

三斜晶体介质中三维平面波的反射*

A·夏托帕德海依

(印度矿业大学 应用数学系, 贾坎德 826004, 印度)

(郭兴明推荐)

摘要: 讨论三斜晶体介质半空间应力自由边界处三维平面波的传播. 给出了 1 个寻找三维准 P(qP)、准 SV(qSV) 和准 SH(qSH) 波的所有 3 个相速度解析表达式的方法. 得出了三斜介质中 qP 、 qSV 、 qSH 波反射系数振幅比的三维闭式解, 将其用于研究不同入射角时, 对应的反射系数的数值变化, 给出了不同极角和方位角时的图示. 最后通过数值实例表明, 与二维的情况相比较, 三维各向异性对反射系数的影响更明显.

关键词: 三维; 极角; 方位角; 反射; 三斜介质; 准 P 波; 准 SV 波; 准 SH 波

中图分类号: O347.41 **文献标识码:** A

引 言

在反射和折射问题的研究中, 体波是对地球内部成像的信息源. 晶体介质的弹性性质与其内部结构有关. 介质的各向异性对反射系数的影响在实际应用中很重要.

在各向异性弹性介质中, 有 3 种称为准 P(qP)、准 SV(qSV) 和准 SH(qSH) 波的体波传播, 而不是 Crampin^[1]中说的 P、SV 和 SH 波. 一般情况下, 质点的运动既不是纯纵向的也不是纯横向的.

许多作者对弹性波的反射与折射问题作过研究. Knott^[2]研究了地震学应用中弹性波的反射与折射问题, 他首先推导了超声波包反射的解析表达式. Gutenberg^[3]得到了各种固-固界面处, 作为入射角函数的反射波和透射波能量比的平方根.

Crampin 和 Taylor^[4]研究了各向异性介质中表面波的传播, 使用了基于 Thompson-Haskell 矩阵公式的数值码, 通过一般化技术, 允许具有任意各向异性对称性的任意组合的平面层. 他们还提供了一些在各向异性介质中表面波传播的数值例子, 用于鉴别地球物理结构. Crampin^[5]计算了在各向异性介质中特定对称方向上表面波传播的质点运动, 并在某些方向上, 质点运动呈现异常对称性特征. Achenbach^[6]的论著综述了弹性波反射和折射问题.

Keith 和 Crampin^[7-9]的 3 篇论文给出了(平面波)体波在各向异性多层介质中传播时的合成地震图. 首次在合成地震图中分离出剪切波. Tolstoy^[10]和 Norris^[11]研究了预应力固体中的弹性波. Pal 和 Chattopadhyay^[12]研究了在预应力弹性半空间中自由界面处平面波的反射现象.

* 收稿日期: 2006-05-08; 修订日期: 2007-06-07

作者简介: A. 夏托帕德海依, 教授, 博士(联系人, Tel: 0091-326-2210024(extn), 5230(Off), 5330(Res); E-mail: c_amares@yahoo.com).

该文原文为英文, 海治译, 张禄坤校.

Auld^[13]在其专著(卷一)中,对各向同性和各向异性介质中声波的传播进行了讨论.在其第二卷专著中,讨论了反射和折射的细节问题. Nayfeh^[14]在其书中,给出了对一般层状材料的动力学特性和层状合成纤维研究的最新进展.上面这两本书还解决了在各向异性层状介质中机械波传播的基本问题. Borejko^[15]推导出在各向同性的弹性介质中平面波的三维反射和透射系数(可用于对非平行板波导中的波分析),同时还列举出与平面波反射和透射问题相关的大量文献. Ogden 和 Sotirropoulos^[16-17]研究了可压和不可压弹性体中的反射问题. Chattopadhyay 和 Rogerson^[18]研究了线性不可压弹性介质半空间中,逐渐增长的应力自由边界处平面波的反射问题. Chattopadhyay^[19]讨论了三斜晶体介质中二维平面波的反射问题.

本文研究三斜晶体介质中应力自由边界处三维平面波的反射.提出了研究高度各向异性介质中反射波的一般方法.建立了给定传播矢量时,求解位移矢量方向的公式.主要讨论了三斜弹性半空间中3个相速度的三维闭式解,导出由入射qP波,确定qP、qSV和qSH波的反射系数的闭式表达式.给出了 φ 分别等于 45° 、 60° 和 90° 时的图示结果.最后通过数值实例表明,相比二维的情况,三维中各向异性对反射系数的影响更为明显.

1 公式推导

考虑一个具有21个弹性常数的均质、各向异性的三斜弹性介质,在 x_1x_3 平面内传播的平面波,位移向量 u 的分量为:

$$u_i = u_i(x_1, x_2, x_3, t), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

其中符号 t, x_1, x_2 和 x_3 分别代表时间和笛卡尔直角坐标轴.应力-应变关系式为:

$$\begin{cases} \tau_{11} = C_{11}e_{11} + C_{12}e_{22} + C_{13}e_{33} + 2(C_{14}e_{23} + C_{15}e_{13} + C_{16}e_{12}), \\ \tau_{22} = C_{12}e_{11} + C_{22}e_{22} + C_{23}e_{33} + 2(C_{24}e_{23} + C_{25}e_{13} + C_{26}e_{12}), \\ \tau_{33} = C_{13}e_{11} + C_{23}e_{22} + C_{33}e_{33} + 2(C_{34}e_{23} + C_{35}e_{13} + C_{36}e_{12}), \\ \tau_{23} = C_{14}e_{11} + C_{24}e_{22} + C_{34}e_{33} + 2(C_{44}e_{23} + C_{45}e_{13} + C_{46}e_{12}), \\ \tau_{13} = C_{15}e_{11} + C_{25}e_{22} + C_{35}e_{33} + 2(C_{45}e_{23} + C_{55}e_{13} + C_{56}e_{12}), \\ \tau_{12} = C_{16}e_{11} + C_{26}e_{22} + C_{36}e_{33} + 2(C_{46}e_{23} + C_{56}e_{13} + C_{66}e_{12}), \end{cases} \quad (2)$$

其中 $C_{ij} = C_{ji}$, $2e_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})$ τ_{ij} 是应力张量 τ 的分量, C_{ij} 为刚度系数, e_{ij} 为无穷小应变张量 e 的分量.无体力作用时的运动方程为:

$$\tau_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3)$$

其中 ρ 和 \ddot{u}_i 分别表示质量密度和加速度分量.

由方程(1)至方程(3),得到位移项表示的三维运动方程:

$$\begin{cases} \left\{ C_{11} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + 2C_{15} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + 2C_{56} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} + C_{55} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + C_{66} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right\} + \\ \left\{ C_{16} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + (C_{14} + C_{56}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} + (C_{46} + C_{25}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + \right. \\ \left. C_{45} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + C_{26} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right\} + \left\{ C_{15} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + (C_{14} + C_{56}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} + (C_{13} + C_{55}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \right. \\ \left. C_{35} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + (C_{36} + C_{45}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + C_{46} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} \right\} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}, \quad (4a) \\ \left\{ C_{16} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (C_{66} + C_{12}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + (C_{56} + C_{14}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + (C_{25} + C_{46}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \right. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. C_{45} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + C_{26} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} \right\} + \left\{ C_{66} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \right. \\
 & \left. 2C_{46} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} + 2C_{24} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + C_{44} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + C_{22} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} \right\} + \\
 & \left\{ C_{56} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + (C_{46} + C_{25}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} + (C_{36} + C_{45}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \right. \\
 & \left. (C_{23} + C_{44}) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + C_{24} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + C_{34} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right\} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}, \quad (4b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left\{ C_{15} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + (C_{56} + C_{14}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} + (C_{55} + C_{13}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_3} + (C_{45} + C_{36}) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2 \partial x_3} + \right. \\
 & \left. C_{46} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + C_{35} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} \right\} + \left\{ C_{56} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + (C_{25} + C_{46}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + \right. \\
 & \left. (C_{45} + C_{36}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_3} + (C_{44} + C_{23}) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2 \partial x_3} + C_{24} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + C_{34} \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} \right\} + \\
 & \left\{ C_{55} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + 2C_{45} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_2} + 2C_{35} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} + \right. \\
 & \left. 2C_{34} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2 \partial x_3} + C_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + C_{33} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} \right\} = \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2}, \quad (4c)
 \end{aligned}$$

从方程(4)易知,位移 u_1 、 u_2 和 u_3 相耦合. 令 $\mathbf{p} = (p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, p_3^{(n)})$ 表示单位传播矢量, c_n 为相速度, k_n 为 $x_1 x_3$ -平面上入射平面波的波数.

从运动方程(4), 求得平面波解:

$$\begin{pmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \\ u_3^{(n)} \end{pmatrix} = A_n \begin{pmatrix} d_1^{(n)} \\ d_2^{(n)} \\ d_3^{(n)} \end{pmatrix} \exp(i\mathbf{\Gamma}_n), \quad (5)$$

其中 $\mathbf{d} = (d_1^{(n)}, d_2^{(n)}, d_3^{(n)})$ 为单位位移矢量, 也可称作极化矢量. A_n 为波振幅, 又

$$\mathbf{\Gamma}_n = k_n(x_1 p_1^{(n)} + x_2 p_2^{(n)} + x_3 p_3^{(n)} - c_n t) \quad (6)$$

为平面波的相函数.

将方程(5)中, 将 u_1 、 u_2 和 u_3 的表达式代入到运动方程(4), 得到 Christoffel 方程为

$$\begin{bmatrix} (S - c^2) & T & P \\ m & (n - c^2) & e \\ h & r & (f - c^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1^{(n)} \\ d_2^{(n)} \\ d_3^{(n)} \end{bmatrix} = 0, \quad (7)$$

其中

$$\begin{cases} c^2 = \frac{\rho c_n^2}{C_{44}}, & C_{ij} = \frac{C_{ij}}{C_{44}}, & S_1 = C_{11} p_1^{(n)2} + C_{15} p_1^{(n)} p_3^{(n)} + C_{16} p_1^{(n)} p_2^{(n)}, \\ T_1 = C_{12} p_1^{(n)} p_2^{(n)} + C_{14} p_1^{(n)} p_3^{(n)} + C_{16} p_1^{(n)2}, \\ J_1 = C_{13} p_1^{(n)} p_3^{(n)} + C_{14} p_1^{(n)} p_2^{(n)} + C_{15} p_1^{(n)2}, \\ S_2 = C_{16} p_1^{(n)} p_2^{(n)} + C_{56} p_2^{(n)} p_3^{(n)} + C_{66} p_2^{(n)2}, \\ T_2 = C_{26} p_2^{(n)2} + C_{46} p_2^{(n)} p_3^{(n)} + C_{66} p_1^{(n)} p_2^{(n)}, \\ J_2 = C_{36} p_2^{(n)} p_3^{(n)} + C_{46} p_2^{(n)2} + C_{56} p_1^{(n)} p_2^{(n)}, \end{cases} \quad (8a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 S_3 = C_{15}p_1^{(n)}p_3^{(n)} + C_{55}p_3^{(n)^2} + C_{56}p_2^{(n)}p_3^{(n)}, \\
 T_3 = C_{25}p_2^{(n)}p_3^{(n)} + C_{45}p_3^{(n)^2} + C_{56}p_1^{(n)}p_3^{(n)}, \\
 J_3 = C_{35}p_3^{(n)^2} + C_{45}p_2^{(n)}p_3^{(n)} + C_{55}p_1^{(n)}p_3^{(n)}, \\
 m_1 = C_{16}p_1^{(n)^2} + C_{56}p_1^{(n)}p_3^{(n)} + C_{66}p_1^{(n)}p_2^{(n)}, \\
 m_2 = C_{26}p_1^{(n)}p_2^{(n)} + C_{46}p_1^{(n)}p_3^{(n)} + C_{66}p_1^{(n)^2}, \\
 m_3 = C_{36}p_1^{(n)}p_3^{(n)} + C_{46}p_1^{(n)}p_2^{(n)} + C_{56}p_1^{(n)^2}, \\
 n_1 = C_{12}p_1^{(n)}p_2^{(n)} + C_{25}p_2^{(n)}p_3^{(n)} + C_{26}p_2^{(n)^2}, \\
 n_2 = C_{22}p_2^{(n)^2} + C_{24}p_2^{(n)}p_3^{(n)} + C_{26}p_1^{(n)}p_2^{(n)}, \\
 n_3 = C_{23}p_2^{(n)}p_3^{(n)} + C_{24}p_2^{(n)^2} + C_{25}p_1^{(n)}p_2^{(n)}, \\
 e_1 = C_{14}p_1^{(n)}p_3^{(n)} + C_{45}p_3^{(n)^2} + C_{46}p_2^{(n)}p_3^{(n)}, \\
 e_2 = C_{24}p_2^{(n)}p_3^{(n)} + C_{44}p_3^{(n)^2} + C_{46}p_1^{(n)}p_3^{(n)}, \\
 e_3 = C_{34}p_3^{(n)^2} + C_{44}p_2^{(n)}p_3^{(n)} + C_{45}p_1^{(n)}p_3^{(n)}, \\
 q_1 = C_{15}p_1^{(n)^2} + C_{55}p_1^{(n)}p_3^{(n)} + C_{56}p_1^{(n)}p_2^{(n)}, \\
 q_2 = C_{25}p_1^{(n)}p_2^{(n)} + C_{45}p_1^{(n)}p_3^{(n)} + C_{56}p_1^{(n)^2}, \\
 q_3 = C_{35}p_1^{(n)}p_3^{(n)} + C_{45}p_1^{(n)}p_2^{(n)} + C_{55}p_1^{(n)^2}, \\
 g_1 = C_{14}p_1^{(n)}p_2^{(n)} + C_{45}p_2^{(n)}p_3^{(n)} + C_{46}p_2^{(n)^2}, \\
 g_2 = C_{24}p_2^{(n)^2} + C_{44}p_2^{(n)}p_3^{(n)} + C_{46}p_1^{(n)}p_2^{(n)}, \\
 g_3 = C_{34}p_2^{(n)}p_3^{(n)} + C_{44}p_2^{(n)^2} + C_{45}p_1^{(n)}p_2^{(n)}, \\
 w_1 = C_{13}p_1^{(n)}p_3^{(n)} + C_{35}p_3^{(n)^2} + C_{36}p_2^{(n)}p_3^{(n)}, \\
 w_2 = C_{23}p_2^{(n)}p_3^{(n)} + C_{34}p_3^{(n)^2} + C_{36}p_1^{(n)}p_3^{(n)}, \\
 w_3 = C_{33}p_3^{(n)^2} + C_{34}p_2^{(n)}p_3^{(n)} + C_{35}p_1^{(n)}p_3^{(n)}, \\
 S = S_1 + S_2 + S_3, T = T_1 + T_2 + T_3, P = J_1 + J_2 + J_3, \\
 m = m_1 + n_1 + e_1, n = m_2 + n_2 + e_2, e = m_3 + n_3 + e_3, \\
 h = q_1 + g_1 + w_1, r = q_2 + g_2 + w_2, f = q_3 + g_3 + w_3.
 \end{array} \right. \quad (8b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 q_1 = C_{15}p_1^{(n)^2} + C_{55}p_1^{(n)}p_3^{(n)} + C_{56}p_1^{(n)}p_2^{(n)}, \\
 q_2 = C_{25}p_1^{(n)}p_2^{(n)} + C_{45}p_1^{(n)}p_3^{(n)} + C_{56}p_1^{(n)^2}, \\
 q_3 = C_{35}p_1^{(n)}p_3^{(n)} + C_{45}p_1^{(n)}p_2^{(n)} + C_{55}p_1^{(n)^2}, \\
 g_1 = C_{14}p_1^{(n)}p_2^{(n)} + C_{45}p_2^{(n)}p_3^{(n)} + C_{46}p_2^{(n)^2}, \\
 g_2 = C_{24}p_2^{(n)^2} + C_{44}p_2^{(n)}p_3^{(n)} + C_{46}p_1^{(n)}p_2^{(n)}, \\
 g_3 = C_{34}p_2^{(n)}p_3^{(n)} + C_{44}p_2^{(n)^2} + C_{45}p_1^{(n)}p_2^{(n)}, \\
 w_1 = C_{13}p_1^{(n)}p_3^{(n)} + C_{35}p_3^{(n)^2} + C_{36}p_2^{(n)}p_3^{(n)}, \\
 w_2 = C_{23}p_2^{(n)}p_3^{(n)} + C_{34}p_3^{(n)^2} + C_{36}p_1^{(n)}p_3^{(n)}, \\
 w_3 = C_{33}p_3^{(n)^2} + C_{34}p_2^{(n)}p_3^{(n)} + C_{35}p_1^{(n)}p_3^{(n)}, \\
 S = S_1 + S_2 + S_3, T = T_1 + T_2 + T_3, P = J_1 + J_2 + J_3, \\
 m = m_1 + n_1 + e_1, n = m_2 + n_2 + e_2, e = m_3 + n_3 + e_3, \\
 h = q_1 + g_1 + w_1, r = q_2 + g_2 + w_2, f = q_3 + g_3 + w_3.
 \end{array} \right. \quad (8c)$$

由方程(7)的特征方程,取 Christoffel 方程的特征行列式为 0:

$$c^6 + a_1c^4 + a_2c^2 + a_3 = 0, \quad (9)$$

其中

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a_1 = -(S + n + f), \\
 a_2 = Sn + Sf + if - re - Tm - Ph, \\
 a_3 = -(Stf - Sre - Tmf + The + Pmr - Phn).
 \end{array} \right. \quad (10)$$

从方程(7)中得到:

$$\frac{d_3^{(n)}}{d_1^{(n)}} = \frac{mT - (n - c^2)(S - c^2)}{P(n - c^2) - Te}, \quad \frac{d_2^{(n)}}{d_1^{(n)}} = \frac{e(S - c^2) - Pm}{P(n - c^2) - eT}$$

和

$$\frac{d_3^{(n)}}{d_2^{(n)}} = \frac{mT - (n - c^2)(S - c^2)}{e(S - c^2) - Pm}. \quad (11)$$

给定传播矢量 \mathbf{p} 后, 可运用方程(11), 求得位移矢量 \mathbf{d} 的方向.

求解方程(9), 得到三维准 P(qP)、准 SV(qSV) 和准 SH(qSH) 波的相速度:

$$\begin{cases} \rho c_P^2 = -2r \cos\left(\frac{\phi}{3}\right) - \frac{a_1}{3}, & \rho c_{SV}^2 = 2r \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\phi}{3}\right) - \frac{a_1}{3}, \\ \rho c_{SH}^2 = 2r \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\phi}{3}\right) - \frac{a_1}{3}, \end{cases} \quad (12)$$

$$2q = \frac{2a_1^3}{27} - \frac{a_1 a_2}{3} + a_3, \quad 3p = \frac{3a_2 - a_1^2}{3}, \quad r = -\sqrt{|p|}, \quad \phi = \arccos\left(\frac{q}{r}\right). \quad (13)$$

这里 c_P 、 c_{SV} 和 c_{SH} 分别为为 qP、qSV 和 qSH 波的速度. 方程(12) 给出了, 三维三斜晶体介质波中 3 个相速度的显式解析表达式.

在各向同性介质中

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu, \quad C_{12} = C_{13} = C_{23} = \lambda, \quad C_{44} = C_{55} = C_{66} = \mu, \quad (14)$$

其他弹性常数均为 0, 式中 λ 和 μ 为 Lamé 常数.

最后, 将方程(14) 代入方程(12), 并取 $\varphi = \pi/2$, 便得到各向同性介质中纵波速度 c_P , 以及剪切波速度(重根 c_{SV} 和 c_{SH}):

$$c_P^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad c_{SV}^2 = c_{SH}^2 = \frac{\mu}{\rho}.$$

因此, 三维入射波通过晶体后, 一般将产生 3 个反射波: 1 个准纵波和 2 个准横波(1 个快波, 1 个慢波). 在高度各向异性的介质中, 这里得到的三维相速度闭式表达式是 1 个新解, 这些相速度表达式有助于科学家用以计算类似的问题.

2 问题求解

设在半空间的边界平面 $x_2 = 0$ 处有平面的准反射波. 在直角坐标系 (x_1, x_2, x_3) 中, 平面 $x_2 = 0$ 表示自由表面, x_2 轴方向垂直向下. 传播方向由两极角 θ 和 φ 确定. 三维空间球坐标系中, 令入射波方向为 (θ_0, φ_0) . 由于 3 个位移分量 u_i 相耦合(见方程(4)), 由入射波产生的 3 个反射波 qP、qSV、qSH 分别沿着 (θ_n, φ_n) ($n = 1, 2, 3$) (θ_k 是极角, φ_k 是方位角). 入射角和 3 个反射波角与自由表面成正交. 取下标 $n = 0, 1, 2, 3$, 分别表示入射波和反射波 qP、qSV、qSH.

在平面 $x_2 = 0$ 上, 三维入射波和反射波的位移与应力为:

$$\begin{cases} u_j^{(n)} = A_n d_j^{(n)} \exp(i\Gamma_n), & j = 1, 2, 3, \\ \tau_{12}^{(n)} = P_{1n} i k_n A_n \exp(i\Gamma_n), & \tau_{22}^{(n)} = Q_n i k_n A_n \exp(i\Gamma_n), & \tau_{23}^{(n)} = R_n i k_n A_n \exp(i\Gamma_n), \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$P_{1n} = C_{16} p_1^{(n)} d_1^{(n)} + C_{26} p_2^{(n)} d_2^{(n)} + C_{36} p_3^{(n)} d_3^{(n)} + C_{46} \left\{ d_2^{(n)} p_3^{(n)} + d_3^{(n)} p_2^{(n)} \right\} + C_{56} \left\{ d_1^{(n)} p_3^{(n)} + d_3^{(n)} p_1^{(n)} \right\} + C_{66} \left\{ d_1^{(n)} p_2^{(n)} + d_2^{(n)} p_1^{(n)} \right\}, \quad (16)$$

$$Q_n = C_{12} d_1^{(n)} p_1^{(n)} + C_{22} p_2^{(n)} d_2^{(n)} + C_{23} p_3^{(n)} d_3^{(n)} + C_{24} \left\{ d_2^{(n)} p_3^{(n)} + d_3^{(n)} p_2^{(n)} \right\} + C_{25} \left\{ d_1^{(n)} p_3^{(n)} + d_3^{(n)} p_1^{(n)} \right\} + C_{26} \left\{ d_1^{(n)} p_2^{(n)} + d_2^{(n)} p_1^{(n)} \right\}, \quad (17)$$

$$\begin{cases} R_n = C_{14} d_1^{(n)} p_1^{(n)} + C_{24} p_2^{(n)} d_2^{(n)} + C_{34} p_3^{(n)} d_3^{(n)} + C_{44} \left\{ d_2^{(n)} p_3^{(n)} + d_3^{(n)} p_2^{(n)} \right\} + C_{45} \left\{ d_1^{(n)} p_3^{(n)} + d_3^{(n)} p_1^{(n)} \right\} + C_{46} \left\{ d_1^{(n)} p_2^{(n)} + d_2^{(n)} p_1^{(n)} \right\}, \\ \Gamma_n = k_n (x_1 p_1^{(n)} + x_2 p_2^{(n)} + x_3 p_3^{(n)} - c_n t) \end{cases} \quad (18)$$

和 $n = 0, 1, 2, 3$.

对入射平面波

$$p_1^{(0)} = \sin\theta_0 \cos \varphi_0, p_2^{(0)} = -\cos\theta_0, p_3^{(0)} = \sin\theta_0 \sin \varphi_0, c_0 = c_1.$$

对反射 qP 波

$$p_1^{(1)} = \sin\theta_1 \cos \varphi_1, p_2^{(1)} = \cos\theta_1, p_3^{(1)} = \sin\theta_1 \sin \varphi_1, c_1 = c_{L1}.$$

对反射 qSV 波

$$p_1^{(2)} = \sin\theta_2 \cos \varphi_2, p_2^{(2)} = \cos\theta_2, p_3^{(2)} = \sin\theta_2 \sin \varphi_2, c_2 = c_T.$$

对反射 qSH 波

$$p_1^{(3)} = \sin\theta_3 \cos \varphi_3, p_2^{(3)} = \cos\theta_3, p_3^{(3)} = \sin\theta_3 \sin \varphi_3, c_3 = c_{T1}, \quad (19)$$

其中 c_1 是入射平面波的相速度, c_{L1} 、 c_T 和 c_{T1} 分别为三维反射 qP、qSV 和 qSH 波的相速度. 在自由边界平面 $x_2 = 0$ 处, 边界条件为:

$$\begin{cases} \tau_{12}^{(0)} + \tau_{12}^{(1)} + \tau_{12}^{(2)} + \tau_{12}^{(3)} = 0, & \tau_{22}^{(0)} + \tau_{22}^{(1)} + \tau_{22}^{(2)} + \tau_{22}^{(3)} = 0, \\ \tau_{23}^{(0)} + \tau_{23}^{(1)} + \tau_{23}^{(2)} + \tau_{23}^{(3)} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

通过边界条件和方程(15), 得到

$$\begin{cases} P_{10} A_0 k_0 \exp\{ik_0(x_1 p_1^{(0)} + x_3 p_3^{(0)} - c_1 t)\} + \\ P_{11} A_1 k_1 \exp\{ik_1(x_1 p_1^{(1)} + x_3 p_3^{(1)} - c_{L1} t)\} + \\ P_{12} A_2 k_2 \exp\{ik_2(x_1 p_1^{(2)} + x_3 p_3^{(2)} - c_T t)\} + \\ P_{13} A_3 k_3 \exp\{ik_3(x_1 p_1^{(3)} + x_3 p_3^{(3)} - c_{T1} t)\} = 0, \\ Q_0 A_0 k_0 \exp\{ik_0(x_1 p_1^{(0)} + x_3 p_3^{(0)} - c_1 t)\} + \\ Q_1 A_1 k_1 \exp\{ik_1(x_1 p_1^{(1)} + x_3 p_3^{(1)} - c_{L1} t)\} + \\ Q_2 A_2 k_2 \exp\{ik_2(x_1 p_1^{(2)} + x_3 p_3^{(2)} - c_T t)\} + \\ Q_3 A_3 k_3 \exp\{ik_3(x_1 p_1^{(3)} + x_3 p_3^{(3)} - c_{T1} t)\} = 0, \\ R_0 A_0 k_0 \exp\{ik_0(x_1 p_1^{(0)} + x_3 p_3^{(0)} - c_1 t)\} + \\ R_1 A_1 k_1 \exp\{ik_1(x_1 p_1^{(1)} + x_3 p_3^{(1)} - c_{L1} t)\} + \\ R_2 A_2 k_2 \exp\{ik_2(x_1 p_1^{(2)} + x_3 p_3^{(2)} - c_T t)\} + \\ R_3 A_3 k_3 \exp\{ik_3(x_1 p_1^{(3)} + x_3 p_3^{(3)} - c_{T1} t)\} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

这些方程对 x_1 、 x_3 和 t 同样适合, 因此有

$$\begin{aligned} k_0(x_1 \sin\theta_0 \cos \varphi_0 + x_3 \sin\theta_0 \cos \varphi_0 - c_1 t) &= \\ k_1(x_1 \sin\theta_1 \cos \varphi_1 + x_3 \sin\theta_1 \sin \varphi_1 - c_{L1} t) &= \\ k_2(x_1 \sin\theta_2 \cos \varphi_2 + x_3 \sin\theta_2 \sin \varphi_2 - c_T t) &= \\ k_3(x_1 \sin\theta_3 \cos \varphi_3 + x_3 \sin\theta_3 \sin \varphi_3 - c_{T1} t), & \end{aligned} \quad (22)$$

该式满足

$$k_0 c_1 = k_1 c_{L1} = k_2 c_T = k_3 c_{T1} = \omega, \quad (23)$$

$$k_0 \sin\theta_0 \cos \varphi_0 = k_1 \sin\theta_1 \cos \varphi_1 = k_2 \sin\theta_2 \cos \varphi_2 = k_3 \sin\theta_3 \cos \varphi_3 = k \quad (24)$$

和

$$k_0 \sin\theta_0 \sin \varphi_0 = k_1 \sin\theta_1 \sin \varphi_1 = k_2 \sin\theta_2 \sin \varphi_2 = k_3 \sin\theta_3 \sin \varphi_3 = k', \quad (25)$$

其中 k 和 k' 为外观波数, ω 为圆频率.

入射波和所有反射波的相方向在同一平面上, 表明 $\varphi_0 = \varphi_i (i = 1, 2, 3)$. 该式也可解释为入射波和反射波在同一平面上. 根据方程(24)和方程(25), 得出 $\varphi_0 = \varphi_i (i = 1, 2, 3)$.

qP 波、qSV 波和 qSH 波的振幅比, 分别表示为 A_1/A_0 、 A_2/A_0 和 A_3/A_0 . 求解方程(22), 可得到三维 qP 波、qSV 波和 qSH 波的反射系数的显式解析表达式:

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{D_1}{D_0}, \quad \frac{A_2}{A_0} = \frac{D_2}{D_0}, \quad \frac{A_3}{A_0} = \frac{D_3}{D_0}, \quad (26)$$

其中

$$D_0 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

和

$$\begin{cases} a_i = \frac{P_{1i} k_i}{P_{10} k_0}, & b_i = \frac{Q_i k_i}{Q_0 k_0}, & c_i = \frac{R_i k_i}{R_0 k_0}, & i = 1, 2, 3, \\ P_{1i} = \frac{P_{1i}}{C_{44}}, & Q_i = \frac{Q_i}{C_{44}}, & R_i = \frac{R_i}{C_{44}}, & i = 0, 1, 2, 3. \end{cases} \quad (27)$$

将第 i 列的 3 个元素替换为 -1 , 可得行列式 $D_i (i = 1, 2, 3)$.

作为特例, 当 $\varphi = \pi/2$ 时, 本文中三维时的结论退化为 Chattopadhyay^[18] 得到的二维时的结论.

3 算例与结论

使用 Vosges 沙岩进行数值计算, 该沙岩具有三斜各向异性的特征(见 Mensch 和 Rasolofoaon^[19]). 为图示考虑, 设 $\varphi_0 = \varphi$. Vosges 沙岩的弹性常数为:

$$C_{11} = 16.248 \text{ GPa}, \quad C_{22} = 11.88 \text{ GPa}, \quad C_{33} = 12.216 \text{ GPa},$$

$$C_{12} = 1.48 \text{ GPa}, \quad C_{13} = 2.4 \text{ GPa}, \quad C_{14} = -1.152 \text{ GPa},$$

$$C_{15} = 0.0 \text{ GPa}, \quad C_{16} = -0.561 \text{ GPa},$$

$$C_{23} = 1.032 \text{ GPa}, \quad C_{24} = 0.912 \text{ GPa}, \quad C_{25} = 1.608 \text{ GPa}, \quad C_{26} = 1.248 \text{ GPa},$$

$$C_{34} = -0.672 \text{ GPa}, \quad C_{35} = 0.216 \text{ GPa}, \quad C_{36} = -0.216 \text{ GPa},$$

$$C_{44} = 5.64 \text{ GPa}, \quad C_{45} = 2.16 \text{ GPa}, \quad C_{46} = 0.0 \text{ GPa},$$

$$C_{55} = 5.88 \text{ GPa}, \quad C_{66} = 6.912 \text{ GPa}, \quad C_{56} = 0.0 \text{ GPa}, \quad \rho = 2.40 \text{ gm/cm}^3.$$

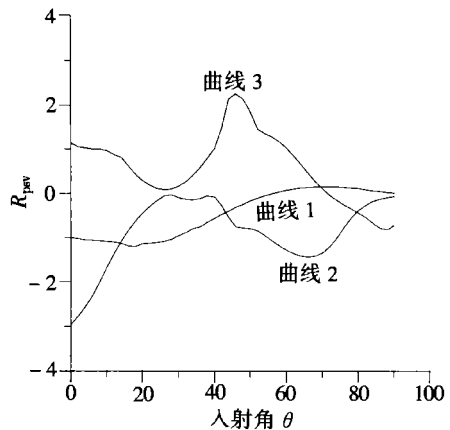
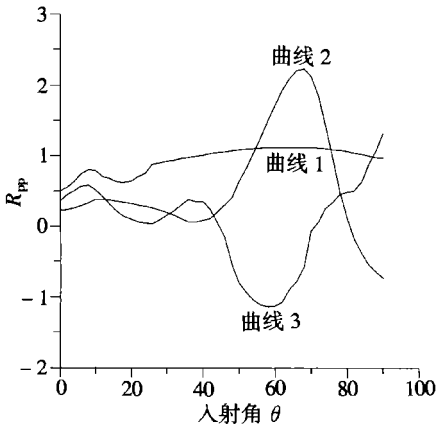


图1 入射 qP 波和反射 qP 波时的振幅比 图2 入射 qP 波和反射 qSV 波时的振幅比

当 φ 取 90° 、 60° 和 45° 时, 得到曲线 1、曲线 2 和曲线 3. 计算反射波 qP、qSV 和 qSH 的振幅比, 并绘制出入射角 θ 从 0° 到 90° 变化时相应的曲线(见图 1 到图 3). 图 1、图 2 和图 3 的纵坐

标表示 qP 波、qSV 波和 qSH 波的反射系数, 横坐标表示入射角(单位: 度)。

图 1 表示入射 qP 波的反射波为 qP 波时, 反射系数 $R_{pp} = A_1/A_0$ 的变化曲线。在曲线 1 中, $\varphi = 90^\circ$, 入射角 θ 在 8° 到 12° 之间时, 反射系数 R_{pp} 突然增大, 直到 $\theta = 90^\circ$ 时曲线趋向缓和。在曲线 2 中, $\varphi = 60^\circ$, 当入射角 θ 在 50° 到 75° 之间时, 反射系数 R_{pp} 的值较大。在曲线 3 中, $\varphi = 45^\circ$, 入射角 θ 在 43° 到 78° 之间时, 反射系数 R_{pp} 的值较小。

图 2 表示入射 qP 波的反射波为 qSV 波时, 反射系数 $R_{psv} = A_2/A_0$ 的变化曲线。在曲线 1 中, $\varphi = 90^\circ$, 入射角 θ 在 8° 到 12° 之间时, 反射系数 R_{psv} 的值递减, 直到 $\theta = 90^\circ$ 时曲线趋向缓和。在曲线 2 中, $\varphi = 60^\circ$, 当入射角 θ 在 45° 到 85° 之间时, 反射系数的值递减得很多。在曲线 3 中, $\varphi = 45^\circ$, 当入射角 θ 在 35° 到 64° 之间时, 反射系数的值较大。

图 3 表示入射 qP 波的反射波为 qSH 波时, 反射系数 $R_{psh} = A_3/A_0$ 的变化曲线。在曲线 1 中, $\varphi = 90^\circ$, 入射角 θ 在 10° 到 30° 之间时, 反射系数 R_{psh} 的值递增, 直到 $\theta = 90^\circ$ 时曲线趋向缓和。在曲线 2 中, $\varphi = 60^\circ$, 当入射角 θ 在 45° 到 80° 之间时, 反射系数 R_{psh} 的值递减得很多。在曲线 3 中, $\varphi = 45^\circ$, 当入射角 θ 在 40° 到 78° 之间时, 反射系数的值较大。

当 $\varphi = \pi/2$ 时, 图 1、图 2 和图 3 中的曲线 1 与 Chattopadhyay^[18] 得到的结果相符。

由此可以得到结论: 在三斜介质中, 三维情况下 ($\varphi = 45^\circ$ 和 $\varphi = 60^\circ$) 的振幅比, 与二维情况 ($\varphi = 90^\circ$) 有着明显区别。本文导出的速度和反射系数的闭式解, 对科学家有极大帮助的。三维情况中的反射波振幅比受到很明显的影 响, 从而, 可用于解释和分析地球物理学中的结果。通过信号处理和地震数据分析, 文中的结论可以帮助预测更深地层处地球物理参数。通过非破坏实验(NDT), 本文的研究还能帮助地球物理学家和冶金学家对岩石和材料结构的分析。

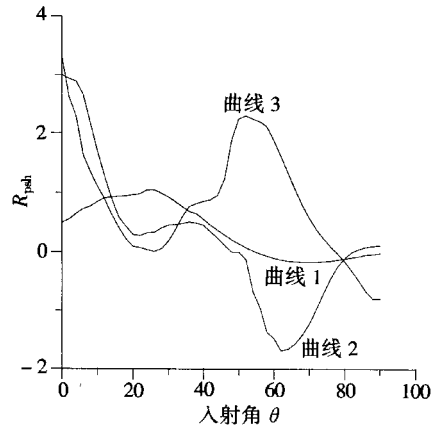


图 3 入射 qP 波和反射 qSH 波时的振幅比

[参 考 文 献]

- [1] Crampin S. A review of the effects of anisotropic layering on the propagation of surface waves[J]. Geophys J R Astr Soc, 1977, 49: 9-27.
- [2] Knott C G. Reflection and refraction of elastic waves with Seismological applications[J]. Phil Mag, 1899, 48: 64-97.
- [3] Gutenberg B. Energy ratio of reflected and refracted seismic waves[J]. Bull Seis Soc Am, 1944, 34: 85-112.
- [4] Crampin S, Taylor D B. The propagation of surface waves in anisotropic media[J]. Geophys J Rastr Soc, 1971, 25: 71-87.
- [5] Crampin S. Distinctive particle motion of surface waves as a diagnostic of anisotropic layering[J]. Geophys J R Astr Soc, 1975, 40: 177-186.
- [6] Achenbach J D. Wave Propagation in Elastic Solids [M]. New York: North Holland Pub Comp, 1976.
- [7] Keith C M, Crampin S. Seismic body waves in anisotropic media: reflection and refraction at a plane interface[J]. Geophys J R Astr Soc, 1977, 49: 181-208.

- [8] Keith C M, Crampin S. Seismic body waves in anisotropic media: propagation through a layer[J]. *Geophys J R Astr Soc*, 1977, **49**: 209-223.
- [9] Keith C M, Crampin S. Seismic body waves in anisotropic media, synthetic seismograms[J]. *Geophys J R Astr Soc*, 1977, **49**: 225-243.
- [10] Tolstoy I. On elastic waves in pre-stressed solids[J]. *J Geophy Res*, 1982, **87**: 6823-6827.
- [11] Norris A N. Propagation of plane waves in a pre-stressed elastic media[J]. *J Acoust Soc Am*, 1983, **74**: 1642-1643.
- [12] Pal A K, Chattopadhyay A. The reflection phenomena of plane waves at a free boundary in a pre-stressed elastic half-space[J]. *J Acoust Soc Am*, 1984, **76**(3): 924-925.
- [13] Auld B A. *Acoustic Fields and Waves in Solids* [M]. Volume I. Florida: Keiege Publishing Company, Malabar, 1990.
- [14] Nayfeh A H. *Wave Propagation in Layered Anisotropic Media with Applications to Composites* [M]. Amsterdam: Elsevier, 1995.
- [15] Borejko P. Reflection and transmission coefficients for three-dimensional plane waves in elastic media[J]. *Wave Motion*, 1996, **24**: 371-393.
- [16] Ogden R W, Sotiropoulos D. The effect of pre-stress on the propagation and reflection of plane waves in incompressible elastic solids[J]. *IMA J Appl Math*, 1997, **59**: 95-121.
- [17] Ogden R W, Sotiropoulos D. Reflection of plane waves from the boundary of a pre-stressed compressible elastic half-space[J]. *IMA J Appl Math*, 1998, **61**: 61-90.
- [18] Chattopadhyay A, Rogerson G A. Wave reflection in slightly compressible, finitely deformed elastic media[J]. *Archives of Applied Mechanics*, 2001, **71**: 307-316.
- [19] Chattopadhyay A. Wave reflection in tridinic medium[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2006, **76**: 65-74.
- [20] Mensch T, Rasolofosaon P. Elastic wave velocities in anisotropic media of arbitrary anisotropy- generalization of Thomson's parameters α , β and γ [J]. *Geophys J Int*, 1997, **128**: 43-63.

Reflection for Three-Dimensional Plane Waves in Triclinic Crystalline Medium

A. Chattopadhyay

(Department of Applied Mathematics, Indian School of Mines University,
Dhanbad- 826004, Jharkhand, India)

Abstract: The propagation of three-dimensional plane waves at a traction free boundary of a half-space composed of triclinic crystalline material is discussed. A method has been developed to find the analytical expressions of all the three phase velocities of quasi P (qP), quasi SV (qSV) and quasi SH (qSH) in three-dimensions. Closed form expressions in three-dimensions for the amplitude ratios of reflection coefficients of qP, qSV and qSH waves in a triclinic medium were obtained. These expressions are used for studying numerically the variation of the reflection coefficients with the angle of incidence. The graphs were drawn for different polar angle and azimuth. Numerical results presented indicate that the anisotropy affect the reflection coefficients significantly in three-dimensional case compared to two-dimensional case.

Key words: three-dimensional; polar angle; azimuth; reflection; triclinic medium; quasi-P; quasi-SV; quasi-SH wave