

一类双面碰撞振子的对称性 尖点分岔与混沌*

乐 源, 谢建华

(西南交通大学 应用力学与工程系, 成都 610031)

(陈立群推荐)

摘要: 讨论了一类单自由度双面碰撞振子的对称型周期 $n-2$ 运动以及非对称型周期 $n-2$ 运动。把映射不动点的分岔理论运用到该模型, 并通过分析对称系统的 Poincaré 映射的对称性, 证明了对称型周期运动只能发生音叉分岔。数值模拟表明: 对称系统的对称型周期 $n-2$ 运动, 首先由一条对称周期轨道通过音叉分岔形成具有相同稳定性的两条反对称的周期轨道; 随着参数的持续变化, 两条反对称的周期轨道经历两个同步的周期倍化序列各自生成一个反对称的混沌吸引子。如果对称系统演变为非对称系统, 非对称型周期 $n-2$ 运动的分岔过程可用一个两参数开折的尖点分岔描述, 音叉分岔将会演变为一支没有分岔的分支以及另外一个鞍结分岔的分支。

关键词: 周期运动; Poincaré 映射; 对称性; 音叉分岔; 混沌; 尖点

中图分类号: O313.4 文献标识码: A

引 言

对于构件之间具有一定微小间隙的碰撞振子的研究, 具有广泛的实际意义。一方面, 由于碰撞会给系统的正常运行带来较大的危害, 因此较多的机械系统在优化设计时要尽可能地避免强烈的碰撞行为。另一方面, 许多机械系统正是利用了内部零部件之间的碰撞振动来达到一定的特殊目的。文献[1]研究了具有两个对称约束的非光滑动力系统, 并得到了所有可能的稳定和不稳定的解。文献[2]把一个非连续系统的理论运用到水平碰撞系统的碰撞分析, 并定义和拓展了 4 种平面转换的映射。文献[3]把理想的不稳定周期轨道稳定化, 并把碰撞嵌入混沌不变集。Luo^[4]研究了水平碰撞振子的 LR 模型的运动的稳定性, 鞍结分岔以及周期倍化分岔条件, 并通过数值模拟研究了由周期倍化分岔而导致的混沌运动。文献[5]表明在一个具有双面约束的二自由度碰撞振动系统中存在对称以及反对称的周期 $1/2$ 运动的 Hopf 分岔。文献[6]得到了一类两自由度碰撞振动系统的周期解的存在性, 稳定性以及共存性的结论。Han 等人^[7]建立了一类斜碰撞振动系统的动力学方程, 分析了周期解的存在性和稳定性, 并在一

* 收稿日期: 2006-03-16; 修订日期: 2007-04-04

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10472096)

作者简介: 乐源(1974—), 男, 四川达州人, 博士生(Tel: + 86-28-87634460;

E-mail: peak8668@yahoo.com.cn);

谢建华(1957—), 男, 浙江绍兴人, 教授, 博士生导师(Tel: + 86-28-87634029;

E-mail: jhxie2000@126.com)。

些简化情况下得到一系列的解析解。Luo 和 Chen^[8] 以一个理想的分段线性系统来模拟齿轮传动系统的振动, 并基于映射结构得到周期解的解析的预测。近年来, 一些研究者分析了某些多自由度碰撞振动系统, 发现这些模型展示了丰富的动力学行为, 并有各种余维二分岔, 如 Hopf-flip 分岔^[9] 和 Hopf-Hopf 分岔^[10-12]。

本文同时讨论了一类单自由度双面碰撞振子的对称型周期 $n-2$ 运动以及非对称型周期 $n-2$ 运动。系统的周期运动对应于 Poincaré 映射的不动点, 周期运动的稳定性与分岔等价于不动点的稳定性与分岔。详细导出了 Poincaré 映射的对称性, 并证明了对称的周期 $n-2$ 运动只有音叉分岔。数值模拟表明: 一条对称周期轨道通过音叉分岔形成具有相同稳定性的两条反对称的周期轨道, 并观察到通向混沌之路。如果对称系统演变为非对称系统, 音叉分岔将会演变为一支没有分岔的分支以及另外一个鞍结分岔的分支。

1 单自由度碰撞振子的力学模型, 对称型以及非对称型周期 $n-2$ 运动

考虑如图 1 所示的单自由度双面碰撞振子的力学模型: 质量块 m_1 上有左右两块固定挡板, 质量块 m_2 在这两块挡板之间来回运动; 质量块 m_1 以 $z_1 = z_0 \sin(\omega t + \tau)$ 的规律作强迫振动。质量块 m_2 与质量块 m_1 之间的阻尼为线性阻尼, 阻尼系数为 c 。质量块 m_2 与左右两块固定挡板的碰撞恢复系数分别为 r_1 和 r_2 。如果 $r_1 = r_2$, 则该系统为对称系统(本文第 1 节, 第 2 节); 如果 $r_1 \neq r_2$, 则该系统为非对称系统(本文第 1 节, 第 3 节)。

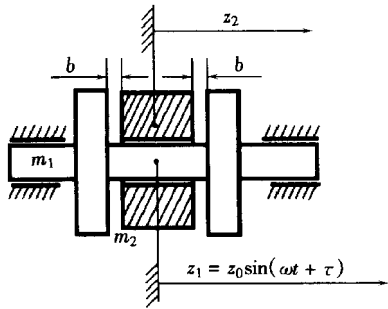


图 1 单自由度双面碰撞振子

取 m_2 与 m_1 的位移之差 $x = z_2 - z_1$ 为相对坐标, 并令 $\zeta = c/m_2$, 建立任意两次连续碰撞之间 m_2 的相对运动微分方程

$$\ddot{x} + \zeta \dot{x} = \omega^2 z_0 \sin(\omega t + \tau). \quad (1)$$

其通解可以写成

$$x = A + B e^{-\zeta t} + E \cos(\omega t + \tau) + F \sin(\omega t + \tau), \quad (2)$$

式中, A, B 为由系统的初始条件所决定的积分常数, E, F 为振幅常数。

而在质量块 m_2 与右、左挡板发生碰撞的瞬时, 相对坐标应分别满足以下关系式: $x = \pm b$ 。根据碰撞定理, 碰撞前后的相对速度满足以下方程: $x_{\dot{x}} = -r_i x_{\dot{x}} (i = 1, 2)$, 其中 $x_{\dot{x}}$ 、 $x_{\dot{x}}$ 分别表示碰撞前以及碰撞后的瞬时速度。

1.1 对称型周期 $n-2$ 运动

当 $r_1 = r_2 = r$ 时, 碰撞振动系统为对称系统。假定质量 m_2 块先与右边挡板碰撞, 并令此时为时间坐标原点 ($t = t_0 = 0$)。然后经历 $n/2$ 个激励力周期后 ($t = t_1 = n\pi/\omega$), 与左边挡板碰撞; 再经历 $n/2$ 个激励力周期后 ($t = t_2 = 2n\pi/\omega$), 与右边挡板碰撞, 如此循环。把满足以下条件的周期运动称为对称型周期 $n-2$ 运动:

$$x(0) = x(t_2) = b, \quad x(t_1) = -b, \quad x_{\dot{x}}(0) = x_{\dot{x}}(t_2) = v_0, \quad x_{\dot{x}}(t_1) = -v_0. \quad (3)$$

可以证明, 一个周期的对称型周期 $n-2$ 运动的解可以写成:

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t), & 0 \leq t \leq t_1, \\ x_2(t) = -x_1(t - t_1), & t_1 \leq t \leq t_2. \end{cases} \quad (4)$$

通过(2)式和(3)式,可以解得积分常数 A, B 以及初相位 τ_0 . 代入(4)式,进而得到系统的对称型周期 $n-2$ 运动.

1.2 非对称型周期 $n-2$ 运动

如果 $r_1 \neq r_2$, 则对称性条件被破坏, 系统变为非对称系统. 假定质量块 m_2 先与右挡板碰撞, 并令此时为时间坐标原点 ($t = t_0 = 0$). 随后, 在 t_1 时刻与左挡板碰撞; 在 $t_2 = 2n\pi/\omega$ 时刻再次与右挡板碰撞.

由于碰撞仅改变解的积分常数, 因此非对称的周期解可以写成

$$x(t) = \begin{cases} x_1(t) = A_1 + B_1 e^{-\zeta t} + E \cos(\omega t + \tau) + F \sin(\omega t + \tau), & 0 \leq t \leq t_1, \\ x_2(t) = A_2 + B_2 e^{-\zeta(t-t_1)} + E \cos(\omega t + \tau) + F \sin(\omega t + \tau), & t_1 \leq t \leq t_2. \end{cases} \quad (5)$$

并且非对称型周期 $n-2$ 解满足以下条件:

$$\begin{cases} x(0) = x(t_2) = b, \quad x_1(t_1) = x_2(t_1) = -b, \\ x_{\dot{x}}(0) = -r_2 x_{\dot{x}}(t_2) = \dot{v}_0, \quad x_{\dot{x}}(t_1) = -r_1 x_{\dot{x}}(t_1) = -\dot{v}_0. \end{cases} \quad (6)$$

把(5)式代入(6)式, 通过化简, 可以得到关于 t_1 和初相位角 ($\tau = \tau_0$) 的非线性方程组. 解这个方程组, 得到积分常数和初相位角. 代入(5)式得到非对称型周期 $n-2$ 运动.

2 对称系统的 Poincaré 映射的对称性

引入变量 y 表示相对速度, 则相对运动微分方程(1), 可以写为以下的形式:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\zeta y + \omega^2 z_0 \sin(\omega t + \tau), \quad (7)$$

即 $\dot{X} = F(X, t)$, 其中 $X = (x, y)^T$. 并且有

$$F\left[X, t + \frac{2\pi}{\omega}\right] = F(X, t). \quad (8)$$

单自由度碰撞振动系统的相空间为: $R^2 \times S^1 = \{(x, y, t) \mid (x, y) \in R^2, t \in S^1\}$. 若把 Poincaré 截面取为 $\Pi_1 = \{(x, y, t) \mid x = b\}$, 则存在一个与 Poincaré 截面对称的截面 $\Pi_2 = \{(x, y, t) \mid x = -b\}$, 以及一个对称变换 $R: R^2 \times S^1 \rightarrow R^2 \times S^1$:

$$R(x, y, t) = (-x, -y, t + n\pi/\omega), \quad (9)$$

式中 n 为奇数. 由于 $t \in S^1$, 显然 $R^2 = I$. 若令 $X = (x, y, t)$, 根据(8)式和(9)式, 有

$$RF(X) = F(RX). \quad (10)$$

设 Δt_1 是从 $X_0 \in \Pi_1$ 出发的解运动到 Π_2 所需时间, 而 Δt_2 是从 $X_1 = RX_0 \in \Pi_2$ 出发之解达到 Π_1 所需时间, 可以证明 $\Delta t_2 = \Delta t_1$. 定义 Q_1 表示相点由 Π_1 到 Π_2 , 并经历一次碰撞的映射; Q_2 表示相点由 Π_2 到 Π_1 , 并经历一次碰撞的映射. 以下把 $X = (y, t)$ 作为 Poincaré 截面上的两维坐标表示式, 那么系统的 Poincaré 映射可以表示为 $P = Q_2 \circ Q_1, P: \Pi_1 \rightarrow \Pi_1$.

下面首先不加证明地给出 3 个定理, 并在此基础上证明定理 4.

定理 1 如果设 $X(X_0, t)$ ($t = t_0 + \Delta t$) 是方程(7)从初始点 $X_0 \in \Pi_1$ 出发之正解, $X(X_1, t + n\pi/\omega)$ 是方程(7)从初始点 $X_1 = RX_0 \in \Pi_2$ 出发之正解, 则

$$X\left[X_1, t + \frac{n\pi}{\omega}\right] = RX(X_0, t) \quad (11)$$

即

$$X \left(RX_0, t_0 + \Delta t + \frac{n\pi}{\omega} \right) = RX(X_0, t_0 + \Delta t) \quad (12)$$

定理 2 碰撞振动系统的 Poincaré 映射具有以下对称性:

$$R \circ Q_1 = Q_2 \circ R \quad (13)$$

定理 3 如果 $X_0 = (y_0, t_0)$ 是映射 P 的不动点,

$$X_0^* = (y_0^*, t_0^*) = (R^{-1} \circ Q_1)(X_0) \neq X_0, \quad (14)$$

则 X_0^* 亦为映射 P 的不动点, 并且 X_0 与 X_0^* 称为两个反对称的不动点, 它们对应的两个周期运动称为两个反对称的周期运动, 这两个反对称的周期运动具有相同的稳定性.

定理 4 单自由度对称碰撞振动系统的对称型周期运动只能有音叉分岔.

证明 (13) 式可以写成 $Q_2 = R \circ Q_1 \circ R^{-1}$. 若记映射 $Q_\alpha = R^{-1} \circ Q_1$, 那么系统的 Poincaré 映射为

$$P = Q_2 \circ Q_1 = R \circ Q_1 \circ R^{-1} \circ Q_1 = Q_\alpha^2 \quad (15)$$

对称不动点 X_0 满足 $X_0 = R^{-1} \circ Q_1(X_0)$. 根据复合函数求导的链式法则, 可以得到 Poincaré 映射的线性化矩阵:

$$DP(X_0) = D(R^{-1} \circ Q_1) \mid_{R^{-1} \circ Q_1(X_0)} D(R^{-1} \circ Q_1)(X_0) = A^2 \quad (16)$$

式中 $A = D(Q_\alpha(X_0))$, ‘ D ’ 表示相应映射的线性化矩阵. 如果矩阵 A 有一个非零的实特征值 λ_α , 则 Jacobi 矩阵 $DP(X_0)$ 有一个实特征值 $\lambda = \lambda_\alpha^2 > 0$. 那么 -1 不可能是 $DP(X_0)$ 的特征值, 则对称不动点 X_0 (或者对称周期运动) 没有周期倍化分岔. 此外, Budd 和 Dux^[13] 证明了简谐激励作用下的单自由度碰撞振动系统不存在 Hopf 分岔. 因此可以得到以下结论: 对于单自由度碰撞振动系统, 对称不动点(或者对称的周期 $n-2$ 运动) 只有音叉分岔, 对应于 Poincaré 映射的线性化矩阵有一个实特征值从 $+1$ 处穿越单位圆的情况.

3 非对称系统的分岔

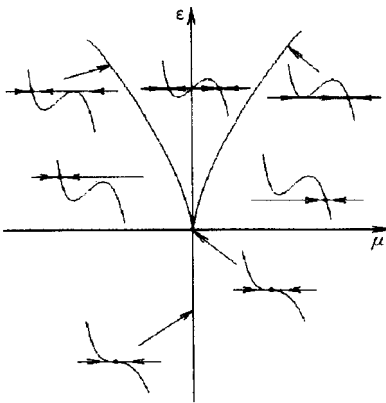
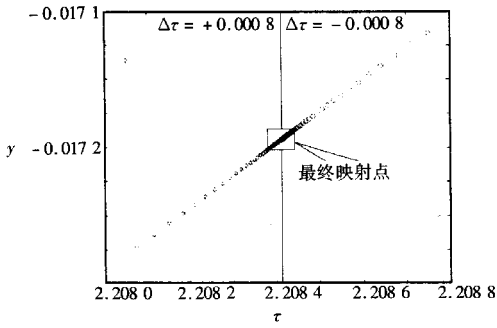


图 2 $\mu-\epsilon$ 平面上的尖点

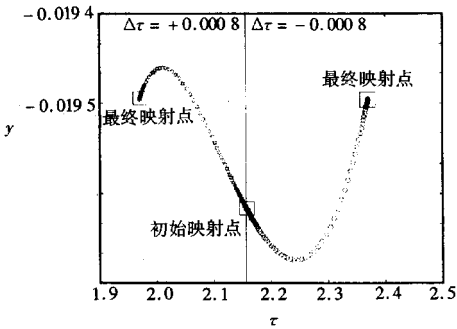
对于非对称系统 ($r_1 \neq r_2$), 由于破坏了系统的对称性条件, 则系统的周期 $n-2$ 运动的音叉分岔将会演变为尖点分岔. 对于第 2 节讨论过的对称性系统 ($r_1 = r_2 = r$), 取 r_2 和 ω 为控制参数. 假定音叉分岔的临界参数值为 $(r_2, \omega) = (r_c, \omega_c)$, 此时 Poincaré 映射在不动点 X_0 处的 Jacobi 矩阵有一个单重实特征值 $\lambda = 1$, 同时另外一个特征值的模小于 1 . 当参数 $\epsilon = \omega - \omega_c$ 继续变化到 $\epsilon \neq 0$, 即 $\omega \neq \omega_c$ 时, Poincaré 映射将产生音叉分岔. 对非对称系统, 设 $r_1 = r_c, r_2 = r_{c+} \neq r_c$. 两参数的 Poincaré 映射 $P = P_{\mu, \epsilon}$ 的分岔可以用尖点的两参数开折表示, 如图 2 所示.

4 数值模拟

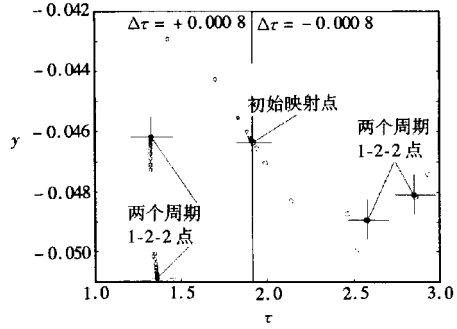
4.1 对称系统的分岔和混沌



(a) $\omega = 0.068$



(b) $\omega = 0.075$

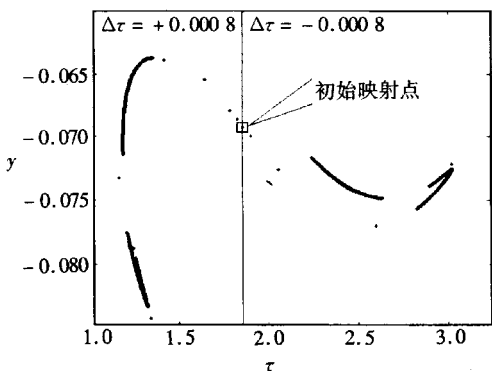


(c) $\omega = 0.158$

图3 Poincaré 截面投影图

将会发生音叉分岔。此时对称的不动点失稳，并另外通过音叉分岔形成两个反对称的不动点；以不稳定的对称不动点加上不同的初始扰动(例如 $\Delta\tau = \pm 0.0008$) 进行迭代，根据扰动的不同，将收敛于两个稳定的反对称不动点之一，如图3(b)所示。当 $\omega = 0.158$ 时，由图3(c)可以看到通过音叉分岔形成的反对称的不动点分别发生周期倍化分岔。

当控制参数 ω 继续增加时，将会产生混沌吸引子。在图4中可以清楚地观察到混沌吸引子的演化过程。当 ω 增加到 $\omega = 0.23$ 时，根据扰动的不同，两个反对称的不动点通过周期倍化分岔分别生成两个离散的反对称的混沌吸引子，如图4(a)所示。



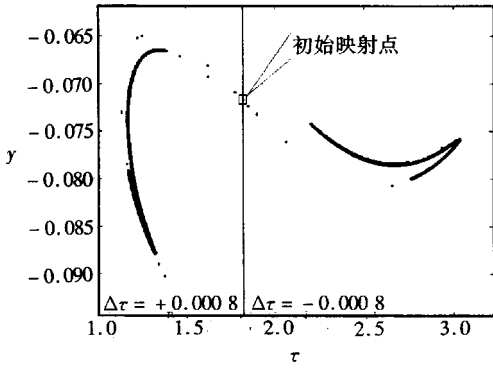
(a) $\omega = 0.23$

当 $\omega = 0.24$ 时，两个反对称的混沌吸引子的离散的两部分结合成为一体，如图4(b)所示。当 $\omega = 0.28$ 时，这两个反对称的混沌吸引子演化为同一个对称的混沌吸引子，如图4(c)所示。

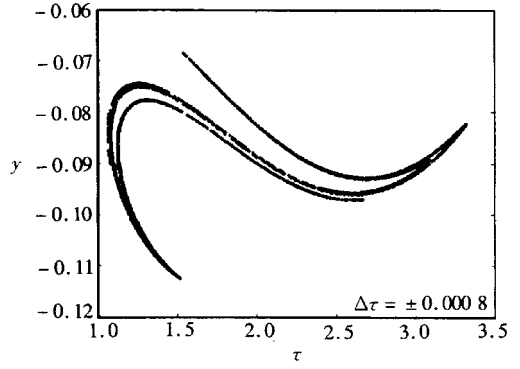
图5给出了全局分岔图(ω 为控制参数)。其中(a)为扰动 $\Delta\tau = +0.0008$ 的情况，(b)为扰动 $\Delta\tau = -0.0008$ 的情况，(c)为(a)和(b)两种情况的组合。由(a)、(b)和(c)知道， $\omega = \omega_c$ 的确为音叉分岔临界值；当 ω 增加并超过 $\omega_c = 0.071975$

令 ω 为控制参数，并取系统参数如下： $n = 1$ ， $c = 0.02 \text{ kg/s}$ ， $m_2 = 0.5 \text{ kg}$ ， $z_0 = 0.3 \text{ cm}$ ， $b = 0.25 \text{ cm}$ ， $r = 0.8$ 。Poincaré 截面相图如图3、图4所示。图3为对称系统的音叉分岔，图4展示了吸引子的演化过程。

当 $\omega = 0.068$ 时，由于不动点的两个实特征值的模均小于1，因此相应的对称型周期运动是稳定的，如图3(a)所示。当 $\omega = \omega_c = 0.071975$ 时，不动点的特征值为 $\lambda_1 = 0.1527$ ， $\lambda_2 = 1.0000$ ，此时的 ω_c 为音叉分岔临界值。当 ω 增加到 $\omega > \omega_c$ 时，



(b) $\omega = 0.24$



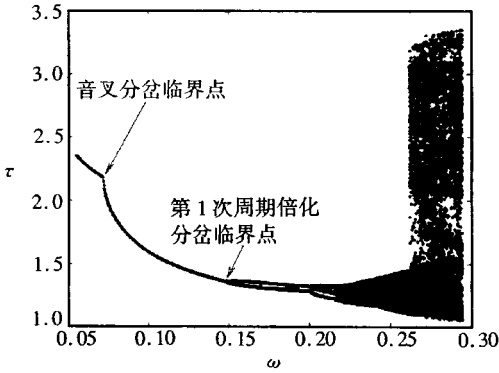
(c) $\omega = 0.28$

图 4 奇异吸引子的演化

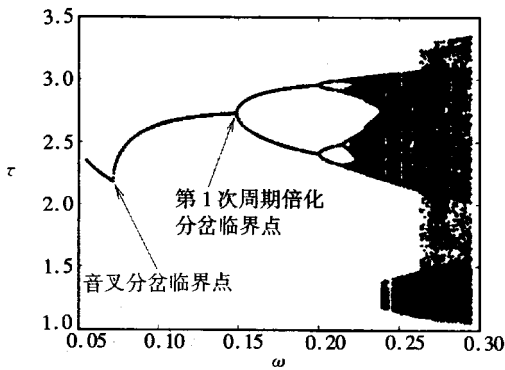
时, 对称的周期轨道失稳, 并另外通过音叉分岔形成两条反对称的具有相同稳定性的周期轨道 (注意该分岔图并未给出失稳后对称的那条周期轨道)。当 ω 持续增加时, 两个反对称的周期轨道分别产生一个同步的倍化分岔序列, 最后形成两个反对称的混沌吸引子。

4.2 从对称系统到非对称系统的演变

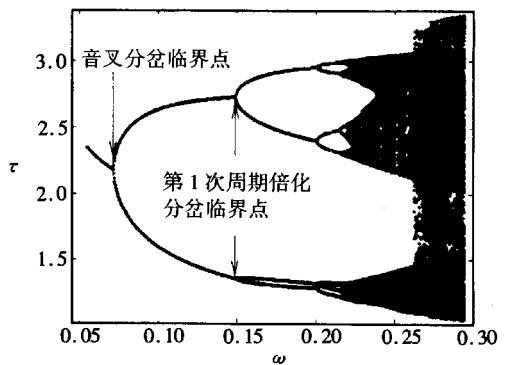
如果改变恢复系数 r_2 , 并且 $r_2 \neq r_1$, 则对称系统演变为非对称系统, 同时对称的周期 $n-2$ 运动变为非对称的周期 $n-2$ 运动。与对称系统相比, 由于对称条件的破坏, 在音叉分岔临界点附近的动力学行为发生了本质改变, 如图 6 所示。图 6 (a) 反映了对称的情况, 可以观察到当 ω 增加并超过 ω_c 时, 对称的稳定周期轨道失稳, 并另外通过音叉分岔形成两条反对称的具有相同稳定性的周期轨道。然而, 当 $r_2 = 0.805 \neq r_1$ 时, 音叉分岔将会演变为一支没有分岔的分支以及另外一个鞍结



(a) $\Delta\tau = +0.0008$



(b) $\Delta\tau = -0.0008$



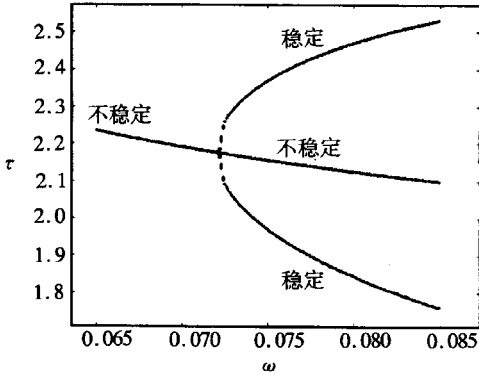
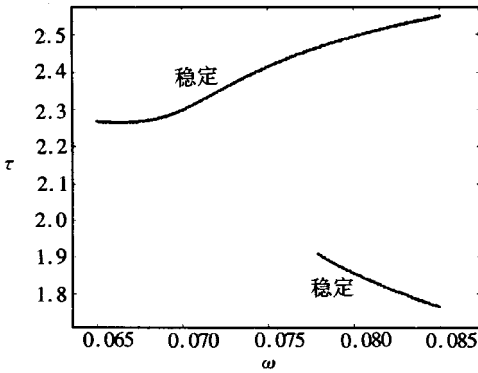
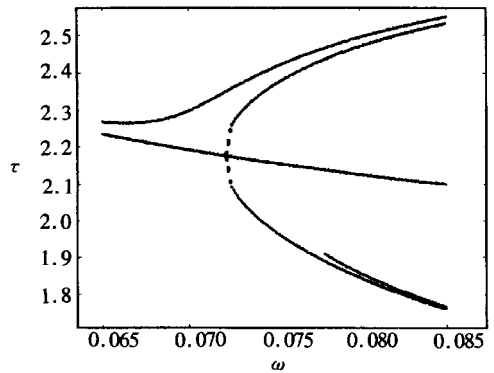
(c) $\Delta\tau = \pm 0.0008$

图 5 全局分岔图

分岔的分支, 见图 6(b)。图 6(c) 是对称系统和非对称系统两种情况的组合。应当指出的是, 鞍结分岔中不稳定的一支不能通过数值模拟得到。

5 结 论

对于单自由度碰撞振子的对称系统, 对称型周期 $n-2$ 运动(或者对称不动点) 只能有音叉分岔。但是对于由对称的周期轨道通过音叉分岔而形成的两个反对称的周期轨道, 则分别有一个同步的周期倍化序列。随着控制参数的持续变化, 通向混沌之路可以概括为: 对称不动点 \rightarrow 一对反对称不动点 \rightarrow 一对反对称的混沌吸引子 \rightarrow 一个对称的混沌吸引子。如果 $r_2 \neq r_1$, 对称系统演变为非对称系统, 音叉将会演变为两个独立的分支: 其中一支没有分岔, 稳定性也没有变化; 另外一支为鞍结分岔。

(a) $r_1 = r_2 = 0.8$ (b) $r_1 = 0.8, r_2 = 0.805$ 

(c) (a)、(b)的组合

图6 从对称到非对称的演变

致谢 作者感谢西南交通大学博士创新基金对本文的资助。

[参 考 文 献]

- [1] Luo A C J. On the symmetry of solutions in non-smooth dynamical systems with two constraints[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 273: 1118-1126.
- [2] Han R P S, Luo A C J, Deng W. Chaotic motion of a horizontal impact pair[J]. Journal of Sound and Vibration, 1995, 181(2): 231-250.
- [3] de Souza S L T, Caldas I L. Controlling chaotic orbits in mechanical systems with impacts[J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2004, 19: 171-178.
- [4] Luo A C J. Period-doubling induced chaotic motion in the LR model of a horizontal impact oscillator [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2004, 19: 823-839.
- [5] Luo G W. Period-doubling bifurcations and routes to chaos of the vibratory systems contacting stops [J]. Physics Letters A, 2004, 323: 210-217.
- [6] 李群宏, 陆启韶. 一类双自由度碰撞系统运动分析[J]. 力学学报, 2001, 33(6): 776-786.
- [7] Han W, Jin D P, Hu H Y. Dynamics of an oblique-impact vibrating system of two degrees of freedom

- [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, **275**: 795-822.
- [8] Luo A C J, CHEN Li di. Periodic motions and grazing in a harmonically forced, piecewise, linear oscillator with impacts[J]. *Chaos, Solitons & Fractals*, 2005, **24**: 567-578.
- [9] Ding W C, Xie J H, Sun Q G. Interaction of Hopf and period doubling bifurcations of a vibro-impact system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, **275**(5): 27-45.
- [10] Wen G L. Codimension-2 Hopf bifurcation of a two-degree-of-freedom vibro-impact system[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, **242**(3): 475-485.
- [11] Xie J H, Ding W C. Hopf-Hopf bifurcation and invariant torus T^2 of a vibro-impact system[J]. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2005, **40**: 531-543.
- [12] Ding W C, Xie J H. Torus T^2 and its routes to chaos of a vibro-impact system[J]. *Physics Letters A*, 2006, **349**: 324-330.
- [13] Budd C, Dux F. The effect of frequency and clearance vibrations on single-degree-of-freedom impact oscillators[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, **184**(3): 475-502.

Symmetry, Cusp Bifurcation and Chaos of an Impact Oscillator Between Two Rigid Sides

YUE Yuan, XIE Jian-hua

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Southwest Jiaotong University,
Chengdu 610031, P. R. China)

Abstract: Both the symmetric period $n-2$ motion and asymmetric one of a one-degree-of-freedom impact oscillator were considered. The theory of bifurcations of the fixed point was applied to such model, and it was proved that the symmetric periodic motion only has pitchfork bifurcation by the analysis of the symmetry of the Poincaré map. The numerical simulation shows that one symmetric periodic orbit could bifurcate into two antisymmetric ones via pitchfork bifurcation. While the control parameter changes continuously, the two antisymmetric periodic orbits will give birth to two synchronous antisymmetric period-doubling sequences, and bring about two antisymmetric chaotic attractors subsequently. If the symmetric system is transformed into asymmetric one, bifurcations of the asymmetric period $n-2$ motion can be described by a two-parameter unfolding of cusp, and the pitchfork changes into one unbifurcated branch and one fold branch.

Key words: periodic motion; Poincaré map; symmetry; pitchfork bifurcation; chaotic attractor; cusp