

一类新的含有垂直传染与脉冲免疫的时滞 SEIR 传染病模型的全局动力学行为*

孟新柱^{1,2}, 陈兰荪², 宋治涛¹

(1. 山东科技大学 理学院, 山东 青岛 266510;

2. 大连理工大学 应用数学系, 辽宁 大连 116024)

(陈立群推荐)

摘要: 对一个带有有害时滞与垂直传染的 SEIR 传染病模型, 在脉冲免疫接种条件下, 分析了其动力学行为. 运用离散动力系统的频闪映射, 获得了一个‘无病’周期解, 证明了当模型的一些参数在适当的条件下, 该‘无病’周期解是全局吸引的. 运用脉冲时滞泛函微分方程理论, 获得了含有时滞的持久性的充分条件, 并且证明了时滞、脉冲免疫与垂直传染对模型的动力学行为能够产生显著的影响. 结论表明该时滞是‘有害’时滞.

关键词: 持久性; 脉冲免疫接种; 水平与垂直传染; 时滞; 全局吸引力

中图分类号: O175 **文献标识码:** A

引 言

我们常见的传染病模型都是 SIR(易感者, 染病者, 恢复类)模型. 然而, 许多传染病在宿主发病前都要在宿主体内潜伏一段时间. 例如, 麻疹病毒有 8 天~ 13 天的潜伏期, 人类从感染狂犬病毒后到发病, 狂犬病毒在体内的潜伏期有可能少则几个月多则几年. 要考虑潜伏期, 还需要考虑一个新的传染病群体, 即, 潜伏者. 在这种情形下, 我们称这种传染病模型为 SEIR(易感者, 潜伏者, 染病者, 恢复类)模型^[1-8].

一方面, 染病者的后代在出生时有可能被其染病的母亲所传染, 例如: 肝炎、肺结核等. 这被称为垂直传染. 另一方面, 一些疾病可以通过易感者与染病者接触而进行传染. 最近, 一些垂直传染病模型被 Michael, Fine, Busenberg 和 Cook^{[2], [9-12]} 等人研究过. 可是, 关于脉冲免疫接种与垂直传染的传染病模型的文献并不多见^[13-14]. 陆^[13] 以及 Alberto d' Onofrio^[14] 考虑了对所有的易感者采取免疫接种, 并且做出了在垂直传染条件下关于脉冲免疫接种的一些初始的工作. 事实上, 一方面, 在疾病垂直传染条件下, 应该对在出生时没有被母亲垂直传染而转到易感者的那部分新生儿进行免疫接种(被垂直传染的新生儿不能进行免疫接种). 另一方面, 在疾病垂直传染条件下, 对易感者、潜伏者及恢复类的新生儿后代全部进行免疫接种. 在最近几

* 收稿日期: 2007-04-23; 修订日期: 2007-04-16

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10471117)

作者简介: 孟新柱(1972-), 男, 山东定陶人, 博士, 副教授, 从事生物数学研究(联系人, E-mail: mxz721106@sdu.edu.cn).

年,作为一种策略,脉冲免疫接种被重复运用到一定年龄段的人群,根除象麻疹、肝炎、天花和肺结核等易在孩童时期传染的疾病. 脉冲免疫接种策略(PVS)^{[7-8],[13-16]},就是把所有的人口进行年龄分组,对某一年龄组周期循环地进行瞬时免疫接种,这不同于传统的对所有人进行持续免疫接种.

Van den Driessche 和 Watmough^[17-18]研究了一个传染率形式为 $\beta I(1 + \mathcal{U}^{k-1})S$ ($\beta > 0, \mathcal{U} \geq 0$ 和 $k > 0$). 当 $\mathcal{U} = 0$ 这个传染率就是双线性传染率 βIS . 在文献[17]中,他们研究了一个传染率是 $\mathcal{U} > 0$ 和 $k = 2$ 的 SIS 模型,讨论了后向分支及平衡点的局部与全局稳定性. Alexander 和 Moghadas^[19]提出并分析了一个含有一般的非线性传染率 $f(I; \mathcal{U})$ 的 SIV 模型,并对当 $\beta > 0, \mathcal{U} \geq 0$ 和 $0 < q \leq 1$ 时,传染率为 $\beta(1 + \mathcal{U}^q)S$ 的特殊情况进行了详细地研究. 从以前的工作可以看出,传染率 $\beta(1 + \mathcal{U}^{k-1})S$ 不能详细具体地表达疾病的全球的传播效果,本文希望继续他们的工作,并且从理论上详细地分析一个含有当 $k = 2$ 或者 $q = 1$ 时的传染率为 $\beta(t)(1 + \mathcal{U}(t))S(t)$ 的 SEIR 模型,致使能够清楚地表明这个非线性传染率对流行病传播动力学的影响.

一般地,考虑到潜伏期就会导致模型中含有时滞. 于是在潜伏期间的死亡就应该被考虑,这就涉及到‘时滞’现象,于是,时滞在传染病模型中有着重要的生物学意义. 最近,文献[20]至文献[23]广泛研究了时滞模型. 时滞与脉冲引入传染病模型极大地丰富了生物学背景. 根据以上的生物学观点,我们提出了一个在脉冲免疫条件下含有水平与垂直传染的时滞 SEIR 传染病模型,并且研究它的动力学行为(‘无病’周期解,持久性,全局吸引性行为). 本文的主要特色是把一个离散时滞、垂直传染和脉冲引入到 SEIR 传染病模型,并且获得了一些关于有效的脉冲接种策略的含有时滞的重要的定性性质.

1 SEIR 模型和预备知识

根据文献[1]至文献[23],我们进一步假设:

- 死亡率(d)等于出生率(b)(这里 $d = b = \mu$),也就是说,种群总数恒定为一个常量,被规格化为 $N = S(t) + E(t) + I(t) + R(t) = 1$.
- 只对那些转到易感者类的新生儿进行脉冲接种治疗.
- 疾病进行水平与垂直传播, $p\mathcal{M}$ (这里 $0 < p < 1$)是转到易感者类的染病者的那部分新生儿的数量, $q\mathcal{M}$ (这里 $0 < q < 1$ 和 $p + q = 1$)是被垂直传染的染病者的那部分新生儿的数量,并立刻转到‘潜伏者’类.
- 在本文模型中的非线性传染率的形式是 $\beta I(t)(1 + \mathcal{U}(t))S(t)$ ^[17-19],这里 $\beta > 0, \mathcal{U} \geq 0$.
- 假设流行病扩散是通过具有潜伏期 τ 的带菌者进行的,于是 $\beta e^{-\mu\tau} I(t - \tau)(1 + \mathcal{U}(t - \tau))S(t - \tau) + q\mu e^{-\mu\tau} I(t - \tau)$ 项表示潜伏者(E) 在时间 $t - \tau$ 时刻的数量(即 $\beta I(t - \tau)(1 + \mathcal{U}(t - \tau))S(t - \tau) + q\mathcal{M}(t - \tau)$),经过潜伏期 τ 在时间 t 时刻除去死亡后存活的数量(这里潜伏者的死亡率为 μ),因此,表示的是潜伏类向染病类转化的数量.

根据上面的假设,我们考虑一个具有离散时滞和脉冲免疫的 SEIR 模型如下:

$$\left\{ \begin{aligned} S(t) &= -\beta I(t)(1 + \mathcal{U}(t))S(t) - \mu S(t) + \\ &\quad \mu(S(t) + E(t) + R(t)) + p\mathcal{W}(t), \\ E(t) &= \int_{t-\tau}^t e^{-\mu(t-s)} [\beta I(s)(1 + \mathcal{U}(s))S(s) + q\mathcal{W}(s)] ds, \\ I(t) &= \beta e^{-\mu\tau} I(t - \tau)(1 + \mathcal{U}(t - \tau))S(t - \tau) + \\ &\quad q\mu e^{-\mu\tau} I(t - \tau) - (r + \mu)I(t), \\ R(t) &= rI(t) - \mu R(t), \\ S(t^+) &= S(t) - m\mu(S(t) + E(t) + R(t)) - mp\mathcal{W}(t), \\ E(t^+) &= E(t), \\ I(t^+) &= I(t), \\ R(t^+) &= R(t) + m\mu(S(t) + E(t) + R(t)) + mp\mathcal{W}(t), \\ S(t) + E(t) + I(t) + R(t) &= 1, \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} t &\neq nT, \\ t &= nT, \end{aligned} \quad (1)$$

这里 $m(0 < m < 1)$ 是所有转到易感类的新生儿中免疫接种成功的比例. 在 t 时刻出生的染病类的新生儿没有被垂直感染而转到‘易感类’(S)的数量是 $p\mathcal{W}(t)$ (这里 $0 < p < 1$). 在 t 时刻出生的染病类的新生儿被垂直感染而转到‘潜伏类’(E)的数量是 $q\mathcal{W}(t)$ (这里 $0 < q < 1$ 和 $p + q = 1$). 从系统(1)的第5个方程和第8个方程, 我们看到被采取接种治疗的是没有被垂直感染而转到‘易感类’(S)的染病类的新生儿及易感类、潜伏类和恢复类的所有新生儿, 分别是 $mp\mathcal{W}(t)$ 项和 $m\mu(S(t) + E(t) + R(t))$ 项.

为方便起见, 我们把系统(1)改写为

$$\left\{ \begin{aligned} S(t) &= \mu - \beta I(t)(1 + \mathcal{U}(t))S(t) - \mu S(t) - q\mu I(t), \\ E(t) &= \int_{t-\tau}^t e^{-\mu(t-s)} [\beta I(s)(1 + \mathcal{U}(s))S(s) + q\mathcal{W}(s)] ds, \\ I(t) &= \beta e^{-\mu\tau} I(t - \tau)(1 + \mathcal{U}(t - \tau))S(t - \tau) + \\ &\quad q\mu e^{-\mu\tau} I(t - \tau) - (r + \mu)I(t), \\ R(t) &= rI(t) - \mu R(t), \\ S(t^+) &= S(t) - m\mu + mq\mathcal{W}(t), \\ E(t^+) &= E(t), \\ I(t^+) &= I(t), \\ R(t^+) &= R(t) + m\mu - mq\mathcal{W}(t), \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} t &\neq nT, \\ t &= nT, \end{aligned} \quad (2)$$

注意到在系统(2)中的脉冲项 $S(t^+) = S(t) - mb + mbqI(t)$, 不同于在文献[13]至文献[16]中的脉冲项 $S(t^+) = (1 - \theta)S(t)$, 也就是说, 该脉冲免疫项涉及到 S 和 I 在 nT 时刻的状态.

关于与上述混合脉冲条件类似的文献可以参见文献[24]和文献[25]. 我们注意到传染病的初始状态 $(S(0), I(0))$ 使 $S(0) - mb + mbqI(0) \leq 0$ (当免疫比例 m 非常大时), 于是易感类经过初次脉冲后变为非正, 即 $S(0^+) \leq 0$, 这意味着所有的易感类经过初次脉冲后立刻转到恢复类, 于是, 我们把传染病根除的目的就达到了. 但是, 从现实与经济上考虑, 我们希望最少数的易感类被免疫就能使传染病最终被根除. 因此, 在下文中我们需要找到在 $S(0) - mb + mbqI(0) > 0$ 条件下最终根除传染病的策略.

因为变量 E 和 R 没有出现在系统(2)的第1个方程和第3个方程, 于是我们只需研究系统(2)的子系统:

$$\left. \begin{cases} S'(t) = \mu - \beta I(t)(1 + U(t))S(t) - \mu S(t) - q\mu I(t), \\ I'(t) = \beta e^{-\mu\tau} I(t - \tau)(1 + U(t - \tau))S(t - \tau) + \\ \quad q\mu e^{-\mu\tau} I(t - \tau) - (r + \mu)I(t), \\ S(t^+) = S(t) - m\mu + mqU(t), \\ I(t^+) = I(t), \end{cases} \right\} \quad \begin{matrix} t \neq nT, n \in \mathbf{N}, \\ t = nT, n \in \mathbf{N}. \end{matrix} \quad (3)$$

下面我们将给出一些在我们主要结果中用到的定义、符号和引理. 系统(3)的初始条件为

$$(\phi_1(s), \phi_2(s)) \in \mathbf{C}_+ = C([- \tau, 0], \mathbf{R}_+^2), \phi_i(0) > 0, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

从生物学的观点来看,我们只考虑系统(3)在如下的生物意义区域:

$$\mathcal{D} = \{(S, I) \mid S, I \geq 0, S + I \leq 1\}.$$

开始我们的定理前,给出下面的引理.

引理 1(参见文献[24]) 考虑下面的脉冲微分不等式:

$$\begin{aligned} w(t)' &\leq (\geq) p(t)w(t) + q(t), & t \neq t_k, \\ w(t_k^+) &\leq (\geq) d_k w(t_k) + b_k, & t = t_k, k \in \mathbf{N}, \end{aligned}$$

这里 $p(t), q(t) \in C[\mathbf{R}_+, \mathbf{R}]$, $d_k \geq 0$ 以及 b_k 是常数. 假设

(A₀) 序列 $\{t_k\}$ 满足 $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots$, 以及 $\lim_{t \rightarrow \infty} t_k = \infty$;

(A₁) $w \in PC'[\mathbf{R}_+, \mathbf{R}]$ 和 $w(t)$ 在 $t_k (k \in \mathbf{N})$ 左连续.

则

$$\begin{aligned} w(t) &\leq (\geq) w(t_0) \prod_{t_0 < t_k < t} d_k \exp\left[\int_{t_0}^t p(s) ds\right] + \sum_{t_0 < t_k < t} \left[\prod_{t_k < t_j < t} d_j \exp\left[\int_{t_k}^t p(s) ds\right] \right] b_k + \\ &\int_{t_0}^t \prod_{s < t_k < t} d_k \exp\left[\int_s^t p(\theta) d\theta\right] q(s) ds, \quad t \geq t_0. \end{aligned}$$

引理 2^[26] 考虑下面的时滞微分方程

$$\frac{dx(t)}{dt} = r_1 x(t - \tau) - r_2 x(t),$$

这里 r_1, r_2, τ 都是正的常数并且当 $t \in [- \tau, 0]$ 时, $x(t) > 0$.

(i) 如果 $r_1 < r_2$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$;

(ii) 如果 $r_1 > r_2$, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = + \infty$.

2 系统(3)的‘无病’周期解的全局吸引力

分析系统(3), 首先从研究该系统‘无病’周期解的存在性开始, 此时染病类将永久地完全缺失, 即

$$I(t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (5)$$

这根据 $I^* = 0$ 对变量 $I(t)$ 来说是 $I'(t) = 0$ 的一个平衡解. 在这个假设下, 下面将表明易感类种群出现周期振荡且与周期脉冲接种具有相同的周期. 接下来, 我们确定这个‘无病’周期解的全局吸引力. 在(5)式的假设下, 我们知道易感类在时间段 $nT < t \leq (n+1)T$ 的增长, 并给出系统(3)的下面子系统的一些基本性质:

$$\left\{ \begin{aligned} S'(t) &= \mu - \mu S(t), & t \neq nT, n \in \mathbf{N}, \\ S(t^+) &= S(t) - m\mu, & t = nT, n \in \mathbf{N}. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

这里

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= S(0^+)e^{-\mu t}, \quad \Delta_2 = (-mp\mu) \sum_{0 < nT < t} e^{-\mu(t-nT)} = (-mp\mu)e^{-\mu t} \frac{e^{\mu T}(1 - e^{\mu(l/T)T})}{1 - e^{\mu T}}, \\ \Delta_3 &= e^{-\mu t} \int_0^t \prod_{s < nT < t} e^{\mu s} ds = e^{-\mu t} \int_0^{l/T} \prod_{\xi < nT < l/T} e^{\mu \xi} d\mu \xi = \\ &= e^{-\mu t} \left[\int_{0 \leq \xi < nT < l/T} e^{\mu \xi} d\mu \xi + \int_{1 \leq \xi < nT < l/T} e^{\mu \xi} d\mu \xi + \dots + \int_{[l/T] \leq \xi < nT < l/T} e^{\mu \xi} d\mu \xi \right] = \\ &= e^{-\mu t} \left[\frac{(e^{\mu T} - 1)(1 - (e^{\mu T})^{[l/T]})}{1 - e^{\mu T}} + e^{\mu t} - e^{\mu T[l/T]} \right]. \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} S(t) &\leq \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = e^{-\mu t} \left[S(0^+) + \frac{mp\mu e^{\mu T}}{e^{\mu T} - 1} - 1 \right] + 1 - \frac{mp\mu e^{\mu T(l/T) + 1 - l/T}}{e^{\mu T} - 1} \leq \\ &= e^{-\mu t} \left[S(0^+) + \frac{mp\mu e^{\mu T}}{e^{\mu T} - 1} - 1 \right] + 1 - \frac{mp\mu}{e^{\mu T} - 1}, \end{aligned}$$

这意味着

$$\limsup_t S(t) \leq 1 - \frac{mp\mu}{e^{\mu T} - 1}, \quad (11)$$

也就是说, 存在一个正整数 n_1 及上面的正常数 ε , 使对 $t \geq n_1 T$, 有

$$S(t) \leq 1 - \frac{mp\mu}{e^{\mu T} - 1} + \varepsilon =: \eta. \quad (12)$$

由式(12)及系统(3)的第2个方程, 对 $t > n_1 T + \tau$, 有

$$I^*(t) \leq \beta e^{-\mu \tau} (1 + \nu) \eta + q\mu e^{-\mu \tau} I(t - \tau) - (r + \mu)I(t). \quad (13)$$

考虑下面的比较方程

$$\frac{dz(t)}{dt} = e^{-\mu t} [\beta(1 + \nu)\eta + q\mu] z(t - \tau) - (r + \mu)z(t).$$

由式(10), 得 $e^{-\mu \tau} [\beta(1 + \nu)\eta + q\mu] < (r + \mu)$. 根据引理2, 知 $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$. 因为对所有的 $s \in [-\tau, 0]$ 有 $I(s) = z(s) = \phi_2(s) > 0$, 所以根据脉冲微分方程的比较定理(文献[24]中的定理3.1.1)及解的非负性(即 $I(t) \geq 0$), 当 $t \rightarrow \infty, I(t) \rightarrow 0$. 不失一般性, 我们假设对所有的 $t \geq 0, 0 < I(t) < \varepsilon < 1/q$. 由系统(3)的第1个方程及第3个方程知

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} \geq \mu - q\mu\varepsilon - (\beta\varepsilon(1 + \nu\varepsilon) + \mu)S(t), \\ S(t^+) \geq S(t) - m\mu. \end{cases}$$

于是我们有, 当 $\varepsilon \rightarrow 0, z_1(t) \rightarrow S^*(t)$, 这里 $z_1(t)$ 是

$$\begin{cases} \frac{dz_1(t)}{dt} = \mu - q\mu\varepsilon - (\beta\varepsilon(1 + \nu\varepsilon) + \mu)z_1(t), & t \neq nT, n \in \mathbb{N}, \\ z_1(t^+) = z_1(t) - m\mu, & t = nT, n \in \mathbb{N}, \\ z_1(0^+) = S(0^+) \end{cases} \quad (14)$$

的惟一一个正周期解. 由式(14)知, 对 $nT < t \leq (n+1)T$, 有

$$z_1(t) = \frac{\mu - q\mu\varepsilon}{\beta\varepsilon(1 + \nu\varepsilon) + \mu} - \frac{m\mu}{1 - e^{-(\beta\varepsilon(1 + \nu\varepsilon) + \mu)T}} e^{-(\beta\varepsilon(1 + \nu\varepsilon) + \mu)(t - nT)}.$$

根据脉冲微分方程的比较定理(文献[24]中的定理3.1.1), 对任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $T_1 > 0$, 使

$$S(t) > z_1(t) - \varepsilon, \quad \text{关于 } t > T_1. \quad (15)$$

另一方面,由式(3)的第1个方程和第3个方程,得

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} \leq \mu - \mu S(t), \\ S(t^+) \leq S(t) - m\mu + mq\mu\varepsilon. \end{cases}$$

因此,当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $S(t) \leq z_2(t)$ 及 $z_2(t) \rightarrow S^*(t)$, 这里 $z_2(t)$ 是方程

$$\begin{cases} \frac{dz_2(t)}{dt} = \mu - \mu z_2(t), & t \neq nT, n \in \mathbf{N}, \\ z_2(t^+) = z_2(t) - m\mu + mq\mu\varepsilon, & t = nT, n \in \mathbf{N}, \\ z_2(0^+) = S(0^+) \end{cases} \quad (16)$$

惟一全局渐近稳定的正周期解.

由式(16)知,对 $nT < t \leq (n+1)T$, 有

$$z_2(t) = 1 - \frac{m\mu - mq\mu\varepsilon}{1 - e^{-\mu T}} e^{-\mu(t-nT)}.$$

根据脉冲微分方程的比较定理,对上面的 ε_1 , 存在 $T_2 > 0$ 使

$$S(t) < z_2(t) + \varepsilon_1, \quad \text{关于 } t > T_2. \quad (17)$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 由式(15)和式(17)可以推得

$$S^*(t) - \varepsilon_1 < S(t) < S^*(t) + \varepsilon_1, \quad (18)$$

关于 t 足够大成立,这意味着,当 $t \rightarrow \infty$ 时, $S(t) \rightarrow S^*(t)$. 证毕.

推论 1 (i) 若 $\beta(1+\nu) + q\mu \leq e^{\mu T}(r+\mu)$ 和 $m\mu/(1-e^{-\mu T}) < 1$, 这意味着 $\mathcal{R}_1 < 1$, 则无病'周期解 $(S^*(t), 0)$ 是全局吸引的. (ii) 若 $\beta(1+\nu) + q\mu > e^{\mu T}(r+\mu)$, $m\mu/(1-e^{-\mu T}) < 1$ 及 $m > m^*$ 或者 $T < T^*$ 或者 $\tau > \tau^*$ 或者 $q < q^*$, 则无病'周期解 $(S^*(t), 0)$ 是全局吸引的, 这里的几个关键参数 m^* 、 T^* 、 τ^* 和 q^* 如下:

$$\begin{aligned} m^* &= \frac{e^{\mu T} - 1}{p\mu} \frac{\beta(1+\nu) + q\mu - e^{\mu T}(r+\mu)}{\beta(1+\nu)}, \\ T^* &= \frac{1}{\mu} \ln \left[1 + \frac{p\mu m\beta(1+\nu)}{\beta(1+\nu) + q\mu - e^{\mu T}(r+\mu)} \right], \\ \tau^* &= \frac{1}{\mu} \ln \frac{\beta(1+\nu)(e^{\mu T} - 1 - mp\mu) + q\mu(e^{\mu T} - 1)}{(e^{\mu T} - 1)(r+\mu)}, \\ q^* &= 1 - \frac{(e^{\mu T} - 1)[\beta(1+\nu) + \mu - e^{\mu T}(r+\mu)]}{\mu[m\beta(1+\nu) + e^{\mu T} - 1]}. \end{aligned}$$

在第2节我们讨论了传染病被根除的条件. 而系统的持久性意味着疾病能够传播或者形成流行病. 因此, 现在有必要研究系统(3)的持久性.

3 持久性

开始我们的定理前, 先给出下面的定义.

定义 1 如果存在一个紧集 $D \subset \mathcal{D}$, 使系统(3) 满足初始条件(4) 的任意一个解最终进入并保留在 D 内, 系统(3) 被称为是持久的.

记

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{\beta(e^{\mu T} - 1)}{e^{\mu T}(r+\xi)(e^{\mu T} - 1) + m\beta\mu}, \\ R_3 &= \frac{p(e^{\beta(1+\nu)+\mu T} - 1)}{m[\beta(1+\nu) + \mu]}, \quad \text{这里 } \xi = \mu(1 - qe^{-\mu T}). \end{aligned}$$

定理2 若 $\mathcal{R}_2 = \min\{R_2, R_3\} > 1$, 则系统(3)是持久的.

证 假设 $X(t) = (S(t), I(t))$ 是系统(3)满足初始条件(4)的任意一个正解. 由系统(3)的第2个方程, 得

$$\begin{aligned} I'(t) &= [\beta e^{-\mu\tau}(1 + \mathcal{U}(t))S(t) - (r + \xi)]I(t) - \\ &e^{-\mu t} \frac{d}{dt} \int_{t-\tau}^t [\beta(1 + \mathcal{U}(\theta))S(\theta) + q\mu]I(\theta)d\theta, \end{aligned} \quad (19)$$

这里

$$\xi = \mu(1 - qe^{-\mu\tau}). \text{ 定义}$$

$$V(t) = I(t) + e^{-\mu t} \int_{t-\tau}^t [\beta(1 + \mathcal{U}(\theta))S(\theta) + q\mu]I(\theta)d\theta.$$

沿着系统(3)的解, 计算 $V(t)$ 的导数, 并结合(19)式, 得

$$\frac{dV(t)}{dt} = (r + \xi) \left[\frac{\beta e^{-\mu t}(1 + \mathcal{U}(t))}{r + \xi} S(t) - 1 \right] I(t). \quad (20)$$

由于 $R_2 > 1$, 则方程

$$\frac{\beta \mathcal{U}}{\mu R_2} m_2^{*2} + \left(\frac{\beta}{\mu R_2} + q \right) m_2^* + \frac{1}{R_2} - 1 = 0$$

有惟一正解 m_2^* . 因此,

$$\frac{\beta e^{-\mu\tau}}{r + \xi} \left[\frac{\mu(1 - qm_2^*)}{\beta(1 + \mathcal{U}m_2^*)m_2^* + \mu} - \frac{\mu m}{e^{\mu T} - 1} \right] = 1.$$

于是, 我们可以得到

$$\frac{\beta e^{-\mu\tau}}{r + \xi} \left[\frac{\mu(1 - qm_2^*)}{\beta(1 + \mathcal{U}m_2^*)m_2^* + \mu} - \frac{\mu m}{\exp\{(m_2^* \beta(1 + \mathcal{U}m_2^*) + \mu)T\} - 1} \right] > 1.$$

因而存在一个充分小的正的常数 ε_1 , 使

$$\frac{\beta e^{-\mu\tau}}{r + \xi} \rho > 1, \quad (21)$$

这里

$$\rho = \frac{\mu(1 - qm_2^*)}{\beta(1 + \mathcal{U}m_2^*)m_2^* + \mu} - \frac{\mu m}{\exp\{(m_2^* \beta(1 + \mathcal{U}m_2^*) + \mu)T\} - 1} - \varepsilon_1 > 0.$$

对于上面的 m_2^* 及任意正的常数 t_0 , 我们声称对所有的 $t \geq t_0$, 不等式 $I(t) < m_2^*$ 不会恒成立. 否则, 存在一个正的常数 t_0 , 使对所有 $t \geq t_0$, $I(t) < m_2^*$ 恒成立. 由系统(3)的第1个方程及第3个方程, 得

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} \geq \mu(1 - qm_2^*) - (m_2^* \beta(1 + \mathcal{U}m_2^*) + \mu)S(t), & t \neq nT, \\ S(t^+) \geq S(t) - m\mu, & t = nT. \end{cases} \quad (22)$$

类似地, 运用引理1, 我们知道存在 $T_1 \geq t_0 + \tau$, 对 $t \geq T_1$, 使

$$S(t) > \frac{\mu(1 - qm_2^*)}{m_2^* \beta(1 + \mathcal{U}m_2^*) + \mu} - \frac{m\mu}{\exp\{(m_2^* \beta(1 + \mathcal{U}m_2^*) + \mu)T\} - 1} - \varepsilon_1 =: \rho. \quad (23)$$

根据式(20)和式(23), 我们看到

$$\frac{dV(t)}{dt} > (r + \xi) \left[\frac{\beta e^{-\mu t}}{r + \xi} \rho - 1 \right] I(t), \quad t \geq T_1. \quad (24)$$

令 $I^l = \min_{t \in [T_1, T_1 + \eta]} I(t)$. 我们要说明对所有的 $t \geq T_1$, $I(t) \geq I^l$ 成立. 否则, 存在一个非

负常数 T_2 , 使对 $t \in [T_1, T_1 + \tau + T_2]$, $I(t) \geq I'$, $I(T_1 + \tau + T_2) = I'$ 及 $I(T_1 + \tau + T_2) \leq 0$. 因此由系统(3)的第2个方程及式(21), 易知

$$I(T_1 + \tau + T_2) \geq \left[\beta e^{-\mu\tau} \rho - (r + \xi) \right] I' = (r + \xi) \left[\frac{\beta e^{-\mu\tau}}{r + \xi} \rho - 1 \right] I' > 0$$

矛盾. 因此, 对所有的 $t \geq T_1$, 有 $I(t) \geq I' > 0$. 于是由式(24), 得

$$\frac{dV(t)}{dt} > (r + \xi) \left[\frac{\beta e^{-\mu\tau}}{r + \xi} \rho - 1 \right] I' > 0, \tag{25}$$

这意味着当 $t \rightarrow +\infty$, $V(t) \rightarrow +\infty$. 这与 $V(t) \leq 1 + (\beta(1 + \nu) + q\mu) \tau e^{-\mu\tau}$ 对于足够大的 t 来说矛盾. 因此, 对任意正常数 t_0 , 不等式 $I(t) < m_2^*$ 不可能对所有的 $t \geq t_0$ 成立.

下面我们分两种情况来证明存在一个正常数 m_2 使当 t 足够大时, $I(t) \geq m_2$ 成立.

情况 I 如果 $I(t) \geq m_2^*$ 对所有足够大的 t 成立, 则达到了我们的目的.

情况 II $I(t)$ 关于 m_2^* 振荡. 取 $m_2 = \min \left\{ m_2^*/2, m_2^* e^{-(r+\mu)\tau} \right\}$.

下面, 我们就来说明 $I(t) \geq m_2$. 存在两个正常数 t, ϕ , 使

$$I(t) = I(t + \phi) = m_2^*$$

和

$$I(t) < m_2^*, \quad \text{对 } t < t < t + \phi$$

成立.

由于现在 $I(t) < m_2^*$, 我们只需证明 $I(t) \geq m_2 (0 < m_2 < m_2^*)$ 成立即可. 因为 $I(t) < m_2^*$, 当 t 足够大时, 不等式 $S(t) > \rho$ 对 $t < t < t + \phi$ 成立. 由于 $I(t)$ 连续一致有界且不受脉冲影响, 可以推得 $I(t)$ 是一致连续. 因此存在常数 T_3 (这里 $0 < T_3 < \theta$ 及 T_3 不依赖于 t 的选择), 使对所有的 $t \leq t \leq t + T_3$, $I(t) > m_2^*/2$. 如果 $\phi \leq T_3$, 我们达到目的了. 若 $T_3 < \phi \leq \theta$, 由系统(3)的第2个方程可得, 对 $t < t \leq t + \phi$, $I'(t) \geq (r + \mu)I(t)$ 成立. 于是由于 $I(t) = m_2^*$, 可知对 $t < t \leq t + \phi \leq t + \theta$, $I(t) \geq m_2^* e^{-(r+\mu)\theta}$ 成立. 显然对 $t < t \leq t + \phi$, $I(t) \geq m_2$ 成立. 类似地, 如果 $\phi \geq \theta$, 由系统(3)的第2个方程, 很容易获得 $I(t) \geq m_2$ 对 $t \leq t \leq t + \theta$ 成立. 于是, 和上面声称的一样继续进行讨论, 我们获得 $I(t) \geq m_2$ 对于 $t + \theta \leq t \leq t + \phi$ 成立. 因为区间 $[t, t + \phi]$ 是任意选择的 (只需 t 足够大), 我们知道 $I(t) \geq m_2$ 对足够大的 t 成立. 由上面的讨论可以看出 m_2 的选择不依赖于系统(3)的正解, 且当 t 充分大时, $I(t) \geq m_2$ 成立. 情况 II 证毕.

由系统(3)的第1个方程及第3个方程, 得

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} \geq p\mu - [\beta(1 + \nu) + \mu]S(t), & t \neq nT, n \in \mathbf{N}, \\ S(t^+) \geq S(t) - m\mu, & t = nT, n \in \mathbf{N}. \end{cases} \tag{26}$$

因为 $R_3 > 1$, 于是 $p\mu / (\beta(1 + \nu) + \mu) - m\mu / (e^{\beta(1 + \nu) + \mu} T - 1) > 0$. 类似地, 根据引理 1, 我们可以选择 t 充分大并且 $\varepsilon > 0$ 充分小使

$$S(t) \geq \frac{p\mu}{\beta(1 + \nu) + \mu} - \frac{m\mu}{e^{\beta(1 + \nu) + \mu} T - 1} - \varepsilon =: m_1 > 0, \quad \text{对 } t > T_4. \tag{27}$$

取

$$D = \left\{ (S, I) \in R^2 \mid m_1 \leq S(t), m_2 \leq I(t), S(t) + I(t) \leq 1 \right\}.$$

于是 D 是一个有界紧集且到坐标轴有正的距离. 根据上面的讨论, 可知系统(3) 满足初始条

件(4)的每一个解最终进入并保留在 D 内. 定理 2 证明完毕.

推论 2 若 $R_3 > 1$ 和 $m < m^*$ 或者 $T > T^*$ 或者 $\tau < \tau_*$ 或者 $q > q^*$, 则系统(3) 是持久的, 也就是说, 这个疾病能够形成一个流行病, 这里的关键参数 m^* 、 T^* 、 τ_* 及 q^* 如下:

$$m^* = \frac{(e^{\mu T} - 1)[\beta - e^{\mu T}(r + \xi)]}{\beta \mu}, \quad T^* = \frac{1}{\mu} \ln \left[1 + \frac{m \beta \mu}{\beta - e^{\mu T}(r + \xi)} \right],$$

$$\tau_* = \frac{1}{\mu} \ln \frac{q \mu (e^{\mu T} - 1) + \beta (e^{\mu T} - 1 - m \mu)}{(r + \mu)(e^{\mu T} - 1)},$$

$$q^* = \frac{(e^{\mu T} - 1)[(r + \mu)e^{\mu T} - \beta] + m \beta \mu}{\mu (e^{\mu T} - 1)}.$$

注(参考文献[27]和文献[28]) 令 $\delta = 0, d = 0, q = 0$ 及 $b = \mu$, 则式(1)变为下面的无脉冲影响的 SEIR 传染病模型:

$$\begin{cases} \dot{S}(t) = b - \beta S(t)I(t) - bS(t), \\ \dot{E}(t) = \beta S(t)I(t) - \beta e^{-b\tau} S(t-\tau)I(t-\tau) - bE(t), \\ \dot{I}(t) = \beta e^{-b\tau} S(t-\tau)I(t-\tau) - (r+b)I(t), \\ \dot{R}(t) = rI(t) - bR(t). \end{cases} \quad (28)$$

如果 $\mathcal{R} = \beta e^{-b\tau}/(r+b) < 1$, 则式(28)的无病平衡点是全局吸引的. 若 $\mathcal{R} = \beta e^{-b\tau}/(r+b) > 1$, 则疾病是持久的. 类似的结果在文献[27]和文献[28]中也已给出.

4 讨 论

本文把时滞、脉冲及垂直传染引入 SEIR 传染病模型, 分析了脉冲接种、疾病的潜伏期及垂直传染对疾病根除与系统的持久性的影响. 由定理 1 和 2 可知, 为了阻止传染病流行, 我们可以选择一个合适的脉冲接种周期(即 T) 或者脉冲接种率(即 m), 使 $\mathcal{R} < 1$ 即可, 这提供给我们一个合理的脉冲免疫接种策略. 根据定理 1 和定理 2, 易知:

- (i) \mathcal{R}_1 和 \mathcal{R}_2 正比于 T 且反比于 m , 这意味着脉冲免疫接种在阻止易感者被感染而转到‘潜伏类’(E)的行为中, 起了主导作用.
- (ii) 注意到如果垂直传染率 q 小于阈值 q^* , 传染病将最终灭绝. 在理论上阐明了父母应该仔细地注意自己的健康, 避免其后代在出生时被垂直感染.
- (iii) 若 β 和 ν 的值越大, \mathcal{R}_1 的值就越大, 说明它们对易感者向潜伏者的转化起到重大的作用. 当 β 和 ν 很小时, 系统的持久性消失, 且传染病最终灭绝.
- (iv) \mathcal{R}_1 和 \mathcal{R}_2 与 τ 成反比, 意味着疾病的潜伏期(即 τ) 能够影响‘潜伏类’(E)向‘染病类’(I)的转变. 我们发现当疾病的潜伏期大于某个关键值时, 疾病将被根除, 尽管脉冲接种率很小. 最后, 当潜伏期时滞很大时, 系统的持久性消失, 而疾病被根除. 这表明模型的动力学行为对潜伏期时滞非常敏感. 直觉反映的生物意义是: 如果从潜伏者到染病者的转化花费太多的时间, 则染病类群体将遭受一个非常低的生存率, 结果是, 向染病类最高可能的补充率 $(\beta + q\mu)e^{-b\tau}$ 将低于染病类的死亡率 μ 及向恢复类的转化率 r 之和(即 $r + \mu$), 从而导致 I 的灭绝. 这表明时滞对该模型的动力学行为产生极大的影响, 于是我们称之为“有害”时滞. 因此, 在 SEIR 传染病模型中考虑潜伏期时滞是非常重要的.

致谢 作者感谢山东科技大学科学与技术发展基金(05g016)对本文的资助.

[参 考 文 献]

[1] Michael Y Li, Gaef John R, WANG Lian-cheng, et al. Global dynamics of an SEIR model with varying

- total population size[J]. *Mathematical Biosciences*, 1999, **160**(2): 191-213.
- [2] Michael Y Li, Hall Smith, Wang Lian-cheng. Global dynamics of an SEIR epidemic model with vertical transmission[J]. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 2001, **62**(1): 58-69.
- [3] Al-Showaiikh F N M, Twizell E H. One-dimensional measles dynamics[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **152**(1): 169-194.
- [4] Greenhalgh D. Hopf bifurcation in epidemic models with a latent period and nonpermanent immunity [J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 1997, **25**(5): 85-107.
- [5] LI Gui-hua, JIN Zhen. Global stability of an SEIR epidemic model with infectious force in latent, infected and immune period[J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2005, **25**(5): 1177-1184.
- [6] Hethcote H W, Stech H W, Van den Driessche P. Periodicity and stability in epidemic models: A survey[A]. In: *Differential Equations and Applications in Ecology, Epidemics, and Population Problems* [M]. New York: Academic Press, 1981, 65-85.
- [7] D'Onofrio Alberto. Stability properties of pulse vaccination strategy in SEIR epidemic model[J]. *Mathematical Biosciences*, 2002, **179**(1): 57-72.
- [8] D'Onofrio Alberto. Mixed pulse vaccination strategy in epidemic model with realistically distributed infectious and latent times[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2004, **151**(1): 181-187.
- [9] Fine P M. Vectors and vertical transmission: an epidemiologic perspective[J]. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 1975, **266**(11): 173-194.
- [10] Busenberg S, Cooke K L, Pozio M A. Analysis of a model of a vertically transmitted disease[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 1983, **17**(3): 305-329.
- [11] Busenberg S N, Cooke K L. Models of vertical transmitted diseases with sequently-continuous dynamics[A]. In: *Lakshmicantham V Ed. Nonlinear Phenomena in Mathematical Sciences* [C]. New York: Academic Press, 1982, 179-187.
- [12] Cook K L, Busenberg S N. Vertical transmission diseases[A]. In: *Lakshmicantham V Ed. Nonlinear Phenomena in Mathematical Sciences* [C]. New York: Academic Press, 1982, 189.
- [13] LU Zhong-hua, CHI Xue-bin, CHEN Lan-sun. The effect of constant and pulse vaccination on SIR epidemic model with horizontal and vertical transmission[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2002, **36**(9): 1039-1057.
- [14] D'Onofrio Alberto. On pulse vaccination strategy in the SIR epidemic model with vertical transmission[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2005, **18**(7): 729-732.
- [15] Nokes D, Swinton J. The control of childhood viral infections by pulse vaccination[J]. *IMA Journal Mathematics Applied Biology Medication*, 1995, **12**(1): 29-53.
- [16] ZENG Guang-zhao, CHEN Lan-sun. Complexity and asymptotical behavior of an SIRS epidemic model with proportional impulse vaccination[J]. *Advances in Complex Systems*, 2005, **8**(4): 419-431.
- [17] Van den Driessche P, Watmough J. A simple SIS epidemic model with a backward bifurcation[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 2000, **40**(6): 525-540.
- [18] Van den Driessche P, Watmough J. Epidemic solutions and endemic catastrophes[J]. *Fields Institute Communications*, 2003, **36**(1): 247-257.
- [19] Alexander M E, Moghadas S M. Periodicity in an epidemic model with a generalized non-linear incidence[J]. *Mathematical Biosciences*, 2004, **189**(1): 75-96.
- [20] Takeuchi Yasuhiro, MA Wan-biao, Beretta Edoardo. Global asymptotic properties of a delay SIR epidemic model with finite incubation times[J]. *Nonlinear Analysis*, 2000, **42**(6): 931-947.
- [21] MA Wan-biao, SONG Mei, Takeuchi Yasuhiro. Global stability of an SIR epidemic model with time delay[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2004, **17**(10): 1141-1145.

- [22] JIN Zhen, MA Zhi-en. The stability of an SIR epidemic model with time delays[J]. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 2006, **3**(1): 101-109.
- [23] Beretta Edoardo, Hara Tadayuki, MA Wang-bao, et al. Global asymptotic stability of an SIR epidemic model with distributed time delay[J]. *Nonlinear Analysis*, 2001, **47**(6): 4107-4115.
- [24] Lakshmikantham V, Bainov D, Simeonov P. *Theory of Impulsive Differential Equations* [M]. Singapore: World Scientific, 1989.
- [25] LIU Xin-zhi, Teo Kok Lay, ZHANG Yi. Absolute stability of impulsive control systems with time delay [J]. *Nonlinear Analysis*, 2005, **62**(3): 429-453.
- [26] KUANG Yang. *Delay Differential Equations with Applications in Population Dynamics* [M]. San Diego, CA: Academic Press, Inc. 1993.
- [27] Cooke KL, Van den Driessche P. Analysis of an SEIRS epidemic model with two delays[J]. *Journal of Mathematical Biology*, 1996, **35**(2): 240-260.
- [28] WANG Wen-di. Global Behavior of an SEIRS epidemic model with time delays[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2002, **15**(4): 423-428.

Global Dynamics Behaviors for a New Delay SEIR Epidemic Disease Model With Vertical Transmission and Pulse Vaccination

MENG Xin-zhu^{1,2}, CHEN Lan-sun², SONG Zhi-tao¹

(1. College of Science, Shandong University of Science and Technology,

Qingdao 266510, P. R. China;

2. Department of Applied Mathematics, Dalian University of Technology,

Dalian 116024, P. R. China)

Abstract: A robust SEIR epidemic disease model with a profitless delay and vertical transmission was formulated, and the dynamics behaviors of the model under pulse vaccination were analyzed. By use of the discrete dynamical system determined by the stroboscopic map, an ‘infection-free’ periodic solution was obtained. Further, it is shown that the ‘infection-free’ periodic solution is globally attractive when some parameters of the model are under appropriate conditions. Using the theory on delay functional and impulsive differential equation, sufficient condition with time delay for the permanence of the system was obtained. And it was proved, that time delays, pulse vaccination and vertical transmission can bring obvious effects on the dynamics behaviors of the model. The results indicate that the delay is “profitless”.

Key words: permanence; pulse vaccination; horizontal and vertical transmission; delay; global attractivity