文章编号: 1000-0887(2007) 10-1146-11　　© 应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

关于 Banach 空间非扩张半群的强收敛定理*

张石生[1], 杨　莉[2], 柳京爱[3]

(1. 宜宾学院 数学系, 四川 宜宾 644007;
2. 西南科技大学 数学系, 四川 绵阳 621002;
3. 延边大学 理学院 数学系, 吉林 延吉 133002)

(我刊编委张石生来稿)

摘要:　在 Banach 空间框架下, 建立了几个关于非扩张半群显式迭代序列的强收敛定理. 所得结果不仅推广和改进了 Shioji-Takahashi, Suzuki, Xu 以及 Aleyner-Reich 等人的相应结果, 而且还部分肯定地回答了 Suzuki 和 Xu 提出的两个公开问题.

关 键 词: 非扩张半群;　半闭原理;　公共不动点;　一致光滑的 Banach 空间;　具弱连续性的正规对偶映象

中图分类号: O177.91　　文献标识码: A

1　引言与预备知识

本文全篇假设 E 是一实的 Banach 空间, E^* 为 E 的对偶空间, C 是 E 的一非空闭凸子集, $\mathbf{R}^+$ 表示非负实数集, $J: E \to 2^{E^*}$ 是由下式定义的正规对偶映象:

$$J(x) = \left\{f \in E^*: \langle x, f\rangle = \|x\| \cdot \|f\|, \|x\| = \|f\|\right\}, \qquad x \in E.$$

我们用“$\to$”和“$\rightharpoonup$”分别表示强收敛和弱收敛.

映象 $T: C \to C$ 称之为非扩张的, 如果对任意的 $x, y \in C$ 都有 $\|Tx - Ty\| \leqslant \|x - y\|$. T 在 C 中的不动点集记为 $F(T) = \left\{x \in C: Tx = x\right\}$.

定义 1.1　映 C 到 C 的映象族 $\left\{T(t): t \geqslant 0\right\}$ 称之为 C 上的一非扩张半群, 如果它满足以下诸条件:

1) 对任意的 $t_1, t_2 \in \mathbf{R}^+$ 和 $x \in C$ 有 $T(t_1 + t_2)x = T(t_1)T(t_2)x$;
2) 对任一 $x \in C$ 有 $T(0)x = x$;
3) 对任给 $x \in C$, $t \mapsto T(t)x$ 是连续的;
4) 对任给 $t \in \mathbf{R}^+$ 以及任意的 $x, y \in C$ 有 $\|T(t)x - T(t)y\| \leqslant \|x - y\|$.

研究非扩张映象的一个经典方法是用一系列压缩映象来逼近非扩张映象(参见文献[1]和文献[2]). 确切地说, 对给定的一点 $u \in C$ 及任意给定的正数 $0 < t < 1$ 定义一压缩映象 $T_t: C \to C$ 如下

$$T_t x = tu + (1 - t)Tx, \qquad x \in C. \tag{1}$$

* 收稿日期: 2006-12-11; 修订日期: 2007-08-08
基金项目: 四川省自然科学基金资助项目(2005A1321)
作者简介: 张石生(1934—), 男, 云南曲靖人, 教授(联系人. E-mail: sszhang_1@yahoo.com.cn).

由 Banach 压缩映象原理知, 对每一 T_t 在 C 中都存在唯一的不动点 x_t. 通常, 即便非扩张映象 T 有一不动点, 我们仍然不能断定当 $t\to 0$ 时 x_t 的趋势及性状, 极限是否存在?极限是否就是 T 的不动点? 但在 T 存在不动点的情况下, Browder[1] 证得: 假如 E 是一 Hilbert 空间, 那么 x_t 强收敛于 T 在不动点集 $F(T)\subset C$ 中距离 u 最近的一点. Reich[2] 把 Browder 的结果推广到 Banach 空间, 并证明: 如果 E 是一致光滑的 Banach 空间, 那么 x_t 强收敛到 T 的一不动点, 并且这个极限确定了 C 到 $F(T)$ 上的(唯一的) 一 sunny 非扩张保核收缩.

进一步把 Browder 和 Reich 的结果推广到非扩张半群的情形, 应是非常有趣的事.

在文献[3] 中, Shioji-Takahashi 在 Hilbert 空间引进了下面的隐迭代格式:

$$x_n=\alpha_n u+(1-\alpha_n)\sigma_{t_n}(x_n),\qquad n\geqslant 1,\tag{2}$$

其中 $\{\alpha_n\}$ 是 $(0,1)$ 中的一数列, $\{t_n\}$ 是 $(0,\infty)$ 中的一正实数列. 对任意 $t>0$ 及 $x\in C$, $\sigma_t(x)$ 是由下式给出的均值:

$$\sigma_t(x)=\frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\,\mathrm{d}s.$$

在对数列 $\{\alpha_n\}$ 作适当的假定下, Shioji-Takahashi[3] 证得 $\{x_n\}$ 强收敛到 $F:=\bigcap_{t\geqslant 0}F(T(t))$ 中的一点.

仍在 Hilbert 空间的框架下, Suzuki[4] 首次引进如下的非扩张半群的隐迭代格式:

$$x_n=\alpha_n u+(1-\alpha_n)T(t_n)(x_n),\qquad n\geqslant 1.\tag{3}$$

在对参数序列 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{t_n\}$ 作适当的假定下, Suzuki 证得迭代序列(3) 在 Hilbert 框架下的强收敛性结果, 同时他提出以下的公开问题:

公开问题(Suzuki[4]) 定理 1 的结论是否对显迭代格式成立? 即, 对任意给定的 x_0, $u\in C$, 如果我们定义如下的显迭代序列 $\{x_n\}$:

$$\begin{cases}x_0\in C,\\ x_{n+1}=\alpha_n u+(1-\alpha_n)T(t_n)x_n, & n\geqslant 0,\end{cases}\tag{4}$$

那么在对 $\{\alpha_n\}\subset(0,1)$ 和 $\{t_n\}\subset(0,\infty)$ 加上怎样的条件就能确保 $\{x_n\}$ 强收敛于非扩张半群 $\{T(t):t\geqslant 0\}:C\to C$ 的一公共不动点?

在文献[5] 中, Xu 证明了 Suzuki 的结果在具弱连续的对偶映象的一致凸 Banach 空间成立. 同时, 他也提出了如下的公开问题:

公开问题(Xu[5]) 我们尚不清楚上述结果是否对一致凸且一致光滑的 Banach 空间(比如, L^p, $1<p<\infty$) 仍然成立?

最近, Aleyner 和 Reich[6] 在空间 E 的框架下首次引进以下的显迭代序列

$$x_{n+1}=\alpha_n u+(1-\alpha_n)T(t_n)x_n,\qquad n\geqslant 0,$$

其中 E 是具一致 Gâteaux 可微范数的自反 Banach 空间, 使得对 E 的每一非空有界闭凸子集关于非扩张映象具有公共不动点性质 (注, 由文献[6] 知, 若 E 是一致光滑的, 则上述假设成立). 在对参数序列 $\{\alpha_n\}$ 和 $\{t_n\}$ 作适当的假设下, 他们证明了该序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 Qu, 其中 Q 是映 C 到 $F:=\bigcap_{t\geqslant 0}F(T(t))$ 上的唯一的 sunny 非扩张的保核收缩.

受 Shioji-Takahashi[3], Suzuki[4], Xu[5] 以及 Aleyner-Reich[6] 上述工作的影响与启发, 本文的目的旨在引进如下的非扩张半群的合成迭代序列:

$$\begin{cases}x_{n+1}=\alpha_n u+(1-\alpha_n)y_n,\\ y_n=\beta_n x_n+(1-\beta_n)T(t_n)x_n,\end{cases}\tag{5}$$

并分别在具一致 Gâteaux 可微范数的自反 Banach 空间, 具弱连续的正规对偶映象的一致光滑 Banach 空间和一致凸 Banach 空间框架下, 讨论该迭代序列的强收敛性问题, 其中 $\{T(t): t \geqslant 0\}: C \to C$ 是一非扩张半群, u 是 C 中任意给定的一点, 数列 $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$, $\{\beta_n\} \subset [0, 1]$, $\{t_n\} \subset \mathbf{R}^+$. 本文所给出的结果不仅推广和改进了 Shioji-Takahashi[3], Suzuki[4], Xu[5,7] 以及 Aleyner-Reich[6] 的相应结果, 而且还部分肯定地回答了 Suzuki[4] 和 Xu[5] 提出的公开问题.

为方便起见, 我们首先回顾一些概念和结论[8].

称 E 的范数是 Gâteaux 可微的 (或称 E 是光滑的), 如果对任给的 $x, y \in U = \{x \in E: \|x\| = 1\}$, 极限

$$\lim_{t \to 0} \frac{\|x + ty\| - \|x\|}{t} \tag{6}$$

都存在.

称 E 的范数是一致 Gâteaux 可微的, 如果对任给的 $y \in U$, 极限(6) 对所有的 $x \in U$ 一致存在.

称 Banach 空间 E 是一致光滑的, 如果极限(6) 对所有 $(x, y) \in U \times U$ 一致存在.

称 Banach 空间 E 是一致凸的, 如果对任给的 $\epsilon \in (0, 2]$, 存在相应的 $\delta(\epsilon) > 0$ 使得: $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$ 及 $\|x - y\| \geqslant \epsilon$ 时, 就有 $\|x + y\| \leqslant 2(1 - \delta(\epsilon))$, 其中 $\delta: [0, 2] \to [0, 1]$ 是由下式

$$\delta(\epsilon) = \inf\left\{1 - \frac{\|x + y\|}{2}: \|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1, \|x - y\| \geqslant \epsilon\right\},$$

定义的 E 的凸性模.

命题 1.1 (Barbu[9]14) (i) Banach 空间 E 是一致光滑的, 当且仅当正规对偶映象 J 是单值的, 且在 E 的任意有界子集上由 E 的范数到 E^* 的范数是一致连续的.

(ii) 如果 E 的范数是 Gâteaux 可微的, 则正规对偶映象 J 是单值的及强-弱* 连续的. 如果 E 范数是一致 Gâteaux 可微的, 则正规对偶映象 J 是单值的且在 E 的任意有界子集上是强-弱* 一致连续的.

(iii) 每一个一致凸的 Banach 空间是自反的.

假设 C 和 D 是 Banach 空间 E 的两个非空子集, 其中 C 是非空闭凸的, 且 $D \subset C$, 则称映象 $Q: C \to D$ 是 sunny 的 (见文献[10-11]), 如果对所有 $x \in C$ 和 $t \geqslant 0$ 只要 $x + t(x - Q(x)) \in C$ 就有 $Q(x + t(x - Q(x))) = Q(x)$.

一 sunny 非扩张保核收缩就是一 sunny 保核收缩的非扩张映象. sunny 非扩张保核收缩, 在我们下文的论证中起着非常重要的作用.

以下命题给出了 sunny 非扩张保核收缩的特征性.

命题 1.2[10-11] 设 E 是一致光滑的 Banach 空间, 则 $Q: C \to D$ 是一 sunny 非扩张保核收缩收缩当且仅当以下的不等式成立:

$$\langle x - Qx, J(y - Qx)\rangle \leqslant 0, \qquad \forall x \in C \text{ 和 } y \in D.$$

Reich[2] 证明: 如果 E 是一致光滑的, D 是由 C 映到 C 中的一非扩张映象的不动点集, 则存在一由 C 映到 D 上的非扩张收缩映象, 具有以下性质:

命题 1.3[2] 设 E 是一致光滑的 Banach 空间, $T: C \to C$ 是一具有不动点的非扩张映象. 对任意给定的 $u \in C$ 及 $t \in (0, 1)$, 当 $t \to 0$ 时压缩映象 $T_t := tu + (1 - t)T$ 的唯一不动点 $x_t \in C$ 强收敛于 T 的一不动点. 又设 $Qu = s - \lim_{t \to 0} x_t$, 则此式定义了一映象 $Q: C \to F(T)$,

而且, Q 是由 C 到 $F(T)$ 上的唯一的 sunny 非扩张的保核收缩, 即, Q 满足下面的不等式:

$$\langle u - Qu, J(z - Qu)\rangle \leqslant 0, \qquad u \in C; z \in F(T).$$

根据 Browder[12], 一 Banach 空间 E 称为具有弱连续的正规对偶映象 $J: E \to 2^{E^*}$, 如果 J 是单值的和弱–弱* 序列连续的(即, 若 $\{x_n\}$ 是 E 中之一弱收敛于点 x_* 的序列, 则序列 $\{J(x_n)\}$ 必弱* 收敛于 $J(x_*)$).

下面的引理在证明本文主要结果时是必需的.

引理 1.1(半闭原理)[13]　设 E 是一致凸的 Banach 空间, C 是 E 的一闭凸子集, $T: C \to C$ 是有不动点的一非扩张映象. 若 $x_n \rightharpoonup x \in C$ 以及 $(x_n - Tx_n) \to y$, 那么 $(x - Tx) = y$. 特别, 若 $y = 0$, 则 x 是 T 的一个不动点.

引理 1.2[14]　设 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ 为 3 个非负实数列, 满足:

$$a_{n+1} \leqslant (1 - \lambda_n) a_n + b_n + c_n, \qquad \forall n \geqslant n_0,$$

其中 n_0 是某非负整数, $\lambda_n \in (0, 1)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$, $b_n = o(\lambda_n)$ 且 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$. 则 $a_n \to 0$.

引理 1.3[15]　设 E 是任一实 Banach 空间, E^* 是 E 的对偶空间, $J: E \to 2^{E^*}$ 是正规对偶映象, 则对任给 $x, y \in E$ 我们有

$$\|x + y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2\langle y, j(x + y)\rangle, \qquad \forall j(x + y) \in J(x + y);$$
$$\|x + y\|^2 \geqslant \|x\|^2 + 2\langle y, j(x)\rangle, \qquad \forall j(x) \in J(x).$$

2　一致凸 Banach 空间中的收敛定理

引理 2.1(Xu[5, 命题3.2])　设 E 是具弱连续的正规对偶映象 J 的一致凸的 Banach 空间, C 是 E 的一闭凸子集, $\{T(t): t \geqslant 0\}$ 是 C 上的一非扩张半群, 且其不动点集 $F := \bigcap_{t \geqslant 0} F(T(t)) \neq \varnothing$. 则存在如下构造的由 C 到 F 上的唯一的 sunny 非扩张保核收缩 Q:

记 x_t 为如下方程的唯一不动点:

$$x_t = \frac{1}{t} u + \left(1 - \frac{1}{t}\right) \sigma_t(x_t), \qquad t > 1, \tag{7}$$

其中 $\sigma_t(x_t) = \frac{1}{t} \int_0^t T(s) x_t \, ds$. 则极限 $Q(u) := s - \lim_{t \to \infty} x_t$ 存在, 而且定义了一个由 C 到 F 上的 sunny 非扩张的保核收缩.

定理 2.1　设 E 是具弱连续的正规对偶映象 J 的一致凸的实 Banach 空间, C 是 E 的一非空闭凸集, $\{T(t): t \geqslant 0\}: C \to C$ 是一非扩张半群且其不动点集 $F := \bigcap_{t \geqslant 0} F(T(t)) \neq \varnothing$. 设 $\{\alpha_n\} \subset (0, 1)$, $\{\beta_n\} \subset [0, 1]$ 及 $\{t_n\} \subset \mathbf{R}^+$ 为 3 个实数列, 满足以下条件:

(i) $\alpha_n \to 0\ (n \to \infty)$; $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n = \infty$; 存在某常数 $a \in (0, 1)$, 对一切 $n \geqslant 0$ 有 $\beta_n \in [0, a)$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{n+1} - \alpha_n| < \infty$; $\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{n+1} - \beta_n| < \infty$;

(iii) $0 \leqslant t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < \cdots$, $\lim_{n \to \infty} t_n = \infty$;

(iv) 对给定的 $f \in F$, $u, x_0 \in C$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{D} \|T(s) T(t_n) x - T(t_n) x\| < \infty \text{ 对所有 } s \in \mathbf{R}^+ \text{ 一致成立},$$

其中

$$D = \left\{ x \in C: \| x - f \| \leqslant \max(\| x_0 - f \|, \| u - f \|) \right\}.$$

则由(5)式给出的序列$\left\{ x_n \right\}$强收敛于Qu, 这里 Q 是映C 到F 上的唯一的 suuny 非扩张保核收缩.

注 这里应该指出,定理 2.1 中的条件(iv)(以及后面的定理 3.1 和 3.2 中的条件(iii))成立的例子, 参见Aleyner 和 Reich 的文献[6]298.

证 定理 2.1 的证明分 6 步:

第 1 步 对任意给定的$f \in F$, 首先我们证明

$$\| x_n - f \| \leqslant \max\left\{ \| x_0 - f \|, \| u - f \| \right\}, \text{对一切 } n \geqslant 0.$$

事实上, 用数学归纳法可证:

当 $n = 0$ 时结论显然成立. 假设当 $n \geqslant 0$ 时这个结论成立, 现我们来证明这个结论在 $n + 1$ 时也成立. 事实上, 对给定$f \in F$, 由 $T(t_n)$ 的非扩张性, 我们有

$$\| y_n - f \| \leqslant \beta_n \| x_n - f \| + (1 - \beta_n) \| T(t_n) x_n - f \| \leqslant \| x_n - f \|, \tag{8}$$

从而

$$\begin{aligned} \| x_{n+1} - f \| = & \| \alpha_n u + (1 - \alpha_n) y_n - f \| \leqslant \\ & \alpha_n \| u - f \| + (1 - \alpha_n) \| y_n - f \| \leqslant \\ & \alpha_n \| u - f \| + (1 - \alpha_n) \| x_n - f \| \leqslant \\ & \alpha_n \| u - f \| + (1 - \alpha_n) \max\left\{ \| x_0 - f \|, \| u - f \| \right\} \leqslant \\ & \max\left\{ \| x_0 - f \|, \| u - f \| \right\}. \end{aligned} \tag{9}$$

这就意味着$\left\{ x_n \right\}$有界, 从而$\left\{ y_n \right\}$也有界. 因而由条件(i)有

$$\| x_{n+1} - y_n \| = \alpha_n \| u - y_n \| \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{10}$$

第 2 步 现在证明 $\| x_{n+1} - x_n \| \to 0 \ (n \to \infty)$.

事实上, 由(5)式有

$$\| x_{n+1} - x_n \| \leqslant (1 - \alpha_n) \| y_n - y_{n-1} \| + | \alpha_n - \alpha_{n-1} | \ \| u - y_{n-1} \|. \tag{11}$$

再由(5)式有

$$\begin{aligned} y_n - y_{n-1} = & (1 - \beta_n)(T(t_n) x_n - T(t_{n-1}) x_{n-1}) + \beta_n (x_n - x_{n-1}) + \\ & (\beta_n - \beta_{n-1})(x_{n-1} - T(t_{n-1}) x_{n-1}), \end{aligned}$$

从而我们有

$$\begin{aligned} \| y_n - y_{n-1} \| \leqslant & (1 - \beta_n) \| T(t_n) x_n - T(t_{n-1}) x_{n-1} \| + \beta_n \| x_n - x_{n-1} \| + \\ & | \beta_n - \beta_{n-1} | \ \| x_{n-1} - T(t_{n-1}) x_{n-1} \|. \end{aligned} \tag{12}$$

现考虑(12)式右边第 1 项, 我们有

$$\begin{aligned} & \| T(t_n) x_n - T(t_{n-1}) x_{n-1} \| \leqslant \\ & \quad \| T(t_n) x_n - T(t_n) x_{n-1} \| + \| T(t_n) x_{n-1} - T(t_{n-1}) x_{n-1} \| \leqslant \\ & \quad \| x_n - x_{n-1} \| + \| T(t_n) x_{n-1} - T(t_{n-1}) x_{n-1} \| = \\ & \quad \| x_n - x_{n-1} \| + \| T(t_n - t_{n-1}) T(t_{n-1}) x_{n-1} - T(t_{n-1}) x_{n-1} \| \leqslant \\ & \quad \| x_n - x_{n-1} \| + \sup_{x \in D} \| T(t_n - t_{n-1}) T(t_{n-1}) x - T(t_{n-1}) x \|. \end{aligned}$$

因此就有

$$\begin{aligned} & \| y_n - y_{n-1} \| \leqslant \\ & \quad (1 - \beta_n) \left\{ \| x_n - x_{n-1} \| + \sup_{x \in D} \| T(t_n - t_{n-1}) T(t_{n-1}) x - T(t_{n-1}) x \| \right\} + \end{aligned}$$

$$\beta_n \|x_n - x_{n-1}\| + \|x_{n-1} - T(t_{n-1})x_{n-1}\| \, |\beta_n - \beta_{n-1}| =$$
$$\|x_n - x_{n-1}\| + \sup_{x \in D} \|T(t_n - t_{n-1})T(t_{n-1})x - T(t_{n-1})x\| +$$
$$|\beta_n - \beta_{n-1}| \, M_1, \tag{13}$$

其中

$$M_1 = \sup_{n \geq 0}\left\{ \|u - y_n\|, \|x_n - T(t_n)x_n\| \right\}.$$

将(13)式代入(11)式则有

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant$$
$$(1-\alpha_n)\left\{ \|x_n - x_{n-1}\| + \sup_{x \in D} \|T(t_n - t_{n-1})T(t_{n-1})x - T(t_{n-1})x\| + \right.$$
$$\left. |\beta_n - \beta_{n-1}| \, M_1\right\} + |\alpha_n - \alpha_{n-1}| \, \|u - y_{n-1}\| \leqslant$$
$$(1-\alpha_n)\|x_n - x_{n-1}\| + \sup_{x \in D} \|T(t_n - t_{n-1})T(t_{n-1})x - T(t_{n-1})x\| +$$
$$\left\{ |\alpha_n - \alpha_{n-1}| + |\beta_n - \beta_{n-1}| \right\} M_1. \tag{14}$$

在引理1.2中取 $a_n = \|x_n - x_{n-1}\|$, $\lambda_n = \alpha_n$, $b_n = 0$ 以及 $c_n = \sup_{x \in D} \|T(t_n - t_{n-1})T(t_{n-1})x - T(t_{n-1})x\| + \left\{ |\alpha_n - \alpha_{n-1}| + |\beta_n - \beta_{n-1}| \right\} M_1$, 由条件(ⅰ)~(ⅳ), 我们知引理1.2的所有条件都已满足. 于是由引理1.2的结论有

$$\|x_{n+1} - x_n\| \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{15}$$

第3步　接着我们证明 $\|x_n - T(t_n)x_n\| \to 0 (n \to \infty)$.

事实上, 令

$$M = \|f\| + \max\left\{ \|x_0 - f\|, \|u - f\| \right\},$$

则对任意的 $n \geqslant 0$ 及给定的 $f \in F$ 我们有

$$\begin{cases} \|x_n\| \leqslant M, \\ \|T(t_n)x_n\| \leqslant \|T(t_n)x_n - f\| + \|f\| \leqslant \|x_n - f\| + \|f\| \leqslant M. \end{cases} \tag{16}$$

由(5)式有

$$\|y_n - T(t_n)x_n\| = \beta_n \|x_n - T(t_n)x_n\|,$$

所以我们有

$$\|x_n - T(t_n)x_n\| \leqslant \|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - y_n\| + \|y_n - T(t_n)x_n\| =$$
$$\|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - y_n\| + \beta_n \|x_n - T(t_n)x_n\|.$$

化简上式并注意到(10)式、(15)式及条件(ⅰ), 我们有

$$(1-a)\|x_n - T(t_n)x_n\| \leqslant (1-\beta_n)\|x_n - T(t_n)x_n\| \leqslant$$
$$\|x_n - x_{n+1}\| + \|x_{n+1} - y_n\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

这就意味着

$$\|x_n - T(t_n)x_n\| \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{17}$$

从而有

$$\|x_{n+1} - T(t_n)x_n\| \leqslant \|x_{n+1} - x_n\| + \|x_n - T(t_n)x_n\| \to 0 \quad (n \to 0). \tag{18}$$

第4步　接下来我们证明 $T(s)x_n - x_n \to 0 \ (n \to \infty)$ 一致地对所有 $s \in \mathbf{R}^+$ 成立.

事实上, 由(17)式以及条件(ⅳ)有

$$\|T(s)x_n - x_n\| \leqslant \|T(s)x_n - T(s)T(t_n)x_n\| +$$
$$\|T(s)T(t_n)x_n - T(t_n)x_n\| + \|T(t_n)x_n - x_n\| \leqslant$$
$$2\|x_n - T(t_n)x_n\| + \sup_{x \in D} \|T(s)T(t_n)x - T(t_n)x\| \to 0 \quad (n \to \infty) \tag{19}$$

一致地对所有 $s \in \mathbf{R}^{+}$ 成立.

由于 E 是一致凸的, 由命题 1.1, E 是自反的. 又因为$\{x_n\}$有界, 所以存在子列$\{x_{n_i}\} \subset \{x_n\}$使$x_{n_i} \rightharpoonup p \in C$, 从而(由(19)式)

$$\|T(s)x_{n_i} - x_{n_i}\| \to 0 \quad (n_i \to \infty).$$

由引理1.1(半闭原理)知, $p = T(s)p$ 对任给$s \in \mathbf{R}^{+}$ 都成立. 因此

$$p \in F := \bigcap_{t \geqslant 0} F(T(t)). \tag{20}$$

另一方面, 由引理 2.1 知, (7) 式给出的序列$\{x_t\}$强收敛于$Q(u) \in F$, 其中 Q 是由C 映到F 上的唯一的 sunny 非扩张保核收缩.

第 5 步 现在我们证明

$$\limsup_{n \to \infty} \langle u - Qu, J(x_n - Qu) \rangle \leqslant 0.$$

事实上, 由第 1 步我们可知, 序列$\{\langle u - Qu, J(x_n - Qu)\rangle\}$ 是有界的, 所以

$$\limsup_{n \to \infty} \{\langle u - Qu, J(x_n - Qu)\rangle\}$$

存在. 因此我们可以假定存在一子列$\{x_{n_j}\} \subset \{x_n\}$ 使得

$$\limsup_{n \to \infty} \langle u - Qu, J(x_n - Qu) \rangle = \lim_{j \to \infty} \langle u - Qu, J(x_{n_j} - Qu) \rangle, \tag{21}$$

并且 $x_{n_j} \rightharpoonup q$. 利用第4 步证明中的同样方法, 可以证得 $q \in F$. 因为 $Q(u)$ 是由 C 映到F 上的唯一的 sunny 非扩张保核收缩. 又由假设条件: 正规对偶映象 J 是弱连续的, 所以由(21) 式有

$$\limsup_{n \to \infty} \langle u - Qu, J(x_n - Qu) \rangle = \langle u - Qu, J(q - Qu) \rangle \leqslant 0, \tag{22}$$

这就证明了断言.

第 6 步 最后我们证明 $x_n \to Q(u)\ (n \to \infty)$.

事实上, 由引理 1.3 和(8) 式我们有

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - Q(u)\|^2 &= \|(1 - \alpha_n)(y_n - Q(u)) + \alpha_n(u - Q(u))\|^2 \leqslant \\ &(1 - \alpha_n)^2 \|y_n - Q(u)\|^2 + 2\alpha_n \langle u - Q(u), J(x_{n+1} - Q(u))\rangle \leqslant \\ &(1 - \alpha_n) \|x_n - Q(u)\|^2 + 2\alpha_n \langle u - Q(u), J(x_{n+1} - Q(u))\rangle. \end{aligned} \tag{23}$$

令

$$\gamma_n = \max\{\langle u - Q(u), J(x_{n+1} - Q(u))\rangle, 0\}, \tag{24}$$

我们知 $\gamma_n \geqslant 0$, $\forall n \geqslant 0$.

现证

$$\gamma_n \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{25}$$

事实上, 由(22) 式知, 对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一非负整数 n_0 使

$$\langle u - Qu, J(x_n - Qu) \rangle < \varepsilon, \quad \forall n \geqslant n_0.$$

从而有

$$0 \leqslant \gamma_n < \varepsilon, \quad \forall n \geqslant n_0.$$

由 $\varepsilon > 0$ 的任意性知 $\gamma_n \to 0 (n \to \infty)$.

重写(23) 式如下:

$$\|x_{n+1} - Q(u)\|^2 \leqslant (1 - \alpha_n) \|x_n - Q(u)\|^2 + 2\alpha_n \gamma_n, \quad \forall n \geqslant n_0.$$

在引理1.2 中取 $a_n = \|x_n - Q(u)\|^2$, $\lambda_n = \alpha_n$, $b_n = 2\alpha_n\gamma_n$ 以及$c_n = 0$, 我们知 $\lambda_n \in (0, 1)$,

$\sum_{n=0}^{\infty}\lambda_n=\infty$ 以及 $b_n=o(\lambda_n)$. 因而引理 1.2 所有条件皆满足, 由引理 1.2, 则有 $\|x_n-Q(u)\|\to 0$, 即, $x_n\to Q(u)\in F:=\bigcap_{t\in\mathbf{R}^+}F(T(t))$.

这就完成了定理 2.1 的证明.

3　自反 Banach 空间中的收敛定理

定义 3.1　记 l^∞ 为所有有界序列 $a=(a_1,a_2,\cdots)$ 构成的一实 Banach 空间, 其范数为 $\|a\|=\sup_n|a_n|$. 设 μ 是 l^∞ 上的一有界连续泛函, 称 μ 为 Banach 极限, 如果它满足以下诸条件:

(a) 若 $a_n\geqslant 0$, $n=1,2,\cdots$, 则 $\mu(a)\geqslant 0$;

(b) $\mu(\{a_n\})=\mu(\{a_{n+1}\})$ 且 $\|\mu\|=\mu(1)=1$.

定理 3.1　设 E 为具一致 Gâteaux 可微的范数的自反的实 Banach 空间, 且 E 的任一非空有界闭凸子集对非扩张映象有公共不动点性质(注, 若 E 是一致光滑的, 则上述所有假设即可成为现实), C 是 E 的一非空闭凸子集, $\{T(t): t\geqslant 0\}: C\to C$ 是一非扩张半群, 且其不动点集 $F:=\bigcap_{t\geqslant 0}F(T(t))\neq\emptyset$. 设 $\{\alpha_n\}\subset(0,1)$, $\{\beta_n\}\subset[0,1]$ 和 $\{t_n\}\subset\mathbf{R}^+$ 是 3 实数列, 满足以下诸条件:

(i) $\alpha_n\to 0\ (n\to\infty)$; $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$; 存在常数 $a\in(0,1)$ 使对所有 $n\geqslant 0$ 有 $\beta_n\in[0,a)$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\infty$; $\sum_{n=0}^{\infty}|\beta_{n+1}-\beta_n|<\infty$;

(iii) $0\leqslant t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots$, $\lim_{n\to\infty}t_n=\infty$;

(iv) 对给定的 $f\in F$, $u, x_0\in C$,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sup_D\|T(s)T(t_n)x-T(t_n)x\|<\infty \text{ 一致地对所有 } s\in\mathbf{R}^+ \text{ 成立},$$

其中

$$D=\{x\in C: \|x-f\|\leqslant\max(\|x_0-f\|, \|u-f\|)\}.$$

则(5)式给出的序列 $\{x_n\}$ 强收敛于 Qu, 其中 Q 是由 C 映到 F 上的唯一的 sunny 非扩张保核收缩, $Q(u)=s-\lim_{t\to 0}z_t$ 其中 z_t 是下面的方程的唯一解:

$$z_t=\alpha_t u+(1-\alpha_t)T(t)z_t,\qquad t\in(0,\infty),$$

其中 $\{\alpha_t\}_{t\in(0,\infty)}\subset(0,1)$ 使 $\lim_{t\to\infty}\alpha_t=0$.

我们需要以下引理来证明定理 3.1 的结论.

引理 3.1(Aleyner-Reich[6])　若定理 3.1 的条件满足, 则存在由 C 映到 F 上的唯一的 sunny 非扩张保核收缩 Q, 其构造如下:

记 z_t 为以下方程的唯一不动点:

$$z_t=\alpha_t u+(1-\alpha_t)T(t)z_t,\qquad t\in(0,\infty),\tag{26}$$

其中 $\{\alpha_t\}_{t\in(0,\infty)}\subset(0,1)$ 使 $\lim_{t\to\infty}\alpha_t=0$. 则极限 $Q(u):=s-\lim_{t\to\infty}z_t$ 存在, 并且确定了由 C 映到 F 上的唯一的 sunny 非扩张保核收缩 Q.

引理 3.2(Aleyner-Reich[6, 命题2.2])　设 γ 是一实数, 设 $a=(a_1,a_2,\cdots)$ 是 l^∞ 中的一点, 满足 $\mu(a)\leqslant\gamma$ 对所有的 Banach 极限 μ, 且 $\limsup_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)\leqslant 0$. 则 $\limsup_{n\to\infty}a_n\leqslant\gamma$.

定理 3.1 的证明 用证明(9)、(15)、(17) 式和(19) 式的相同方法, 同样可以证明这些关系式在这里也成立. 因此为了证明定理 3.1, 我们只须证明下面的不等式成立:

$$\limsup_{n\to\infty}\langle u-Q(u), J(x_n-Q(u))\rangle \leqslant 0. \tag{27}$$

事实上, 由(26) 式知

$$(1-\alpha_s)(x_n-T(s)z_s)=(x_n-z_s)-\alpha_s(x_n-u),\qquad s\in(0,\infty).$$

由引理 1.3, 我们有

$$\begin{aligned}
&(1-\alpha_s)^2\|x_n-T(s)z_s\|^2=\|x_n-z_s-\alpha_s(x_n-u)\|^2\geqslant\\
&\quad\|x_n-z_s\|^2-2\alpha_s\langle x_n-u, J(x_n-z_s)\rangle=\\
&\quad\|x_n-z_s\|^2-2\alpha_s\langle x_n-z_s+z_s-u, J(x_n-z_s)\rangle=\\
&\quad\|x_n-z_s\|^2-2\alpha_s\|x_n-z_s\|^2-2\alpha_s\langle z_s-u, J(x_n-z_s)\rangle=\\
&\quad(1-2\alpha_s)\|x_n-z_s\|^2+2\alpha_s\langle u-z_s, J(x_n-z_s)\rangle.
\end{aligned}\tag{28}$$

由(19) 式: $\|T(s)x_n-x_n\|\to 0(n\to\infty)$ 一致地对所有 $s\in(0,\infty)$ 成立, 于是有

$$\begin{aligned}
&\mu\left(\left\{\|x_n-T(s)z_s\|\right\}\right)=\mu\left(\left\{\|x_n-T(s)x_n+T(s)x_n-T(s)z_s\|\right\}\right)=\\
&\quad\mu\left(\left\{\|T(s)x_n-T(s)z_s\|\right\}\right)\leqslant\mu\left(\left\{\|x_n-z_s\|\right\}\right).
\end{aligned}\tag{29}$$

因而由(28) 式和(29) 式知, 对任一 $n\geqslant 0$ 有

$$\begin{aligned}
&(1-\alpha_s)^2\mu\left(\left\{\|x_n-z_s\|\right\}\right)\geqslant(1-\alpha_s)^2\mu\left(\left\{\|x_n-T(s)z_s\|^2\right\}\right)\geqslant\\
&\quad(1-2\alpha_s)\mu\left(\left\{\|x_n-z_s\|^2\right\}\right)+2\alpha_s\mu\left(\left\{\langle u-z_s, J(x_n-z_s)\rangle\right\}\right).
\end{aligned}\tag{30}$$

由这些不等式则有

$$\frac{\alpha_s}{2}\mu\left(\left\{\|x_n-z_s\|\right\}\right)\geqslant\mu\left(\left\{\langle u-z_s, J(x_n-z_s)\rangle\right\}\right).\tag{31}$$

由于

$$\begin{aligned}
&\langle u-z_s, J(x_n-z_s)\rangle-\langle u-Qu, J(x_n-Qu)\rangle=\\
&\quad\langle u-z_s-(u-Qu), J(x_n-z_s)\rangle-\langle u-Qu, J(x_n-Qu)-J(x_n-z_s)\rangle,
\end{aligned}\tag{32}$$

再由 E 具有一致 Gâteaux 可微的范数, 以及(由引理 3.1) $z_s\to Qu(s\to\infty)$, 从而在(31) 式中令 $s\to\infty$ 就有

$$0\geqslant\mu\left(\left\{\langle u-Qu, J(x_n-Qu)\rangle\right\}\right).\tag{33}$$

另一方面, 由(15) 式有

$$\lim_{n\to\infty}|\langle u-Qu, J(x_{n+1}-Qu)\rangle-\langle u-Qu, J(x_n-Qu)\rangle|=0.\tag{34}$$

因而由引理 3.2 我们有

$$\limsup_{n\to\infty}\langle u-Qu, J(x_n-Qu)\rangle\leqslant 0,$$

这就证明了断言. 进一步, 用证明(23) 式同样的方法同样可证 $x_n\to Qu(n\to\infty)$.

这就完成了定理 3.1 的证明.

由定理 3.1 我们立刻得到如下定理:

定理 3.2 设 E 是一致光滑的 Banach 空间, C 是 E 的一非空闭凸子集, $\{T(t): t\in\mathbf{R}\}: C\to C$ 是一非扩张半群, 且其不动点集 $F:=\bigcap_{t\geqslant 0}F(T(t))\neq\varnothing$. 设 $\{\alpha_n\}\subset(0,1)$, $\{\beta_n\}\subset[0,1]$ 和 $\{t_n\}\subset\mathbf{R}^+$ 是 3 实数列, 满足以下诸条件:

(i) $\alpha_n\to 0(n\to\infty)$; $\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n=\infty$; 存在常数 $a\in(0,1)$ 使对所有 $n\geqslant 0$ 有 $\beta_n\in[0,a)$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty}|\alpha_{n+1}-\alpha_n|<\infty$; $\sum_{n=0}^{\infty}|\beta_{n+1}-\beta_n|<\infty$;

(iii) $0\leqslant t_0<t_1<t_2<\cdots<t_n<\cdots, \lim_{n\to\infty}t_n=\infty$;

(iv) 对给定的 $f\in F, u, x_0\in C$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sup_D\|T(s)T(t_n)x-T(t_n)x\|<\infty \text{一致地对所有 } s\in\mathbf{R}^+ \text{ 成立},$$

其中

$$D=\left\{x\in C:\|x-f\|\leqslant\max(\|x_0-f\|,\|u-f\|)\right\}.$$

则(5)式给出的序列$\left\{x_n\right\}$强收敛于Qu, 其中 Q 是由C 映到F 上的唯一的sunny 非扩张保核收缩, $Q(u)=s-\lim_{t\to 0}z_t$, 其中 z_t 是以下方程的唯一解:

$$z_t=\alpha_t u+(1-\alpha_t)T(t)z_t,\qquad t\in(0,\infty),$$

其中$\left\{\alpha_t\right\}_{t\in(0,\infty)}\subset(0,1)$ 使 $\lim_{t\to\infty}\alpha_t=0$.

致谢 作者们在此对审稿人对本文所提出的宝贵意见表示衷心感谢.

[参 考 文 献]

[1] Browder F E. Fixed point theorems for noncompact mappings in Hilbert space[J]. Proc Nat Acad Sci USA, 1965, **53**: 1272-1276.

[2] Reich S. Strong convergence theorems for resolvents of accretive operators in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1980, **75**: 287-292.

[3] Shioji N, Takahashi W. Strong convergence theorems for asymptotically nonexpansive mappings in Hilbert spaces[J]. Nonlinear Anal, 1998, **34**: 87-99.

[4] Suzuki T. On strong convergence to a common fixed point of nonexpansive semigroup in Hilbert spaces[J]. Proc Amer Math Soc, 2003, **131**(7): 2133-2136.

[5] Xu H K. A strong convergence theorem for contraction semigroups in Banach spaces[J]. Bull Austral Math Soc, 2005, **72**: 371-379.

[6] Aleyner A, Reich S. An explicit construction of sunny nonexpansive retractions in Banach spaces[J]. Fixed Point Theory and Applications, 2005, **3**: 295-305.

[7] Xu H K. Strong convergence of an iterative method for nonexpansive and accretive operators[J]. J Math Anal Appl, 2006, **314**: 631-643.

[8] Goebel K, Kirk W A. Topics in Metric Fixed Point Theory[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.

[9] Barbu V. Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces[M]. Leyden: Noordhoff, International Publishing, 1976.

[10] Bruck R E. Nonexpansive projections on subsets of Banach spaces[J]. Pacific J Math, 1973, **47**: 341-355.

[11] Reich S. Asymptotic behavior of contractions in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1973, **44**: 57-70.

[12] Browder F E. Convergence theorems for sequences of nonlinear operators in Banach spaces[J]. Math Z, 1967, **100**: 201-225.

[13] Goebel K, Reich S. Uniform Convexity, Hyperbolic Geometry and Nonexpansive Mappings[M]. New York: Marcel Dekker, 1984.

[14] Liu L S. Ishikawa and Mann iterarive processes with errors for nonlinear strongly accretive mappings

in Banach space[J]. J Math Anal Appl, 1995, **194**: 114-125.

[15] Chang S S. On Chidume's open questions and approximation solutions of multivalued strongly accretive mappings equations in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 1977, **216**: 94-111.

On the Strong Convergence Theorems for Nonexpansive Semi-Groups in Banach Spaces

ZHANG Shi-sheng[1], YANG Li[2], LIU Jing-ai[3]

(1. Department of Mathematics, Yibin University, Yibin, Sichuan 644007, P.R.China;

2. Department of Mathematics, Southwest University of Science and Technology, Mianyang, Sichuan 621002, P.R.China;

3. Department of Mathematics, College of Natural Science, Yanbian University, Yanji, Jilin 133002, P.R.China)

Abstract: Some strong convergence theorems of explicit composite iteration scheme for nonexpansive semi-groups in the framework of Banach spaces are established. The results not only extend and improve the corresponding results of Shioji-Takahashi, Suzuki, Xu and Aleyner-Reich, but also give a partially affirmative answer to the open questions raised by Suzuki and Xu.

Key words: nonexpansive semigroup; demi-closed principle; common fixed point; uniformly smooth Banach space; weakly continuous normalized duality mapping