀÄº[M]. ÀÃ¼³ ±: ºÂ, 1974.

[20] À¿µÂ±ÄÎ³ , ½¶»¿º¼ . Â±¶³Í¶ ±µ±Éº µ½Ñ ºÃÄ¶¾Í ¶ÀÂºº ÁÂÅ´ÀÄº ³ ¶À´Â±¿ºÉ¶¿¿ÍÇ ²½±ÃÄÑÇ, ¶Â±³¶¿ÃÄ³± ÀÂ¿±[M]. ÀÃ¼³ ± , 1988.

[21] Oden J J, Reddy J N. An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Element[M]. New York: John Wiley & Sons, 1976.

Solvability on Boundary-Value Problems of Elasyicity of Three-Dimensional Quasicrystals

GUO Li-hui, FAN Tian-you

(School of Science, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, P. R. China)

Abstract: Weak solution(or generalized solution) for the boundary-value problems of partial differential equations of elasticity of 3D(three-dimensional) quasicrystals was given, in which the matrix expression was used. In terms of Korn inequality and theory of function space, the uniqueness of the weak solution was proved. This gives an extension of existence theorem of solution for classical elasticity to that of quasicrystals, and develops the weak solution theory of elasticity of 2D quasicrystals.

Key words: quasicrystal; elasticity; boundary-value problem; weak solution; solvability