

改进的无奇异局部边界积分方程方法^{*}

付东杰, 陈海波, 张培强

(中国科学技术大学 力学和机械工程系; 中科院材料力学行为和设计重点实验室, 合肥 230026)

(叶庆凯推荐)

摘要: 在局部边界积分方程方法中, 当源节点位于分析域的整体边界上时, 局部边界积分将出现奇异积分问题, 这些奇异积分需要做特别的处理。为此, 提出了对域内节点采用局部积分方程, 而对边界节点直接采用移动最小二乘近似函数引入边界条件来解决奇异积分问题, 这同时也解决了对积分边界进行插值引入近似误差的问题。作为应用和数值实验, 对 Laplace 方程和 Helmholtz 方程问题进行了分析, 取得了很好的数值结果。进而, 在 Helmholtz 方程求解中, 采用了含波解信息的修正基函数来代替单项式基函数进行近似。数值结果显示, 这样处理是简单高效的, 在高波数声传播问题的求解中非常具有前景。

关键词: 无网格方法; 移动最小二乘近似; 局部边界积分方程方法; 奇异积分
中图分类号: O302 **文献标识码:** A

引 言

无网格方法是近十余年来受到计算力学界重视和发展的一种新兴的数值方法。采用不同于有限元等方法基于网格的近似方式, 把近似函数建立在一系列离散分布的点之上, 因此摆脱了对网格依赖的局限, 对如裂纹扩展、大变形、冲击等具有动态调整节点、网格畸变等特征的一些特定问题特别适用。到目前, 根据其近似方式和微分方程的等效形式的不同进行分类, 已经发展出了三十余种无网格方案, Fries 和 Matthies^[1] 及张雄和刘岩^[2] 对当前主要的无网格方法做了很好的总结和介绍。

局部边界积分方程方法 (local boundary integral equation method, LBIEM) 将移动最小二乘近似 (moving least square approximation, MLSA) 与局部边界积分方程相结合, 由 Zhu 等人^[3] 于 1998 年提出, 其中局部子域、紧支集等概念定义见图 1。由于 LBIEM 基于局部弱形式, 同时其测试函数 (test function) 源自边界元的基本解, 因此边界积分只需要在局部子域边界上进行, 而出现的体积分也只需要在局部子域上进行, 不再需要背景网格的积分, 是一种“纯”无网格方法。LBIEM 到目前已经成功地用于热传导、弹性力学、弹性动力学和板弯曲等问题^[4-6], 并在求解非均质问题^[7] 和非线性问题^[8] 中展现出了优势。

然而, 由于基本解的采用, 当源节点位于整体边界, 或者说积分局部边界属于整体边界一

* 收稿日期: 2006-12-06; 修订日期: 2007-03-06

作者简介: 付东杰 (1977—), 河北人, 博士生 (E-mail: djfu@mail.ustc.edu.cn);
陈海波 (1968—), 教授, 博士生导师 (联系人, Tel: + 86-551-3603724; Fax: + 86-551-3606459;
E-mail: hbchen@ustc.edu.cn)。

部分时,将会出现弱奇异、强奇异甚至超奇异积分问题。对于弱奇异,可以采用对数积分公式以达到足够的计算精度,而对强奇异和超奇异积分,则需要特别的处理。这也是传统边界元方法研究的一个热点问题,并已提出了多种解决方案,如正则化方法^[9-10]等。对于 LBIEM,一般可以考虑借鉴对传统边界元奇异积分的处理,但从目前发表的文献上看,这方面的工作有待进一步展开。Sladek 等人^[11]采用对 Cauchy 主值积分的直接极限逼近和积分变量的优化变换来处理强奇异积分,郭晓峰等人^[12]则采用了传统边界元中的正则化方法。本文提出对域内节点采用积分方程;对于边界节点,以直接采用 MLSA 近似函数来取代局部边界积分方程,这同时也方便了边界条件的施加,避免了边界近似的复杂处理以及引入的误差。该处理方法在求解 Laplace 方程和 Helmholtz 方程中都取得了很好的数值精度。特别地,对控制声波传播的 Helmholtz 方程,其解具有震荡特性;由于在 MLSA 中很容易采用特殊形式的基函数,因此可以采用含调和波解信息的与频率相关的修正基函数,这种处理特别适合求解高波数情况。

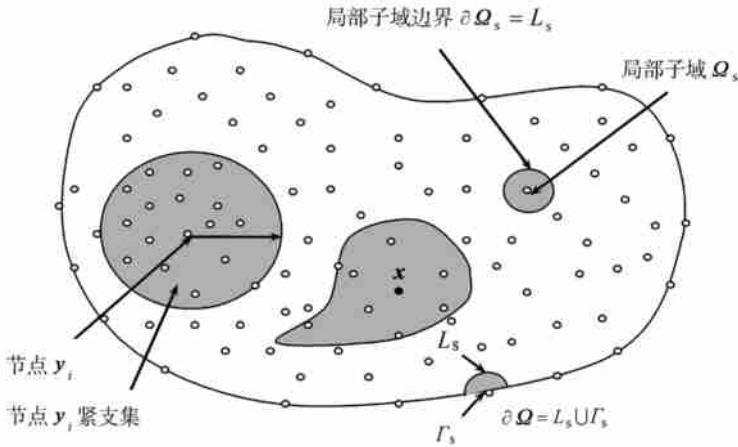


图1 局部子域,局部子域边界,紧支集等定义

1 移动最小二乘近似(MLSA)

对一点 x , 采用 MLSA 的近似函数定义为:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^m p_i(x) \cdot a_i(x) = \mathbf{p}^T(x) \cdot \mathbf{a}(x), \quad x \in \Omega_s, \quad (1)$$

这里 $\mathbf{p}^T(x) = [p_1(x), p_2(x), \dots, p_m(x)]$ 是完整到 m 阶的单项式基函数, $a_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 是相应的系数矢量。对二维问题,通常线性基函数的形式为: $\mathbf{p}^T(x) = (1, x_1, x_2)$ 。求解 Helmholtz 方程控制下的波传播问题中,根据 MLSA 的特殊优势,我们可以非常方便地选取其它形式的基函数来近似含有震荡形式的位势场,如含波解信息的基函数形式:对于二维问题,可将基函数修正为 $\mathbf{p}^T(x) = \left\{ 1, \cos(\kappa x_1 \cos \beta + \kappa x_2 \sin \beta), \sin(\kappa x_1 \cos \beta + \kappa x_2 \sin \beta), \cos(-\kappa x_1 \sin \beta + \kappa x_2 \cos \beta), \sin(-\kappa x_1 \sin \beta + \kappa x_2 \cos \beta) \right\}$, 其中 κ 为波数, β 为平面谐波传播的方向角。

加权离散误差的 L_2 范数为

$$J(x) = \sum_{i=1}^n w_i(x) [\mathbf{p}^T(x_i) \mathbf{a}(x) - \hat{u}_i]^2 = (\mathbf{P}\mathbf{a} - \hat{\mathbf{u}})^T \mathbf{W}(x) (\mathbf{P}\mathbf{a} - \hat{\mathbf{u}}), \quad (2)$$

其中 $w_i(x)$ 是具有紧支特性的节点 i 权函数,本文采用 Gauss 权函数,见文献[3]; x_i 为点 x 的紧支域内的节点, $\hat{u}_i(x_i)$ 是节点 x_i 处的名义位势值, n 为 x 的紧支域内的节点数。

为了得到 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, 对式(2) 取极值, 即得

$$\frac{\partial I}{\partial \mathbf{a}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}} = 0, \quad (3)$$

即

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}}, \quad (4)$$

其中

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{P} = \sum_{i=1}^m w_i(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i), \quad (5a)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T \mathbf{W}(\mathbf{x}) = [w_1(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_1), w_2(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_2), \dots, w_n(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_n)]^T. \quad (5b)$$

由式(4) 可得 $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, 回代到式(1), 可以得到近似函数 $u^h(\mathbf{x})$ 的表达式为

$$u^h(\mathbf{x}) = \Phi^T(\mathbf{x}) \hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \Phi_i(\mathbf{x}) \hat{u}_i, \quad u^h(\mathbf{x}_i) = u_i \neq \hat{u}_i, \quad (6)$$

其中 $\Phi^T(\mathbf{x})$ 为近似函数矩阵

$$\Phi^T(\mathbf{x}) = [\Phi_1(\mathbf{x}), \Phi_2(\mathbf{x}), \dots, \Phi_n(\mathbf{x})] = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad (7)$$

2 局部边界积分方程

Laplace 方程的位势边值问题描述如下

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u = \bar{u}, & \Gamma_u \text{ 上}, \\ q \equiv \partial u / \partial n = \bar{q}, & \Gamma_q \text{ 上}. \end{cases} \quad (8)$$

以基本解 u^* 为权, 通过加权余量法和分部积分可以得到对域内节点的局部积分方程

$$u(\mathbf{y}) = \int_{\partial \Omega} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma - \int_{\partial \Omega} u(\mathbf{x}) \frac{\partial u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} d\Gamma. \quad (9)$$

对边界节点, 可得局部边界积分方程

$$\alpha(\mathbf{y}) u(\mathbf{y}) = \int_{\partial \Omega} u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma - \int_{\partial \Omega} u(\mathbf{x}) \frac{\partial u^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} d\Gamma, \quad (10)$$

其中 $\alpha(\mathbf{y})$ 是与 \mathbf{y} 节点处边界几何形状有关的一个常数, 在二维问题中有

$$\alpha(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1/2, & \mathbf{y} \in \text{光滑边界点}, \\ \theta/2\pi, & \mathbf{y} \in \text{角点}. \end{cases} \quad (11)$$

引入伴随解 u' , 即可得到修正的测试函数为

$$u^{**} = u^* - u' = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_0} = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_0}{r}. \quad (12)$$

用 u^{**} 代替原先的基本解 u^* 或以之为加权余量法的权, 方程(9) 和方程(10) 可进一步变为

$$u(\mathbf{y}) = - \int_{\partial \Omega_s} \frac{\partial u^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} u(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (13)$$

和

$$\alpha(\mathbf{y}) u(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma_s} u^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma - \int_{L_s + \Gamma_s} \frac{\partial u^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} u(\mathbf{x}) d\Gamma. \quad (14)$$

方程(13) 和方程(14) 即为 LBIEM 求解 Laplace 方程问题所采用的局部边界积分方程。

Helmholtz 方程边值问题可以当成关于一个 Helmholtz 型的位势边值问题来描述, 即

$$\begin{cases} \nabla^2 u(\mathbf{x}) + \kappa^2 u(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ u = \bar{u}, & \Gamma_u \text{ 上}, \\ q \equiv \partial u / \partial n = \bar{q}, & \Gamma_q \text{ 上}, \end{cases} \quad (15)$$

其中 κ 为波数。与 Laplace 方程类似可以得到:

对 y 属于域内节点, 有

$$u(y) = - \int_{\partial \Omega_s} \frac{\partial u^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} u(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Omega_s} u^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \kappa^2 u(\mathbf{x}) d\Omega; \quad (16)$$

对 y 属于边界节点, 有

$$\alpha(y) u(y) = \int_{\Gamma_s} u^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma - \int_{L_s + \Gamma_s} \frac{\partial u^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n} u(\mathbf{x}) d\Gamma + \int_{\Omega_s} u^{**}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \kappa^2 u(\mathbf{x}) d\Omega. \quad (17)$$

方程(16)和方程(17)即为 LBIEM 求解 Helmholtz 方程问题所采用的局部边界积分方程。

显然, 对方程(13)和方程(16), 不存在奇异积分问题; 而对于局部边界积分方程(14)和方程(17), 则存在强奇异积分, 如果不进行处理, 将影响到数值结果的精度。在这里我们采用(6)式来代替(14)式和(17)式, 使之在边界节点上成立, 也就是联立(6)式和(13)式来求解 Laplace 方程, 联立(6)式和(16)式来求解 Helmholtz 方程。

3 数值实验

如图 2 所示四分之一椭圆域问题, 共分布 44 个节点, 其中两直边位势已知, 而椭圆边的通量已知。显然, 奇异积分将发生在椭圆边界上。局部子域半径取 0.005, 影响域半径均为 2.0。定义节点 i 的相对误差为

$$\xi_i = \frac{|u_i^{(\text{exact})} - u_i^{(\text{num})}|}{\left(\sum_{k=1}^n |u_k^{(\text{exact})}| \right) / n} \times 100\%, \quad (19)$$

其中 exact 表示精确解, 而 num 表示数值解。得到的结果图中, L 和 M 分别代表采用线性基和修正基得到的解。

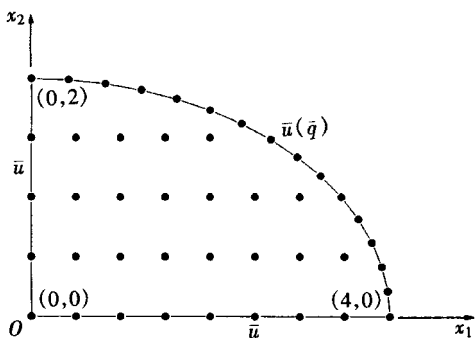


图 2 四分之一椭圆域, 分布 44 个节点

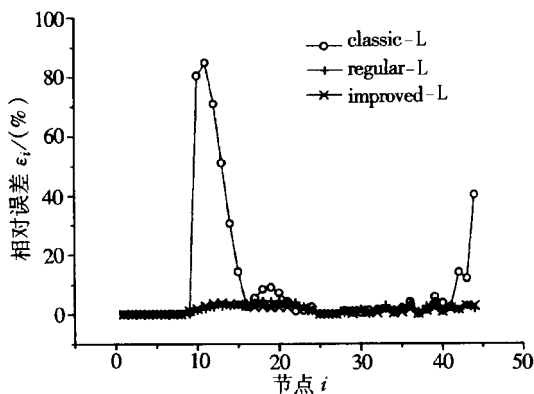


图 3 Laplace 问题中传统的 LBIEM、正则的 LBIEM 和改进的 LBIEM 数值对比

3.1 Laplace 方程问题

取精确解 $u = -(x_1)^3 - (x_2)^3 + 3(x_1)^2x_2 + 3x_1(x_2)^2$, 则传统的(classic)^[3]、正则化处理方法的(regular)^[12]以及本文的改进处理方法的(improved) LBIEM 的求解相对误差, 如图 3 所示。

由图 3 可以看到, 强奇异积分在很大程度上影响了传统的 LBIEM 求解精度, 正则化的 LBIEM 和改进的 LBIEM 都较好地处理了强奇异积分问题。

3.2 Helmholtz 方程问题

取精确解 $u = \cos(\kappa_1 \cos \alpha + \kappa_2 \sin \alpha)$, 其中波数 $\kappa = 0.5$, 传播方向角 $\alpha = 45^\circ$, 则传统的(classic)^[3]以及本文的改进的(improved) LBIEM 的求解相对误差的对比结果显示于图 4。由图 4 可见, regular 和 improved 解的误差基本重合, 它们都明显小于 classic 解的误差。

值得注意的是, 当波数增加的时候, 位势变化也同时加大, 因此对边界进行近似的时候, 所引入的误差也加大。本文引入的方法采用 MLSA 直接对边界进行近似, 避免了边界节点子域及其边界的积分, 降低了近似误差, 从而获得更好的数值精度。选择波数为 3.0 的情况, 如图 5 所示, 本文提出的改进处理方法的(improved) 求解误差比正则化处理方法的(regular) 要小得多, 除去个别点有小幅的反向误差。

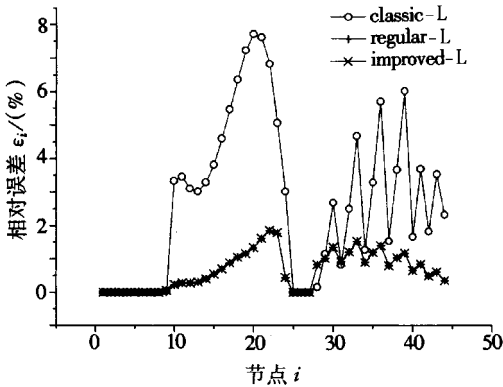


图 4 波数为 0.5 的 Helmholtz 问题中传统的 LBIEM、正则化的 LBIEM 和改进的 LBIEM 数值对比

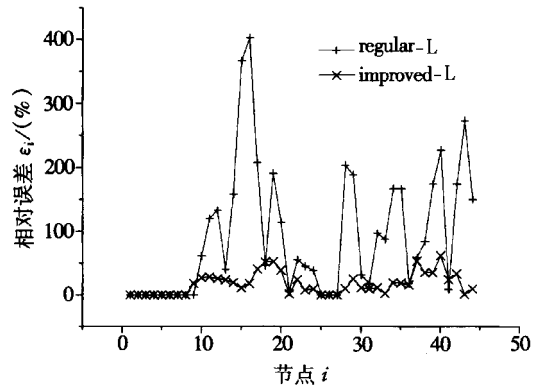


图 5 波数为 3.0 的 Helmholtz 问题中正则化的 LBIEM 和改进的 LBIEM 数值对比

需要特别指出的是, 当波数为 3.0 的时候, 位势场变化已经十分剧烈, 采用 44 个节点和线性基近似显然存在很大的近似误差, 这里图 5 所要说明的是本文提出的改进的无奇异 LBIEM 不需要进行边界节点的积分计算, 比正则的 LBIEM 具有更高的数值精度。

进而, 采用修正基函数比单项式基函数具有更好的近似性质, 通过文献[13]中的分析和数值结果显示, 即使在高波数情况下, 采用修正基本函数依然具有很高的数值精度以及收敛性。在改进的 LBIEM 方法中, 采用修正基函数在高波数情况下同样具有很高的数值精度和收敛性, 如图 6 所示。这里还将采用修正基函数的正则化 LBIEM 和改进 LBIEM 解进行对比, 如图 7 所示, 发现它们的数值精度相近, 误差都非常小。

4 结 论

通过分析以及求解 Laplace 方程和 Helmholtz 方程问题的数值实验, 我们可以得出如下结论:

1. 本文提出的改进的无奇异 LBIEM 在求解 Laplace 和 Helmholtz 边值问题中, 能够克服奇异积分的影响, 取得了很好的数值效果。

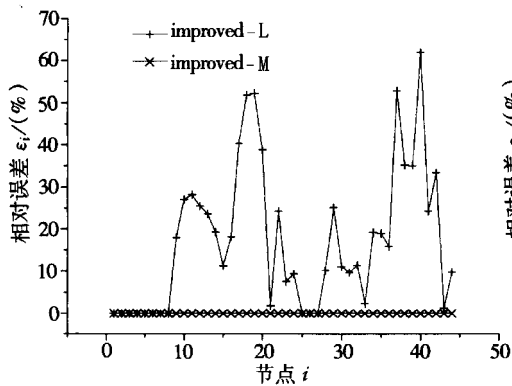


图6 在改进的LBIEM采用单项式基函数与修正基函数的数值比较

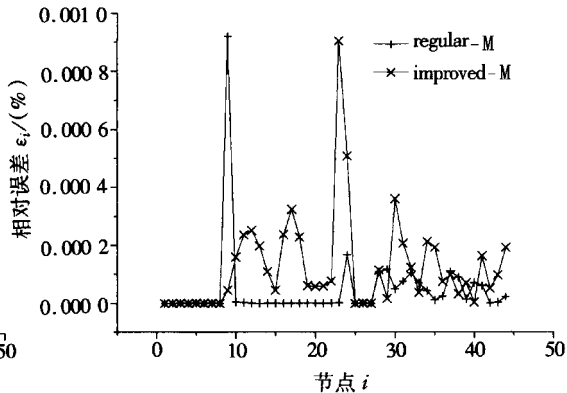


图7 采用修正基函数的正则的LBIEM与改进的LBIEM数值比较

2. 改进的无奇异LBIEM不需要对边界进行积分,能够在位势变化剧烈的情况下,取得更好的近似精度。

3. 对控制波传播问题的Helmholtz方程问题的求解,在改进的无奇异LBIEM中,如果采用修正基函数,将具有很高的数值精度,特别适用于高波数的情况。

4. 在实际的算法实现过程中,改进的无奇异LBIEM还具有代码简单,运算效率高的优点。

总之,经过本文的分析和数值实验可见,改进的无奇异LBIEM取得了理想的数值效果,特别是对于Helmholtz问题,它能够在更高波数时取得良好的数值结果,这对声场分析非常具有前景。当然,对本文方法还需要理论方面的工作的进一步展开,也需要更多类型微分方程来进行数值实验和应用,以检验其适用性。

[参 考 文 献]

- [1] Fries Thomas-Peter, Matthies Hermann G. Classification and overview of mesh-free methods[R]. Institute of Scientific Computing, Technical University Braunschweig Brunswick, Germany, 2003.
- [2] 张雄,刘岩. 无网格法. 北京:清华大学出版社,2004.
- [3] Zhu T, Zhang J D, Atluri S N. A local boundary integral equation (LBIE) method in computational mechanics, and a meshless discretization approach[J]. Computational Mechanics, 1998, 21(3): 223-235.
- [4] Sladek J, Sladek V, Atluri S N. Application of the local boundary integral equation method to boundary-value problems[J]. International Applied Mechanics, 2002, 38(9): 1025-1047.
- [5] 龙述尧,熊渊博. 关于薄板的无网格局部边界积分方程方法中的友解[J]. 应用数学和力学, 2004, 25(4): 379-384.
- [6] LONG Shu-yao, ZHANG Qin. Analysis of thin plates by the local boundary integral equation (LBIE) method[J]. Engineering Analysis With Boundary Elements, 2002, 26(8): 707-718.
- [7] Sladek J, Sladek V, Atluri S N. Local boundary integral equation (LBIE) method for solving problems of elasticity with nonhomogeneous material properties[J]. Computational Mechanics, 2000, 24(6): 456-462.
- [8] Zhu T, Zhang J, Atluri S N. A meshless local boundary integral equation (LBIE) method for solving nonlinear problems[J]. Computational Mechanics, 1998, 22(2): 174-186.
- [9] Chen H B, Lu P, Huang M G, et al. An effective method for finding values on and near boundaries in the elastic BEM[J]. Computers and Structures, 1998, 69(4): 421-431.

- [10] Chen H B, Lu P, Schnack E. Regularized algorithms for the calculation on and near boundary in 2D elastic BEM[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2001, **25**(10): 851-876.
- [11] Sladek V, Sladek J, Afluri S N, et al. Numerical integration of singularities in meshless implementation of local boundary integral equations[J]. *Computational Mechanics*, 2000, **25**(4): 394-403.
- [12] 郭晓峰, 陈海波, 王宁宇, 等. 二维位势问题中正则局部边界积分方法[J]. *中国科学技术大学学报*, 2006, **36**(6): 636-640.
- [13] Chen H B, Fu D J, Zhang P Q. An investigation of Helmholtz problems with high wave numbers via the meshless LBIEM[A]. In: S. M. Sivakumar, A. Meher Prasad, B. Dattaguru, et al Eds. *Advances in Computational & Experimental Engineering and Sciences (Proceeding of ICCES' 05, 1-10 December 2005, India)*, Tech Science Press, 2005, 114-119.

Improved Non-Singular Local Boundary Integral Equation Method

FU Dong-jie, CHEN Hai-bo, ZHANG Pei-qiang

(Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China;

CAS Key Laboratory of Mechanical Behavior and Design of Materials,

Hefei 230026, P. R. China)

Abstract: When the source nodes are on the global boundary in the implementation of local boundary integral equation method (LBIEM), singularities in the local boundary integrals need to be treated specially. Local integral equations were adopted for the nodes inside the domain and moving least square approximation (MLSA) for the nodes on the global boundary, thus singularities will not occur in the new algorithm. At the same time, approximation errors of boundary integrals reduce significantly. As applications and numerical tests, Laplace equation and Helmholtz equation problems were considered and excellent numerical results were obtained. Furthermore, when solving the Helmholtz problems, the modified basis functions with wave solutions were adopted to replace the usually-used monomial basis functions. Numerical results show that this treatment is simple and effective and its application is promising in solutions for the wave propagation problem with high wave number.

Key words: meshless method; moving least square approximation; local boundary integral equation method; singular integral