

# 一类高次自催化耦合反应扩散系统的分歧和斑图\*

张 丽, 刘三阳

(西安电子科技大学 理学院 数学系, 西安 710071)

(李继彬推荐)

摘要: 考虑了一类由于自催化剂的耦合而发生的反应扩散系统的空间结构. 利用线性化理论讨论了平衡态解的稳定性并且证明了在非耦合系统中空间非一致解出现分歧的必要条件. 进一步, 利用弱非线性理论讨论了分歧点并且给出了弱耦合系统的图灵分歧解的振幅方程及其性质.

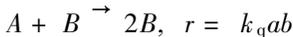
关键词: 耦合系统; 稳定性; 分歧; 斑图

中图分类号: O175.29 文献标识码: A

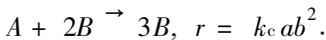
## 引 言

一般来讲, 化学反应中的动力学问题绝大多数是非线性的, 但是在系统临近热力学平衡态时, 系统的动力学行为可以近似的用线性非平衡热力学来研究. 在系统远离热力学平衡态时, 在一些情况下, 非线性效应变成系统动力学行为的主导因素. 这种非线性行为与系统的线性扩散行为耦合, 可以使系统自发的产生各种有序或无序的斑图.

一般来说, 所有的热力学振荡反应都是自催化的. 自催化不仅出现在 Belousov-zhabotinskii 反应中而且在碘-砷酸反应中也会常出现. 大部分动力系统都包括自催化步骤(或与初始步骤相关的自催化过程). 这些反应过程需要给出一些符合逻辑的较简单的过程. 本文中, 我们检验如下的情况: 自催化剂的扩散系数超越反应物, 简单的限制在一维系统中, 我们考虑反应物和自催化剂会有明显的不同. 以前的许多文章都倾向于考虑自催化剂的浓度有两种形式: 2 次催化剂,  $r$  为反应比例



或 3 次催化剂



在许多文章中, 我们已经看到由于化学耦合反应而出现的斑图现象. Wollkind 和 Stephenson<sup>[1]</sup>考虑了一类发生在无搅拌的反应器内的关于氯碘酸的反应, 在一个开放的持续的反应器内, 此类反应将出现斑图. Hill 和 Merkin<sup>[2]</sup>考虑了 3 次自催化反应的斑图, 对于不同的物种 A 和 B 关于他们的基于 3 次催化剂的两细胞化学振荡被分析. 两细胞的耦合导致了比单细胞更

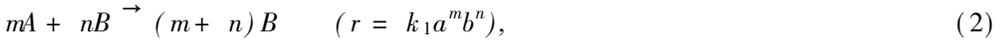
\* 收稿日期: 2006-07-04; 修订日期: 2007-06-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(60574075)

作者简介: 张丽(1977—), 女, 甘肃人, 讲师, 博士生(联系人, E-mail: lzgreen@sina.com).

复杂的时空行为的出现. Hill 等<sup>[3]</sup>给出了发生在密闭容器内的基于 3 次自催化  $A + 2B \xrightarrow{r} 3B$ ,  $B \xrightarrow{r} C$ , 的反应扩散系统的斑图. 在文献[4]中, 出现在通过反应物的耦合而发生在两细胞中的反应扩散系统的空间结构被讨论. 在文献[5]中, 通过半渗透细胞膜的线性扩散而发生的耦合反应的反应扩散传播波被考虑. 文献[6]中, 反馈自催化系统的传播波被讨论. 文献[7]中, 由于自催化剂的耦合而产生的反应扩散传播波被考虑, 且研究了自催化剂与其它反应物浓度相比的局部变化的初值问题. 文献[8]中, 发生在包括自催化步骤的连续无激活反应器中的一类简单的反应扩散系统的斑图被讨论. 文献[9]中, 作者考虑一类基于催化剂以及包括两个电离子和两个非电离子的两步化学反应, 当有电场作用时二阶反应被考虑. 文献[10]中, 考虑受电场影响的自催化反应.

在本文中我们希望考虑一个更一般的方法处理高次自催化剂的反应扩散系统



文献[11]中, 作者就考虑了基于热力学自催化系统  $A + mB \xrightarrow{r} (m+1)B$ ,  $r = kab^m$  的反应扩散波的传播. 文献[12]中, 二维空间的耦合反应扩散系统的斑图被考虑. 这些方程是一类热力学化学自催化模型, 自催化剂和反应物的阶数是  $m$  和  $n$ , 且  $1 < n < m$ . 我们因此类似的考虑反应物和自催化剂在整个反应过程中不仅有一个分子数. 一般来说这将出现在初始反应中, 例如碘磷酸反应中会产生一些碘离子. 简单的我们用  $m$  阶和  $n$  阶幂表示反应物和催化剂在反应过程中的重要性. 这个反应的比例依靠系统中反应物温度的增加给出, 如下表示:



其中  $\phi = E/(RT_{\text{ref}}^2)$  而  $T_{\text{ref}}$  是某一个适合的温度参考值. 我们假设反应发生在封闭系统中反应物  $A$  由慢退化过程(1)中的先引物  $P$  补充, 其中  $p$  是浓度,  $k_0$  是比例常数. 我们假设反应的第一步速度较慢而使得  $A$  的反应速度通过(1)式可以给出是常数, 我们用无量纲参数  $\mu$ ,  $\mu > 0$  来表示.

在本文中考虑这类反应发生在两个同卵双生细胞中, 这里考虑细胞是相当薄的, 以至于扩散可以通过细胞在瞬间发生, 这里给出的两个半渗透细胞膜是恒等区域, 这种半细胞膜仅容许自催化剂  $B$  通过, 我们的反应就发生在这种细胞中. 这类模型在文献[2]中出现但现在是高次自催化剂, 即

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \mu - u_1^m v_1^n, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} = \lambda \delta \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + u_1^m v_1^n - v_1 + \beta(v_2 - v_1), \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \mu - u_2^m v_2^n, \\ \frac{\partial v_2}{\partial t} = \lambda \delta \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + u_2^m v_2^n - v_2 + \beta(v_1 - v_2), \end{cases} \quad (4)$$

其中  $1 < m < n$ ;  $m, n \in N$ ,  $(u_1, v_1)$  和  $(u_2, v_2)$  是细胞 1 和细胞 2 的无量纲浓度,  $\beta$  是无量纲耦合参数. 我们假设满足的边界条件如下:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} = \frac{\partial v_i}{\partial x} = 0, \quad x = 0, 1, (i = 1, 2), \quad (5)$$

我们可以得到这类通过自催化剂的耦合而发生的反应扩散系统有一个唯一的常数平衡态

$$u_1 = u_2 = \mu^* = \mu^{(1+n)/m}, \quad v_1 = v_2 = \mu \quad (\mu > 0). \quad (6)$$

在文中, 我们检验了平衡态(6)的局部稳定性对扩散的影响. 当  $\mu > \mu_c^{\max}(\delta, \lambda)$  时, 对于  $0 < \beta < (n-1)/2$ ,  $0 < \delta < (\sqrt{n-1})^2/(n-1)$  的值, 平衡态(6)是稳定的, 而  $0 < \mu < \mu_c^{\max}(\delta, \lambda)$  平衡态不稳定, 其中  $\mu = \mu/\mu^* = \mu^{(m+n-1)/m}$  分歧参数, 表示自催化剂和反应物的初始浓度之比, 选取该比例值作为分歧参数是重要的. 我们发现对于不同的  $m, n$  该比例值不同, 将会影响参数  $\beta, \delta$  的范围和斑图态分歧解的振幅.

对于不稳定平衡态, 我们用扰动法中的弱非线性理论进行讨论, 当  $0 < \mu < \mu_c^{\max}$  时, 将出现一系列的分歧. 因此给出一个  $\mu$  的临界值(即  $\mu^*$ ). 当  $\mu^* < \mu < \mu_c^{\max}$  时, 出现(Hopf)分歧, 可能产生时空态的周期解, 而  $0 < \mu < \mu^*$  时, 出现(Turing)分歧, 可能产生与时间无关的空间态周期解(斑图态解). 我们主要考虑斑图态解, 该解的稳定性由 Landau 常数  $G$  给出, 如果  $G > 0$ , 分歧解是稳定的, 否则不稳定. 最后, 分别讨论了在耦合和非耦合系统中斑图解的稳定性.

## 1 线性化理论

这节, 考虑扩散对平衡态(6)的影响, 即当平衡态(6)有小振幅扰动时它的稳定性, 我们假设  $t = 0$  时初始扰动为

$$\begin{cases} u_i(x, 0) = \mu^* + \varepsilon u_{i0}(x), \\ v_i(x, 0) = \mu + \varepsilon v_{i0}(x), \end{cases} \quad 0 < x < 1, \quad (i = 1, 2), \quad (7)$$

其中  $u_{i0}$  和  $v_{i0}$  是有界函数,  $0 < \varepsilon \ll 1$  是初始小扰动的测量.

对于  $0 < \varepsilon \ll 1$ , 我们寻找方程(4)的满足初始条件(5)和初始条件(7)的如下形式的解

$$\begin{cases} u_i(x, t) = \mu^* + \varepsilon u_{i0}(x, t) + \dots, \\ v_i(x, t) = \mu + \varepsilon v_{i0}(x, t) + \dots, \end{cases} \quad (i = 1, 2), \quad (8)$$

这里  $u_{i0}$  和  $v_{i0}$  是  $O(1)$  阶的, (当  $\varepsilon \rightarrow 0$  时). 将(8)式代入(4)式中以  $\varepsilon$  的幂展开, 在  $O(\varepsilon)$  阶得到主导项  $u_{i0}, v_{i0}$  满足的方程为:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_{10}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u_{10}}{\partial x^2} - m\mu u_{10} - nv_{10}, \\ \frac{\partial v_{10}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 v_{10}}{\partial x^2} + m\mu u_{10} + (n-1)v_{10} + \beta(v_{20} - v_{10}), \\ \frac{\partial u_{20}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 u_{20}}{\partial x^2} - m\mu u_{20} - nv_{20}, \\ \frac{\partial v_{20}}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 v_{20}}{\partial x^2} + m\mu u_{20} + (n-1)v_{20} + \beta(v_{10} - v_{20}), \end{cases} \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (9)$$

其中  $\mu = \mu/\mu^* = \mu^{(m+n-1)/m}$  是分歧参数. 进一步将(8)式代入(5)式和(7)式  $u_{i0}, v_{i0}$  满足的初始条件和边界条件为:

$$\begin{cases} u_{i0}(x, 0) = u_{i0}(x), \quad v_{i0}(x, 0) = v_{i0}(x), & 0 < x < 1, \quad (i = 1, 2) \\ \frac{\partial u_{i0}}{\partial x} = \frac{\partial v_{i0}}{\partial x} = 0, & x = 0, 1, \quad (i = 1, 2). \end{cases} \quad (10)$$

根据边界条件(10)的形式, 我们讨论方程(9)的以下形式的解

$$\begin{cases} u_{i0}(x, t) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{ir} e^{\omega t} \cos(r\pi x) \\ v_{i0}(x, t) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{ir} e^{\omega t} \cos(r\pi x) \end{cases} \quad (i = 1, 2). \quad (11)$$

将(11)式代入(9)式,我们得到(11)式有非平凡解的必要条件是对于  $A_r$ 、 $B_r$  要求  $\omega$  满足以下条件

$$\det(\mathbf{M}) = 0,$$

其中

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \omega + k_r^2 + m\mu & n & 0 & 0 \\ -m\mu & \omega + \mathcal{E}k_r^2 - (n-1) + \beta & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \omega + k_r^2 + m\mu & n \\ 0 & -\beta & -m\mu & \omega + \mathcal{E}k_r^2 - (n-1) + \beta \end{bmatrix},$$

而  $k_r = r\pi\sqrt{\lambda}$  ( $r = 0, 1, 2, \dots, \infty$ ). 将此必要条件展开得到  $\omega$  及  $k_r$ 、 $\mu$  满足的色散关系

$$f(\omega)g(\omega) = 0, \quad (12)$$

其中

$$f(\omega) = \omega^2 + p_1(\mu, k_r)\omega + q_1(\mu, k_r), \quad g(\omega) = \omega^2 + p_2(\mu, k_r)\omega + q_2(\mu, k_r),$$

且

$$\begin{aligned} p_1(\mu, k_r) &= (\delta + 1)k_r^2 + m\mu - n + 1, \\ q_1(\mu, k_r) &= \mathcal{E}k_r^4 + (\delta m\mu - n + 1)k_r^2 + m\mu, \\ p_2(\mu, k_r) &= (\delta + 1)k_r^2 + m\mu - n + 1 + 2\beta, \\ q_2(\mu, k_r) &= \mathcal{E}k_r^4 + (\delta m\mu - n + 1 + 2\beta)k_r^2 + (1 + 2\beta)m\mu. \end{aligned}$$

我们定义  $f(\omega) = 0$  是关于非耦合系统影响线性平衡态的方程, 而  $g(\omega) = 0$  是耦合系统的方程, 方程(12)的根由下式给出

$$\omega_i^{\pm} = \frac{1}{2}(-p_i \pm \sqrt{p_i^2 - 4q_i}) \quad (i = 1, 2). \quad (13)$$

根据(11)式的表达式,我们可以看出,平衡态(6)的稳定性是由  $\omega_1^{\pm}$  和  $\omega_2^{\pm}$  在  $(k_r, \mu)$  平面的第一象限内的性质决定的. 我们首先讨论由  $f(\omega) = 0$  和  $g(\omega) = 0$  给出的中性曲线. 中性曲线是指在  $(k_r, \mu)$  平面的第一象限内, 满足  $\omega_i^{\pm} = 0$  和  $\text{Re}(\omega_i^{\pm}) = 0$  的曲线. 这些中性曲线是决定平衡态(6)是否产生稳定的空间非一致分歧解的必要先验条件. 与在文献[3]中讨论相同, 中性曲线是由以下临界条件给出的

$$\begin{cases} p_i^2(k_r, \mu) - 4q_i(k_r, \mu) = 0, & q_i(k_r, \mu) = 0 \\ p_i(k_r, \mu) = 0, & q_i(k_r, \mu) > 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2), \quad (14)$$

将  $p_i$ 、 $q_i$  的表达式代入(14)式,我们可以得到中性曲线满足的函数关系式,我们定义由  $f(\omega) = 0$  得到的相应的中性曲线为  $L_1$ , 由  $g(\omega) = 0$  得到的相应的中性曲线为  $L_2$ . 进一步可以得到  $L_1$  由以下函数关系式给出

$$\mu_{cl}(k_r) = \begin{cases} \frac{1}{m}[n - 1 - (\delta + 1)k_r^2], & 0 \leq k_r \leq k_r^*, \\ \frac{1}{m} \frac{k_r^2(n - 1 - \mathcal{E}k_r^2)}{1 + \mathcal{E}k_r^2}, & k_r^* \leq k_r \leq \sqrt{\frac{n-1}{\delta}}. \end{cases} \quad (15)$$

其中  $(k_r^*, \mu^*)$  是  $(k_r, \mu)$  平面内相应于  $\text{Re}(\omega_1^\pm) = 0$  和  $\omega_1^\pm = 0$  的交点,

$$k_r^* = \frac{1}{2\delta^2} [\sqrt{(n\delta + 2 - n)^2 + 4n - 4 - (n + 2\delta - n\delta)}],$$

$$\mu^* = \frac{1}{m} [n - 1 - (\delta + 1)k_r^{*2}],$$

中性曲线  $L_1$  在  $0 < k_r \leq k_r^*$  内的分支是关于  $\text{Re}(\omega_1^\pm) = 0$  的曲线, 而在  $k_r^* \leq k_r \leq \sqrt{(n-1)/\delta}$  内的分支是关于  $\omega_1^\pm = 0$ . 中性曲线  $L_1$  与  $k_r$  轴的交点是  $k_r = \sqrt{(n-1)/\delta}$ . 如图 1.

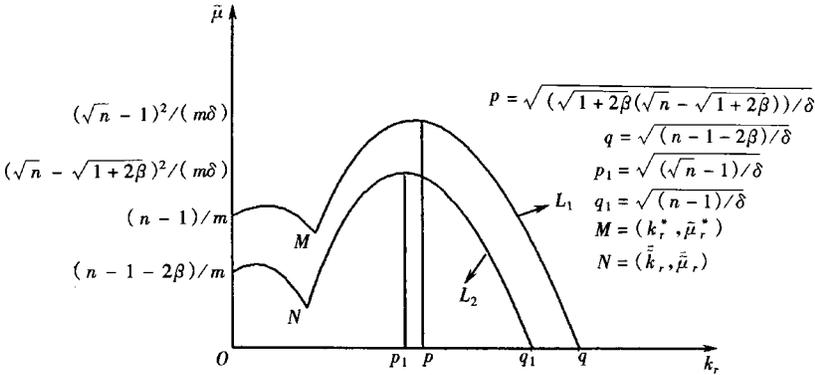


图 1 中性曲线  $L_1$  和  $L_2$

$$(0 < \beta < (n-1)/2, 0 < \delta < (\sqrt{n-1} - \sqrt{1+2\beta})^2 / (n-1-2\beta))$$

中性曲线  $L_2$  关于  $\omega_2^\pm = 0$  和  $\text{Re}(\omega_2^\pm) = 0$  的函数关系为:

$$\mu_{c2}(k_r) = \begin{cases} \frac{1}{m} [n - 1 - 2\beta - (\delta + 1)k_r^2], & 0 \leq k_r \leq \bar{k}_r, \\ \frac{1}{m} \frac{k_r^2(n - 1 - 2\beta - \delta k_r^2)}{1 + \delta k_r^2 + 2\beta}, & \bar{k}_r \leq k_r \leq \sqrt{\frac{n-1-2\beta}{\delta}}, \end{cases} \quad (16)$$

其中  $(\bar{k}_r, \bar{\mu})$  是两分支  $\text{Re}(\omega_2^\pm) = 0$  和  $\omega_2^\pm = 0$  的交点

$$\bar{k}_r = \frac{1}{2\delta^2} [\sqrt{(n\delta + 2(1+2\beta) - n)^2 + 4n(1+2\beta) - 4(1+2\beta)^2 - (n + 2\delta(1+2\beta) - n\delta)}],$$

$$\bar{\mu} = \frac{1}{m} [n - 1 - 2\beta - (\delta + 1)k_r^{*2}],$$

可以看到对于中性曲线  $L_2$  仅仅当  $0 < \beta < (n-1)/2$  时, 我们可以讨论此曲线在  $(k_r, \mu)$  平面第一象限内的性质, 如图 1. 并且在这一条件下, 我们可以得出  $L_2$  严格的在  $L_1$  曲线的下方.

当  $0 < \beta < (n-1)/2, 0 < \delta < (\sqrt{n-1})^2 / (n-1)$  时, 中性曲线  $L_1$  上方的点都有  $\text{Re}(\omega_i^\pm) < 0$  或  $\omega_i^\pm < 0$ , 而下方的点分以下两种情况:

- 1) 在中性曲线  $L_2$  上方的点有  $\text{Re}(\omega_i^\pm) < 0$  但至少有一个点是  $\text{Re}(\omega_i^\pm) > 0$ ;
- 2) 在中性曲线  $L_2$  下方的点, 至少有一个点是  $\text{Re}(\omega_2^\pm) > 0, \text{Re}(\omega_1^\pm) > 0$  或  $\text{Re}(\omega_2^\pm) > 0$  及  $\text{Re}(\omega_1^\pm) > 0$ .

中性曲线的一个分支将出现 Hopf 分歧可能产生时空态的周期解而另一个分支将出现 Turing 分歧, 可能产生与时间无关的空间态周期解. 我们主要讨论空间斑图态解. 对于  $\mu$  的值, 平衡态(6) 的稳定性要求  $\text{Re}(\omega^\pm(k_r, \mu)) < 0$  或  $\omega^\pm(k_r, \mu) < 0$  对每一个  $r = 0, 1, 2, \dots, \infty$  均成立, 从而根据(15) 式推出平衡态(6) 的局部瞬时稳定性的必要条件是:

$$\mu > \mu_c^{\max}(\delta, \lambda) = \begin{cases} \frac{n-1}{m}, & \delta \geq 1, \\ \max\left\{\frac{n-1}{m}, \mu_1, \mu_2\right\}, & 0 < \delta < 1, \end{cases} \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{m} \frac{k_N^2(n-1 - \delta k_N^2)}{1 + \delta k_N^2}, \\ \mu_2 &= \begin{cases} \frac{1}{m} \frac{k_{N+1}^2(n-1 - \delta k_{N+1}^2)}{1 + \delta k_{N+1}^2}, & N \leq \frac{\sqrt{n-1}}{\pi \sqrt{\delta \lambda}} - 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \\ N &= Z\left\{\frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{n-1}{\delta \lambda}}\right\}, \quad Z \text{ 为整数部分.} \end{aligned}$$

因此,对每一个  $\mu > \mu_c^{\max}(\delta, \lambda)$ , (8) 式中的主导阶项  $(u_{i0}, v_{i0})$  当  $t \rightarrow \infty$  时, 指数衰减. 平衡态(6) 对初值的小扰动是局部稳定的. 而对于  $0 < \mu < \mu_c^{\max}(\delta, \lambda)$ , (8) 式中的主导阶项当  $t \rightarrow \infty$  时, 是指数增长的, 即平衡态(6) 对初值的小扰动是局部不稳定的. 因此, 平衡态的稳定性条件主要由中性曲线  $L_1$  给出. 对于这类系统会出现斑图形式的图灵分歧解的一个必要条件是曲线  $\omega_1^{\pm} = 0$  的最大值应该在曲线  $\text{Re}(\omega_1^{\pm}) = 0$  的最大值的上方, 因此给出满足的条件是  $0 < \delta < (\sqrt{n-1})^2/(n-1)$ . 不稳定模型是那些满足  $r < (1/\pi) \sqrt{(n-1)/(\lambda\delta)}$  的点. 当  $\beta > (n-1)/2$  时, 中性曲线  $L_2$  不存在, 出现的仅仅是非耦合系统中的中性曲线, 这种情况在文献[2] 中被称为强耦合系统. 对于  $0 < \beta < (n-1)/2$  时的系统被相应的称为弱耦合系统, 在弱耦合系统中  $L_2$  中性曲线上的点不会出现在非耦合系统中的中性曲线上, 此曲线上的所有  $\mu$  的值在  $L_1$  曲线上的  $\mu$  取到最大值时已经失去了稳定性, 此时平衡态(6) 是不稳定的. 这些模型中的非一致平衡态的分歧至少是局部不稳定的, 因此弱耦合系统中的解不会出现在非耦合系统中.

## 2 弱非线性理论

这节, 利用扰动法中的弱非线性理论讨论在出现图灵不稳定性的分歧点处讨论分歧解的性质, 此时设参数满足条件  $0 < \delta < (\sqrt{n-1})^2/(n-1)$ , 且  $0 < \beta < (n-1)/2$  相应的分歧参数  $\mu_b$  的值为:

$$\mu_b = \frac{1}{m} \frac{k_b^2(n-1 - \delta k_b^2)}{1 + \delta k_b^2}, \quad (18)$$

或

$$\mu_b = \frac{1}{m} \frac{k_b^2(n-1 - 2\beta - \delta k_b^2)}{1 + 2\beta + \delta k_b^2}, \quad (19)$$

两种情况下波数均为  $k_b = b\pi\sqrt{\lambda}$ ,  $b = 1, 2, \dots, N$ ,  $N = Z(1/\pi) \sqrt{(\sqrt{n-1})/(\delta\lambda)}$ , 进一步, 我们引入分歧参数的小扰动  $\mu = \mu_b + \varepsilon^2/\nu$ , 其中  $\mu_b$  由(18) 式或(19) 式给出,  $\nu$  是常数,  $0 < \varepsilon \ll 1$  是扰动的测量参数, 这里考虑慢时间变量为  $\tau = \varepsilon^2 t$ , 相应的关于时间的导数为:

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial \tau}. \quad (20)$$

此时, 我们寻找系统(4) 和系统(5) 如下形式的渐进展开解

$$\begin{cases} u_1(x, t, \tau) = \mu^* + a_1(x, t, \tau) \varepsilon + a_2(x, t, \tau) \varepsilon^2 + a_3(x, t, \tau) \varepsilon^3 + \dots, \\ v_1(x, t, \tau) = \mu + b_1(x, t, \tau) \varepsilon + b_2(x, t, \tau) \varepsilon^2 + b_3(x, t, \tau) \varepsilon^3 + \dots, \\ u_2(x, t, \tau) = \mu^* + c_1(x, t, \tau) \varepsilon + c_2(x, t, \tau) \varepsilon^2 + c_3(x, t, \tau) \varepsilon^3 + \dots, \\ v_2(x, t, \tau) = \mu + d_1(x, t, \tau) \varepsilon + d_2(x, t, \tau) \varepsilon^2 + d_3(x, t, \tau) \varepsilon^3 + \dots, \end{cases} \quad (21)$$

将(21)式代入(4)式和(5)式, 我们可以得到在  $\varepsilon$  的各阶满足的方程

$$\begin{cases} L_b(a_1, b_1, c_1, d_1)^T = (0, 0, 0, 0)^T, \\ L_b(a_2, b_2, c_2, d_2)^T = f_1(a_1, b_1, c_1, d_1), \\ L_b(a_3, b_3, c_3, d_3)^T = f_2(a_1, b_1, c_1, d_1, a_2, b_2, c_2, d_2). \end{cases} \quad (22)$$

相应的边界条件为:

$$\frac{\partial a_i}{\partial x} = \frac{\partial b_i}{\partial x} = \frac{\partial c_i}{\partial x} = \frac{\partial d_i}{\partial x} = 0 \quad (x = 0, 1), (i = 1, 2, 3).$$

算子矩阵  $L_b$  定义为

$$L_b = \begin{pmatrix} \lambda \frac{d^2}{dx^2} - m\mu_b & & -n & & 0 & & & 0 \\ & m\mu_b & & \lambda \delta \frac{d^2}{dx^2} + (n-1) - \beta & & 0 & & \beta \\ & & 0 & & 0 & & \lambda \frac{d^2}{dx^2} - m\mu_b & -n \\ & & & \beta & & m\mu_b & & \lambda \delta \frac{d^2}{dx^2} + (n-1) - \beta \end{pmatrix}.$$

方程(22)是在线性化理论中得到的方程, 不失一般性可以给出其解为:

$$(a_1, b_1, c_1, d_1)^T = A(\tau) (q_1, q_2, q_3, q_4)^T \cos(b\pi x), \quad (23)$$

其中  $b = 1, 2, \dots, N$  中某一值,  $q_1/q_2 = q_3/q_4 = (-n)/(k_b^2 + m\mu_b)$ .

在  $O(\varepsilon^2)$  阶, 我们得到一个线性非齐次问题, 方程与前一个类型相同但现在出现了二次强迫项, 导致了主导阶项出现非线性项的相互制约. 我们仅考虑系统的解当  $t \rightarrow \infty$  时的极限, 计算后得到

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \\ d_2 \end{pmatrix} = -\frac{A^2}{2m\mu_b} \begin{pmatrix} D_1 \\ 0 \\ D_2 \\ 0 \end{pmatrix} + A^2 \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} \cos(2b\pi x).$$

其中  $D_1 = \frac{1}{2} \mu_b^{-m/(m+n-1)} q_2^2 \left[ n(n-1) + 2mn\mu_b \frac{q_1}{q_2} + m(m-1) \mu_b^2 \left( \frac{q_1}{q_2} \right)^2 \right]$ ,

$D_2$  的表达式与  $D_1$  相似, 只是将  $q_1, q_2$  用  $q_3, q_4$  代替, 振幅  $A$  是慢变时间  $\tau$  的函数, 其中

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2(\xi^2 - \alpha^2 \beta^2)} \left[ D_1 \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{pmatrix} + D_2 \begin{pmatrix} R_3 \\ R_4 \\ R_1 \\ R_2 \end{pmatrix} \right],$$

$$\xi = \theta\alpha - mn\mu_b, \quad \alpha = 4k_b^2 + m\mu_b, \quad \theta = n - 1 - \beta - 4\delta k_b^2,$$

$$R_1 = \alpha\beta^2 + n\xi - \xi\theta, \quad R_2 = \xi(m\mu_b - \alpha), \quad R_3 = -n\beta(\alpha - m\mu_b), \quad R_4 = \beta\alpha(\alpha - m\mu_b).$$

在  $O(\varepsilon^3)$  阶, 我们再一次得到一个非齐次问题, 线性项的部分相同

$$L_b \begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \\ c_3 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial a_1}{\partial \tau} \\ -\frac{\partial b_1}{\partial \tau} \\ -\frac{\partial c_1}{\partial \tau} \\ -\frac{\partial d_1}{\partial \tau} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{m}{\gamma} a_1 + P \\ -\left[ \frac{m}{\gamma} a_1 + P \right] \\ \frac{m}{\gamma} c_1 + Q \\ -\left[ \frac{m}{\gamma} c_1 + Q \right] \end{pmatrix}, \quad (24)$$

其中  $P = P(\mu_b, a_1, a_2, b_1, b_2)$ ,  $Q = Q(\mu_b, c_1, c_2, d_1, d_2)$ , 右端的强迫项出现非线性的约束, 我们同样考虑  $t \rightarrow \infty$  时, 系统的解的性质, 发现有奇异项的出现. 因此利用多重尺度法, 对方程(24)利用 Fredholm 可解条件, 我们得到主导阶项的振幅  $A$  满足的方程

$$\frac{dA}{d\tau} = -EA \left[ \frac{m}{\gamma} + GA^2 \right], \quad (25)$$

其中  $E$  是正常数,  $G$  是 Landau 常数, 为了化简  $G$ , 我们需要  $q_1/q_2$  的值. 考虑两种情况, 分歧点在曲线  $L_1$  和曲线  $L_2$  上. 当分歧点在曲线  $L_1$  上时, 有

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{n-1-\delta k_b^2}{-m\mu_b}, \quad \mu_b = \frac{k_b^2(n-1-\delta k_b^2)}{m(1+\delta k_b^2)}. \quad (26)$$

当分歧点在曲线  $L_2$  上时得到

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{n-1-2\beta-\delta k_b^2}{-m\mu_b}, \quad \mu_b = \frac{k_b^2(n-1-2\beta-\delta k_b^2)}{m(1+2\beta+\delta k_b^2)}. \quad (27)$$

经过计算后, 我们得到 Landau 常数  $G$  的函数关系. 进一步, 由振幅方程得到振幅  $A(\tau)$  的平衡态为:

$$A_s^2 = \frac{-m}{\gamma G}, \quad \tau \rightarrow \infty.$$

对于给定的  $m, n$ , 可以详细给出 Landau 常数  $G$  的符号. 如果  $G > 0$  我们令  $\gamma = -1$ , 此时局部斑图态分歧出现在  $\mu < \mu_b$  内. 考虑方程(26)说明解是稳定的. 如果  $G < 0$  我们令  $\gamma = 1$  此时斑图态分歧出现在  $\mu > \mu_b$  内但解是不稳定的. 对于给定的初始条件, 不失一般性我们得到两种情况下的斑图态分歧解为, 当  $\mu < \mu_b, G > 0$  时

$$\begin{cases} u_1(x, t) = \mu^{(1-n)/(m+n-1)} \pm \sqrt{\mu_b - \mu} \left[ \frac{m}{G} \right]^{1/2} q_1 \cos(b\pi x) + O(\varepsilon^2), \\ v_1(x, t) = \mu^{m/(m+n-1)} \pm \sqrt{\mu_b - \mu} \left[ \frac{m}{G} \right]^{1/2} q_2 \cos(b\pi x) + O(\varepsilon^2), \\ u_2(x, t) = \mu^{(1-n)/(m+n-1)} \pm \sqrt{\mu_b - \mu} \left[ \frac{m}{G} \right]^{1/2} q_3 \cos(b\pi x) + O(\varepsilon^2), \\ v_2(x, t) = \mu^{m/(m+n-1)} \pm \sqrt{\mu_b - \mu} \left[ \frac{m}{G} \right]^{1/2} q_4 \cos(b\pi x) + O(\varepsilon^2), \end{cases}$$

当  $\mu > \mu_b, G < 0$  时

$$\begin{cases} u_1(x, t) = \mu^{(1-n)/(m+n-1)} \pm \sqrt{\mu_b - \mu} \left[ \frac{-m}{G} \right]^{1/2} q_1 \cos(b\pi x) + O(\varepsilon^2), \\ v_1(x, t) = \mu^{m/(m+n-1)} \pm \sqrt{\mu_b - \mu} \left[ \frac{-m}{G} \right]^{1/2} q_2 \cos(b\pi x) + O(\varepsilon^2), \\ u_2(x, t) = \mu^{(1-n)/(m+n-1)} \pm \sqrt{\mu_b - \mu} \left[ \frac{-m}{G} \right]^{1/2} q_3 \cos(b\pi x) + O(\varepsilon^2), \\ v_2(x, t) = \mu^{m/(m+n-1)} \pm \sqrt{\mu_b - \mu} \left[ \frac{-m}{G} \right]^{1/2} q_4 \cos(b\pi x) + O(\varepsilon^2). \end{cases}$$

### 3 对于 $0 < \beta \ll 1$ 时的扰动分析

线性化理论已经证明当  $0 < \beta < (n-1)/2$  时, 仅仅出现耦合态对斑图的影响. 因此, 在本节我们以  $\beta (0 < \beta \ll 1)$  为扰动参数研究在  $\mu = \mu_b$  的邻域内解的性质. 首先引入分歧参数  $\mu$  的扰动式

$$\mu = \mu_b + \mu\beta, \quad (28)$$

其中  $\mu$  是  $O(1)$ ,  $\mu_b$  由(18)式给出, 以  $\beta^{1/2}$  幂作解的展开式, 同时引入多重尺度的慢时间变量  $\tau = \beta t$ , 设解的渐进展开式为:

$$\begin{cases} u_1(x, t, \tau) = \mu^* + \beta^{1/2} p_1 + \beta p_2 + \beta^{3/2} p_3 + \dots, \\ v_1(x, t, \tau) = \mu + \beta^{1/2} q_1 + \beta q_2 + \beta^{3/2} q_3 + \dots, \\ u_2(x, t, \tau) = \mu^* + \beta^{1/2} r_1 + \beta r_2 + \beta^{3/2} r_3 + \dots, \\ v_2(x, t, \tau) = \mu + \beta^{1/2} s_1 + \beta s_2 + \beta^{3/2} s_3 + \dots, \end{cases} \quad (29)$$

将以上各式代入(4)式并且以  $\beta$  的幂作展开, 得到一系列的方程. 在  $O(\beta^{1/2})$  阶( $p_1, q_1$ ) 和 ( $r_1, s_1$ ) 满足同一个方程

$$M_b \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = 0, \quad M_b = \begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = 0, \quad (30)$$

其中算子  $M_b$  为

$$M_b = \begin{pmatrix} \lambda \frac{d^2}{dx^2} - m\mu_b & -n \\ m\mu_b & \lambda \frac{d^2}{dx^2} + (n-1) \end{pmatrix}.$$

在  $O(\beta)$  阶, ( $p_2, q_2$ ) 和 ( $r_2, s_2$ ) 满足同一个方程

$$M_b \begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mu_b^{m/(m+n-1)} \left[ \frac{1}{2} n(n-1) q_1^2 + m\mu_b p_1 q_1 + \frac{1}{2} m(m-1) \mu_b^2 p_1^2 \right]. \quad (31)$$

( $r_2, s_2$ ) 满足的方程中, 将(31)式中的( $p_1, q_1$ )用( $r_1, s_1$ )代替.

在  $O(\beta^{3/2})$  阶, 耦合第1次出现, 得到的方程为:

$$M_b \begin{pmatrix} p_3 \\ q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} G_1 + \begin{pmatrix} 0 \\ q_1 - s_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial p_1}{\partial \tau} \\ \frac{\partial q_1}{\partial \tau} \end{pmatrix} \quad (32)$$

和

$$M_b \begin{pmatrix} r_3 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} G_2 + \begin{pmatrix} 0 \\ s_1 - q_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial \tau} \\ \frac{\partial s_1}{\partial \tau} \end{pmatrix}, \quad (33)$$

其中  $G_1 = G_1(p_1, q_1)$ ,  $G_2 = G_2(r_1, s_1)$ . 对于给定的初始条件, 不失一般性可以得到方程(30)的解为:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = A_1(\tau) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \cos(b\pi x), \quad \begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = A_2(\tau) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \cos(b\pi x),$$

其中  $d_1/d_2 = -(n-1 - \delta k_b^2)/(m\mu_b)$ , 振幅  $A_1$  和  $A_2$  是慢变时间  $\tau$  的函数. 二阶方程(31)的解为:

$$\begin{pmatrix} p_2 \\ q_2 \end{pmatrix} = \frac{A_1^2 D}{2\Delta(b)} \begin{pmatrix} 1 + 4\delta k_b^2 \\ -4k_b^2 \end{pmatrix} \cos(2b\pi x) + \frac{A_1^2 D}{2m\mu_b} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + B_1(\tau) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \cos(b\pi x),$$

$$\begin{pmatrix} r_2 \\ s_2 \end{pmatrix} = \frac{A_2^2 D}{2\Delta(b)} \begin{pmatrix} 1 + 4\delta k_b^2 \\ -4k_b^2 \end{pmatrix} \cos(2b\pi x) + \frac{A_2^2 D}{2m\mu_b} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + B_2(\tau) \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix} \cos(b\pi x),$$

其中

$$D = \frac{1}{2} \mu_b^{m/(m+n-1)} d_2^2 \left[ n(n-1) + 2mn\mu_b \frac{d_1}{d_2} + m(m-1) \mu_b^2 \left( \frac{d_1}{d_2} \right)^2 \right],$$

$$\Delta(b) = 4nk_b^2 - (4k_b^2 + m\mu_b)(1 + 4\delta k_b^2).$$

为了得到振幅  $A_1$  和  $A_2$  满足的方程, 对方程(33) 和方程(34) 利用 Fredholm 可解条件, 经过计算可得

$$\begin{cases} \frac{dA_1}{d\tau} = -k[A_1(m\mu + GA_1^2) + R(A_1 - A_2)], \\ \frac{dA_2}{d\tau} = -k[A_2(m\mu + GA_2^2) + R(A_2 - A_1)], \end{cases} \quad (34)$$

其中  $k$  是正常数,  $R = (m\mu_b + k_b^2)^2/(nk_b^2) > 0$ ,  $G$  是非耦合系统中的 Landau 常数. 为了进一步讨论渐进解的性质首先给出方程(34)的平衡态

$$A_{1s} = A_{2s} = 0, \quad (35)$$

$$A_{1s} = A_{2s}, \quad A_{1s}^2 = \frac{-m\mu}{G}, \quad (36)$$

$$A_{1s} = -A_{2s}, \quad A_{1s}^2 = \frac{-(m\mu + 2R)}{G}, \quad (37)$$

$$A_{1s}^2 = \frac{-(m\mu + R)}{G}, \quad A_{2s} = 0, \quad (38)$$

$$A_{1s}^2 = \frac{-(m\mu + R) \pm \sqrt{(m\mu + R)^2 - 4R^2}}{2G}, \quad A_{2s} = \frac{1}{GA_{1s}}. \quad (39)$$

当  $G > 0$  时, 对于  $\mu$  我们现在讨论这些振幅的变化. 当  $\mu < 0$  时, 解仅由(36) 式给出. 对于(37) 式的解要求  $\mu < -2R/m$ , (38) 式要求  $\mu < -R/m$ . 对于(39) 式不存在平凡的平衡态解但当  $\mu < -3R/m$  时, 将出现二阶分歧. 在耦合系统和非耦合系统中稳定性的讨论是同样的. 不论  $\mu_b$  是在曲线  $L_1$  上还是在曲线  $L_2$  上, 这个值仅仅影响 Landau 常数  $G$ . 对于平衡态的稳定性可以通过对每一种解计算关于特征值  $\lambda$  的雅可比行列式得到

$$\lambda^2 + [2m\mu + 2R + 3G(A_{1s}^2 + A_{2s}^2)]\lambda + (m\mu + R + 3GA_{1s}^2)(m\mu + R + 3GA_{2s}^2) - R^2 = 0, \quad (40)$$

将(35)式至(39)式代入(40)式,可以得到每一个解的稳定性. 当  $\mu > 0$  时, 平衡态(35) 是稳定的, 否则不稳定; 当  $\mu < 0$  时(解的存在区域), 由(36) 式给出的解是稳定的. 当  $\mu < -3R/m$  时, (37) 式稳定而对于  $\mu$  满足  $-3R/m < \mu < -2R/m$  时, 它不稳定. 无论  $\mu$  取何值, (38) 式都不稳定. (39) 式是由(37) 式分出的二阶分歧, 是不稳定的. 因此, 如果  $G > 0$ , 稳定的斑图态分歧将由(35) 式、(36) 式给出.

#### 4 对于 $\beta \gg 1$ 时的解的性质

本节中对于  $\beta \gg 1$  的情况进行讨论, 这种条件下的系统称为强耦合系统, 因此我们把  $1/\beta$  作为扰动参数, 相应的多重尺度变量是长时间变量  $T = \beta t$ , 解的渐近展开式为:

$$\begin{cases} u_i(x, t, T) = u_{i0}(x, t, T) + \beta^{-1}u_{i1}(x, t, T) + O(\beta^{-2}), \\ v_i(x, t, T) = v_{i0}(x, t, T) + \beta^{-1}v_{i1}(x, t, T) + O(\beta^{-2}), \end{cases} \quad (i = 1, 2), \quad (41)$$

关于时间的导数被下式代替

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial T}. \quad (42)$$

将(41)式和(42)式代入(4)式得到在  $O(\beta)$  阶, 主导阶项( $u_{10}, u_{20}$ ) 满足的方程为:

$$\frac{\partial u_{i0}}{\partial T} = 0 \quad (i = 1, 2).$$

可以得到此时解为:

$$u_{i0} = A_i(x, t) \quad (i = 1, 2),$$

其中  $A_i(x, t)$  是满足初边界条件的函数, 而在  $O(\beta)$  阶, 主导阶项( $v_{10}, v_{20}$ ) 满足的方程为:

$$\begin{cases} \frac{\partial v_{10}}{\partial T} = v_{20} - v_{10}, \\ \frac{\partial v_{20}}{\partial T} = v_{10} - v_{20}. \end{cases} \quad (43)$$

易得解为:

$$\begin{cases} v_{10} = B_1(x, t) + B_2(x, t)e^{-2T}, \\ v_{20} = B_1(x, t) - B_2(x, t)e^{-2T}, \end{cases} \quad (44)$$

其中  $B_i(x, t)$  ( $i = 1, 2$ ) 也是满足初边界条件的函数. 进一步在  $O(1)$  阶, 我们得到

$$\frac{\partial A_i}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} - \mu + A_i^m B_1^n = -A_i^m n B_1^{n-1} (\pm B_2 e^{-2T}) + O(e^{-2T}) - \frac{\partial u_{i1}}{\partial T}, \quad (45)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial v_{11}}{\partial T} + v_{11} - v_{21} = -\frac{\partial B_1}{\partial t} + \lambda \delta \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} + A_1^m B_1^n - B_1 + O(e^{-2T}), \\ \frac{\partial v_{21}}{\partial T} + v_{21} - v_{11} = -\frac{\partial B_1}{\partial t} + \lambda \delta \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} + A_2^m B_1^n - B_1 + O(e^{-2T}), \end{cases} \quad (46)$$

因为方程(45)和方程组(46)将产生形如  $O(T\beta^{-1})$  阶的奇异项, 所以为了消除奇异项, 在方程中令产生奇异项的项等于0, 我们得到待定函数  $A_i$  ( $i = 1, 2$ ),  $B_1$  满足的方程

$$\begin{cases} \frac{\partial A_i}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 A_i}{\partial x^2} + \mu - A_i^m B_1^n \quad (i = 1, 2), \\ \frac{\partial B_1}{\partial t} = \lambda \delta \frac{\partial^2 B_1}{\partial x^2} + (A_1^m + A_2^m) B_1^n - 2B_1, \end{cases} \quad (47)$$

我们令  $\xi = A_1 + A_2$ ,  $\eta = A_1 - A_2$ , (47)式变为:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \eta B_1^n p_1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \mu - \xi B_1^n p_2, \quad (48)$$

其中  $p_1 \eta = A_1^m - A_2^m$ ,  $p_2 \xi = A_1^m + A_2^m$ , 对于方程(48) 两端同乘以  $\eta$  并且从 0 到 1 积分利用边界条件有

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_0^1 \eta^2 dx \right] = - \lambda \int_0^1 \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \eta^2 B_1^n p_1 \right] dx, \quad (49)$$

对于适当给定的  $m, n$  可以得到当  $t \rightarrow \infty$  时  $\eta \rightarrow 0$ , 即  $A_2 \rightarrow A_1$ , 此时, 对于这类强耦合系统, 在每个区域自催化剂的浓度变得相等, 都是  $O(\beta^{-1})$  阶, 而对于更长的时间变量 ( $O(1)$  阶), 反应物的浓度变得相等.

## 5 总 结

对于高次自催化耦合反应系统, 由以上讨论可以得到平衡(6) 的稳定性主要由非耦合系统决定, 即由中性曲线  $L_1$  给出平衡态稳定的必要条件

$$\mu > \mu_c^{\max}(\delta, \lambda) = \begin{cases} \frac{n-1}{m}, & \delta \geq 1, \\ \max \left\{ \frac{n-1}{m}, \mu_1, \mu_2 \right\}, & 0 < \delta < 1, \end{cases}$$

在曲线  $L_1$  的一个分支上可能产生 Hopf 分歧, 另一个分支上产生 Turing 分歧, 我们主要给出了 Turing 分歧的讨论, 当 Landau 常数  $G > 0$  时, 分歧出现在  $\mu > \mu_b$  内, 我们可以得到稳定的图灵分歧解

$$\begin{cases} u_1(x, t) = \mu^{(1-n)/(m+n-1)} \pm \sqrt{\mu_b - \mu} \left( \frac{m}{G} \right)^{1/2} q_1 \cos(b\pi x) + O(\varepsilon^2), \\ v_1(x, t) = \mu^{m/(m+n-1)} \pm \sqrt{\mu_b - \mu} \left( \frac{m}{G} \right)^{1/2} q_2 \cos(b\pi x) + O(\varepsilon^2), \\ u_2(x, t) = \mu^{(1-n)/(m+n-1)} \pm \sqrt{\mu_b - \mu} \left( \frac{m}{G} \right)^{1/2} q_3 \cos(b\pi x) + O(\varepsilon^2), \\ v_2(x, t) = \mu^{m/(m+n-1)} \pm \sqrt{\mu_b - \mu} \left( \frac{m}{G} \right)^{1/2} q_4 \cos(b\pi x) + O(\varepsilon^2), \end{cases}$$

当以弱耦合参数  $\beta$  作为扰动参数时, Turing 分歧附近的稳定分歧解为:

$$\begin{bmatrix} u_1(x, t) - \mu^* \\ v_1(x, t) - \mu \\ u_2(x, t) - \mu^* \\ v_2(x, t) - \mu \end{bmatrix} \sim \beta^{1/2} \sqrt{\frac{-m\mu}{G}} [d_1, d_2, d_3, d_4]^{\perp} \cos(b\pi x).$$

对于强耦合系统来说, 以  $1/\beta$  作为扰动参数时, 对于给定的  $m, n$  我们获得, 在每个区域自催化剂的浓度变得相等, 时间尺度是  $O(\beta^{-1})$  阶, 而反应物的浓度是 ( $O(1)$ ).

## [参 考 文 献]

- [1] David J Wollkind, Laura E Stephenson. Chemical Turing pattern formation analyses: comparison of theory with experiment[J]. SIAM J Appl Math, 2000, 61(2): 387-431.
- [2] Hill R, Merkin J H. Pattern formation in a coupled cubic autocatalator system[J]. IMA J Appl Math, 1994, 53(3): 265-322.
- [3] Hill R, Merkin J H, Needham D J. Stable pattern and standing wave formation in a simple isothermal

- cubic autocatalytic reaction scheme[ J]. *Journal of Engineering Mathematics*, 1995, **29**(3): 413-436.
- [4] Hill R, Merkin J H. The effects of coupling on pattern formation a simple autocatalytic system[ J]. *IMA J Appl Math*, 1995, **54**(3): 257-281.
- [5] Metcalf M J, Merkin J H. Reaction diffusion waves in coupled isothermal autocatalytic chemical systems[ J]. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 1993, **51**(3): 269-298.
- [6] Collier S M, Merkin J H, Scott S K. Multistability, oscillations and travelling waves in a product-feedback autocatalator model II: The initiation and propagation of travelling waves[ J]. *Phil Trans R Soc Lond A*, 1994, **349**(1691): 389-415.
- [7] Merkin J H, Needham D J, Scott S K. Coupled reaction-diffusion waves in an isothermal autocatalytic chemical system[ J]. *IMA J Appl Math*, 1993, **50**(1): 43-76.
- [8] Dezso Hovvath, Agota Toth, Turing patterns in a single-step autocatalytic reaction[ J]. *J Chem Soc Faraday Trans*, 1997, **93**(24): 4301-4303.
- [9] Merkin J H, Sevcikova H, Snita D. The effect of an electric field on the local stoichiometry of front waves in an ionic chemical system[ J]. *IMA J Appl Math*, 2000, **64**(2): 157-188.
- [10] Merkin J H, Sevcikova H. The effects of a complexing agent on travelling waves in autocatalytic systems with applied electric fields[ J]. *IMA J Appl Math*, 2005, **70**(4): 527-549.
- [11] Metcalf M J, Merkin J H, Scott S K. Oscillating wave fronts in isothermal chemical systems with arbitrary powers of autocatalysis[ J]. *Proc R Soc Lond A*, 1994, **447**(1929): 155-174.
- [12] Hubbard M E, Leach J A, Wei J C. Pattern formation in a 2D simple chemical system with general orders of autocatalysis and decay[ J]. *IMA J Appl Math*, 2005, **70**(6): 723-747.

## Bifurcation and Patterns Formation in a Coupled Higher Autocatalator Reaction Diffusion System

ZHANG Li, LIU Sang-yang

(Department of Applied Mathematics, Xidian University,  
Xi'an 710071, P. R. China)

**Abstract:** Spatiotemporal structures arising in two identical cells, which are governed by higher autocatalator kinetics and coupled via diffusive interchange of autocatalyst, are discussed. The stability of the unique homogeneous steady state is obtained by the linearized theory. A necessary condition for bifurcations to spatially non-uniform solutions in uncoupled and coupled systems is given. Further information about Turing pattern solutions near bifurcation points is obtained by weakly nonlinear theory. Finally, the stability of equilibrium points of the amplitude equation is discussed by weakly nonlinear theory, with the bifurcation branches of the weakly coupled system.

**Key words:** reaction diffusion system; stability; bifurcation; pattern