

黏弹性圆柱壳计及切变形和转动惯量时的动力学稳定性

B Kh 艾什马托夫

(塔什干灌溉与土壤改良学院 数模与信息技术系, 塔什干 100000, 乌兹别克斯坦)

(郭兴明推荐)

摘要: 根据修正的 Timoshenko 理论, 在几何非线性中考虑了剪切变形和转动惯量, 对黏弹性圆柱壳的动力稳定性进行了研究. 根据 Bubnov-Galerkin 法, 结合基于求积公式的数值方法, 将问题简化为求解具有松弛奇异核的非线性积分-微分方程的问题. 针对物理-力学和几何参数在大范围内的变化, 研究壳体的动力特性, 显示了材料的黏弹性对圆柱壳动力稳定性的影响. 最后, 比较了通过不同的理论得到的结果.

关键词: Timoshenko 理论; 动力稳定性; 圆柱壳; 黏弹性

中图分类号: O347.2 文献标识码: A

引言

现有大量学术论文专注于研究勾合薄壁壳型结构的变形、强度和稳定性问题. 这类结构在外部静态/动态载荷作用下, 广泛地应用于机械、飞机、火箭制造以及其他工程工业领域.

由于壳体结构的承载能力有着显著的提高, 因此在研究新算法时, 相应的数学模型应该反映变形体的这种特性. 在许多情况下, 对复合结构采用传统的算法时, 由于其计算能力的限止而导致错误的结论.

由现代复合材料制造的结构体的强度, 是由横向剪切变形决定的. 经典的壳体理论却忽略了这些效应, 如今对这些效应的研究, 重新推动了壳体一般化理论的发展. 主要想法是, 在壳体中使用系列展开式逼近的方法来表示位移或应变. 但是实际上, 普遍采用基于壁厚横截面的剪切或应变分布假设. Kirchhoff-Love 假设^[1], Timoshenko 梁模型^[2]、Uflyand 和 Mindlin 板^[3-4]、Reissner 和 Ambartsumyan 壳^[5-6], 都是众所周知的. 依照这些模型可知, 在研究薄壁结构时, 应考虑横向剪切效应. 还需要注意, 尽管 Kirchhoff-Love 模型能正确地解决一部分实际问题, 但是在大部分情况下, 得到的结果不够全面^[1]. 因此, 在壳体振动和稳定性动力学问题的求解中, 突破假设的局限性, 提出了几何非线性假设.

另外, 大量实验和基础研究指出, 由复合材料制造的结构具有显著的黏弹性^[7-9].

Volmir^[11]、Ambartsumyan^[6]、Shirakawa^[10]、Bogdanovich^[11]、Awrejcewicz 与 Krys ko^[12], 等人, 在

收稿日期: 2007-02-15; 修订日期: 2007-06-26

作者简介: B Kh 艾什马托夫, 副教授, 博士(联系人. Tel: + 998-712-635016; E-mail: ebkh@mail.ru).

该文原文为英文, 海治译, 张禄坤校.

Timoshenko 假设的基础上, 致力于研究弹性圆柱壳振动和动力学稳定性非线性问题的求解, 得到了一些基本结论

但是, 仅有少数的研究是基于 Kirchhoff Love 和 Timoshenko 假设, 针对黏弹性情况的研究了 Voight 微分模型^[13] 和 Boltzman-Volterra 物理模型^[14,15] 2 个问题(后者将指数核作为松弛核)

研究结果^[7,9,16] 表明, 无论 Voight 微分模型, 还是具有指数松弛核的 Boltzman-Volterra 积分模型, 都不能完整地描述初始时刻壳体的真实过程, 只能在材料特性随时间不变的情况下, 讨论材料中的蠕变过程 不能随便选择指数核, 因为使用指数核, 已对问题作了实质上的简化, 得到带有正则核的积分-微分方程组 通过微分运算, 可以归结常微分方程求解, 又大多数情况, 可由著名的 Runge-Kutta^[11,14,17] 算法数值求解 直到现在, 现有算法仍不能对包含奇异核的 Rzhantsyn^[7,9,16] 型问题求解

一种基于求积公式的数值方法, 它能用于求解有奇异核的非线性积分-微分方程, 奇异核中具有足够数量的流变参数, 用以描述壳体材料真实特性 该方法能得到足够高精度的结果, 具有通用性, 能解决大部分黏弹性理论中的动力学问题 从消耗计算机运行时间上看也很经济 基于该方法的大量的数值结果^[20-29] 与实验数据^[1] 符合得也很好

值得注意的是, 大部分弹性和黏弹性系统动力学的非线性问题的研究中, 为了问题简化而没有考虑弹性波的传播^[1] 这意味着, 在控制方程中, 依赖位移的切向惯量项被取消 计算结果显示, 在上述假设条件下得到的方程, 关于变形、应力函数和角位移结果是令人满意的 但是, 在研究带有可靠的物理-力学和几何参数的壳体中发生的动力过程时, 有必要考虑弹性波的传播 许多论文在弹性状态^[11-12] 时讨论了该问题 但是没能指出这些假设应用的局限性

本文的目的是, 通过修正的 Timoshenko 理论, 在考虑剪切变形和转动惯量的情况下, 对黏弹性圆柱壳的动力稳定性这一非线性问题进行研究

1 数学模型

建立一个研究黏弹性圆柱壳动力稳定性问题的数学模型 壳体长为 L , 半径为 R , 厚度为 h , 均质、各向同性材料壳体是几何非线性的, 即考虑剪切变形和转动惯量 应力 x 、 y 、 xy 和应变 x 、 y 、 xy 间的关系(Boltzman-Volterra 模型) 由文献[8] 给出:

$$x = \frac{E}{1-\nu} (1-\nu^*) (x + y), \quad (x - y), \quad xy = \frac{E}{2(1+\nu)} (1-\nu^*) xy, \quad (1)$$

其中 ν^* 为具有松弛核 (t) : $\nu^* = \int_0^t (t-\tau) \nu(\tau) d\tau$ 的积分算子, ν 为材料的泊松比, E 为弹性模量 这里以及后面公式中, 符号 $(x - y)$ 表示通过坐标循环变换得到的另一个关系式

考虑初始变形 $w_0 = w_0(x, y)$ 时, 中面应变 x 、 y 、 xy 和 x 、 y 、 z 方向上的位移 u 、 v 、 w 之间的关系由文献[1] 给出:

$$\begin{cases} x = \frac{u}{x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{w}{x} \right)^2 - \left(\frac{w_0}{x} \right)^2 \right], \\ y = \frac{v}{y} - \frac{1}{R} (w - w_0) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{w}{y} \right)^2 - \left(\frac{w_0}{y} \right)^2 \right], \\ xy = \frac{u}{y} + \frac{v}{x} + \frac{w}{x} \frac{w}{y} - \frac{w_0}{x} \frac{w_0}{y}, \end{cases} \quad (2)$$

应变 $\frac{z}{x}$ 、 $\frac{z}{y}$ 、 $\frac{z}{xy}$ 和角位移 x 、 y 之间的几何关系也由文献[1]给出:

$$\frac{z}{x} = x + z \frac{x}{x}, \quad (x \quad y), \quad \frac{z}{xy} = xy + z \left[\frac{-x}{y} + \frac{-y}{x} \right], \quad (3)$$

其中 x 、 y 和 xy 由方程(2) 决定

考虑方程(1) 和方程(3), 对弯矩 M_x 、 M_y 和扭矩 H 及剪力 Q_x 、 Q_y 有(见文献[22] 至文献[27]):

$$\begin{cases} M_x = D(1 - \quad) \left[\frac{-x}{x} + \frac{-y}{y} \right], \quad (x \quad y), \\ H = \frac{D(1 - \quad)}{2} (1 - \quad) \left[\frac{-x}{y} + \frac{-y}{x} \right], \\ Q_x = K^2 \frac{Eh}{2(1 + \quad)} (1 - \quad) \left[\frac{(w - w_0)}{x} + \quad \right], \quad (x \quad y), \end{cases} \quad (4)$$

其中无量纲系数 K^2 由文献[3] 至文献[5] 给出, D 为壳体的抗弯刚度

将方程(1) 和方程(4) 代入文献[1] 中的控制方程, 得到:

$$\begin{aligned} \frac{-x}{x} + \frac{-xy}{y} &= \frac{2u}{t^2}, \quad \frac{xy}{x} + \frac{-y}{y} = \frac{2v}{t^2}, \\ \frac{1}{h} \left[\frac{Q_x}{x} + \frac{Q_y}{y} \right] + \frac{1}{R} y + \frac{-}{x} \left[x \frac{w}{x} + xy \frac{w}{y} \right] + \\ &\quad - \frac{1}{y} \left[xy \frac{w}{x} + y \frac{w}{y} \right] + \frac{q}{h} - \frac{2w}{t^2} = 0, \\ \frac{M_x}{x} + \frac{H}{y} - Q_x - \frac{h^3}{12} \frac{2}{t^2} \frac{x}{x} &= 0 \quad (x \quad y) \end{aligned}$$

从而得到下面的积分-微分方程组:

$$(1 - \quad) \left\{ \frac{-x}{x} + \frac{-y}{x} + \frac{1 - \quad}{2} \frac{-xy}{y} \right\} - \frac{1 - \quad}{E} \frac{2}{t^2} \frac{2u}{t^2} = 0, \quad (5a)$$

$$(1 - \quad) \left\{ \frac{-y}{y} + \frac{-x}{y} + \frac{1 - \quad}{2} \frac{-xy}{x} \right\} - \frac{1 - \quad}{E} \frac{2}{t^2} \frac{2v}{t^2} = 0, \quad (5b)$$

$$\begin{aligned} - \frac{K^2(1 - \quad)}{2} (1 - \quad) \left[\frac{2(w - w_0)}{x^2} + \frac{-x}{x} + \frac{2(w - w_0)}{y^2} + \frac{-y}{y} \right] - \\ \frac{1}{R} (1 - \quad) (y + x) - \\ - \frac{1}{x} \left[\frac{w}{x} (1 - \quad) (x + y) + \frac{1 - \quad}{2} \frac{w}{y} (1 - \quad) xy \right] - \\ - \frac{1}{y} \left[\frac{w}{y} (1 - \quad) (y + x) + \frac{1 - \quad}{2} \frac{w}{x} (1 - R^*) xy \right] - \\ \frac{q(1 - \quad)}{Eh} + \frac{1 - \quad}{E} \frac{2}{t^2} \frac{2w}{t^2} = 0, \quad (5c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1 - \quad) \left\{ \frac{2}{x^2} + \frac{1 - \quad}{2} \frac{2}{y^2} + \frac{1 + \quad}{2} \frac{2}{x y} - \right. \\ \left. \frac{6K^2(1 - \quad)}{h^2} \left[\frac{(w - w_0)}{x} + \quad \right] \right\} - \frac{(1 - \quad)^2}{E} \frac{2}{t^2} \frac{x}{x} = 0 \quad (x \quad y) \quad (5d) \end{aligned}$$

其中 ρ 为壳体材料密度

注意到, 方程组(5) 是一个充分一般化的方程, 对特定情况, 从该方程组可得到不同理论所对应的方程组

当不考虑动力过程中弹性波的传播时, 该方程组得到了大大的简化 这时其前面两个方程中的惯性项将不出现 由文献[1], 引入中面应力函数 F 后, 前面 2 个方程自然成立:

$$x = \frac{2F}{y^2}, \quad y = \frac{2F}{x^2}, \quad xy = -\frac{2F}{x y},$$

根据文献[22] 至文献[27] 得到, 黏弹性圆柱形壳体关于横向变形 $w = w(x, y, t)$ 、应力函数 $F = F(x, y, t)$ 和角位移 $x = x(x, y, t)$, $y = y(x, y, t)$ 的控制方程:

$$\begin{aligned} & \frac{K^2 E}{2(1+\nu)} (1-\nu^*) \left[\Delta^2 (w - w_0) + \frac{x}{x} + \frac{y}{y} \right] + \\ & \frac{1}{R} \frac{2F}{x^2} + L(w, F) + \frac{q}{h} - \frac{2w}{t^2} = 0, \\ & \frac{D}{h} (1-\nu^*) \left[\frac{2}{x^2} + \frac{1}{2} (1+\nu) \frac{2}{x y} + \frac{1}{2} (1-\nu) \frac{2}{y^2} \right] - \\ & \frac{K^2 E}{2(1+\nu)} (1-\nu^*) \left[\frac{(w - w_0)}{x} + \frac{2}{x} \right] - \frac{h^2}{12} \frac{2}{t^2} = 0 \quad (x \neq y), \\ & \frac{1}{E} \Delta^4 F = - (1-\nu^*) \left\{ \frac{1}{2} [L(w, w) - L(w_0, w_0)] + \frac{1}{R} \frac{2(w - w_0)}{x^2} \right\} \end{aligned}$$

在 Kirchhoff Love 假设条件下, 相应的黏弹性圆柱壳运动方程为:

$$\begin{aligned} & \frac{D}{h} (1-\nu^*) \Delta^4 (w - w_0) = L(w, F) + \frac{1}{R} \frac{2F}{x^2} + \frac{q}{h} - \frac{2w}{t^2}, \\ & \frac{1}{E} \Delta^4 F = - (1-\nu^*) \left\{ \frac{1}{2} [L(w, w) - L(w_0, w_0)] + \frac{1}{R} \frac{5^2(w - w_0)}{5x^2} \right\} \end{aligned}$$

2 黏弹性圆柱壳体的动力稳定性)) Bubnov-Galerkin 法

考虑力 $P(t) = vt$ (v 为加载率) 沿壳体长度动力加压时黏弹性圆柱壳的稳定性问题#

几何非线性、满足 Timoshenko 假设的问题由方程(5) 给出 1 假设壳体边界简支, 方程(5) 满足边界条件的的解可通过以下多项式近似得到:

$$\left\{ \begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M u_{nm}(t) \cos \frac{nPx}{L} \cos \frac{my}{R}, \\ v(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M v_{nm}(t) \sin \frac{nPx}{L} \sin \frac{my}{R}, \\ w(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \sin \frac{nPx}{L} \cos \frac{my}{R}, \\ w_0(x, y) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{0nm}(t) \sin \frac{nPx}{L} \cos \frac{my}{R}, \\ W(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{xnm}(t) \cos \frac{nPx}{L} \cos \frac{my}{R}, \\ W_y(x, y, t) &= \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{ynm}(t) \sin \frac{nPx}{L} \sin \frac{my}{R} \end{aligned} \right. \quad (6)$$

进一步, 假设外激励荷 $q = q(x, y, t)$ 沿壳体表面不规则分布:

$$q(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M q_{nm}(t) \sin \frac{nPx}{L} \cos \frac{my}{R} l$$

在将方程(6) 代入方程(5), 并使用 Bubnov-Galerkin 法, 需引入无量纲量:

$$\frac{ukl}{h}, \frac{vkl}{h}, \frac{wkl}{h}, \frac{w_{0kl}}{h}, \frac{\sqrt{S}}{(c/R)} \#(t), P^* = \frac{P}{E} \left(\frac{R}{h} \right),$$

$$t^* = \frac{P}{P_{cr}} = \frac{vt}{P_{cr}} = \frac{(c/R)t}{\sqrt{S}} = \frac{P^*}{P_{cr}^*}, S = P_{cr}^*{}^2 \left(\frac{cED}{vR} \right)^2,$$

$$P_{cr}^* = \frac{P_{cr}}{E} \left(\frac{R}{h} \right) = \frac{P^2}{\sqrt{3(1-L^2)}},$$

关于无量纲量 $u_{kl}, v_{kl}, w_{kl}, W_{xkl}, W_{ykl}$, 可得到以下非线性积分-常微分方程组:

$$\frac{1}{S} \mathcal{L}_{kl} + \frac{1}{1-L^2} \left[\frac{P^2}{K^2} k^2 + \frac{1-L}{2} l^2 \right] (1-\#^*) u_{kl} =$$

$$\frac{P}{2K(1-L)} kl (1-\#^*) v_{kl} - \frac{PL}{K(1-L^2)} k (1-\#^*) (w_{kl} - w_{0kl}) +$$

$$\sum_{n,i=1}^6 \sum_{m,j=1}^6 A_{klmnij} (1-\#^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}),$$

$$\frac{1}{S} \mathcal{L}_{kl} + \frac{1}{1-L^2} \left[l^2 + \frac{P^2}{2K^2} k^2 (1-L) \right] (1-\#^*) v_{kl} =$$

$$\frac{P}{2K(1-L)} kl (1-\#^*) u_{kl} + \frac{1}{1-L} l (1-\#^*) (w_{kl} - w_{0kl}) +$$

$$\sum_{n,i=1}^6 \sum_{m,j=1}^6 B_{klmnij} (1-\#^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}),$$

$$\frac{1}{S} \mathcal{L}_{kl} + \frac{1}{2(1-L^2)} \left[\frac{K_P^2}{K^2} (1-L) k^2 + K^2 (1-L) l^2 + 2 \right] (1-\#^*) (w_{kl} - w_{0kl}) +$$

$$\frac{K^2}{2D(1+L)} \left[\frac{P}{K} k (1-\#^*) W_{xkl} - l (1-\#^*) W_{ykl} \right] +$$

$$\frac{PL}{K(1-L^2)} k (1-\#^*) u_{kl} - \frac{1}{1-L} l (1-\#^*) v_{kl} - \left(\frac{k}{K} \right)^2 P^2 P_{lp} D t^* w_{kl} +$$

$$\sum_{n,i=1}^6 \sum_{m,j=1}^6 C_{klmnij} w_{mn} (1-\#^*) u_{ij} + \sum_{n,i=1}^6 \sum_{m,j=1}^6 D_{klmnij} w_{mn} (1-\#^*) v_{ij} -$$

$$\frac{D}{4PK^2(1-L^2)} \sum_{n,i=1}^6 \sum_{m,j=1}^6 (K^2 m j f_{nik} e_{njl} + LP^2 n i h_{nik} c_{njl}) (1-\#^*) (w_{nm} w_{ij} - w_{0nm} w_{0ij}) -$$

$$\sum_{n,i=1}^6 \sum_{m,j=1}^6 G_{klmnij} w_{mn} (1-\#^*) (w_{ij} - w_{0ij}) +$$

$$\sum_{n,i,r=1}^6 \sum_{m,j,s=1}^6 H_{klmnijrs} w_{mn} (1-\#^*) (w_{ij} w_{rs} - w_{0ij} w_{0rs}) = q_{kl},$$

$$\frac{1}{S} \mathcal{W}_{kl} + \frac{1}{1-L^2} \left[\frac{P^2}{K^2} k^2 + \frac{1-L}{2} l^2 + \frac{6K^2(1-L)}{D^2} \right] (1-\#^*) W_{xkl} -$$

$$\frac{P}{2K(1-L)} kl (1-\#^*) W_{ykl} + \frac{6K^2 P}{KD(1+L)} k (1-\#^*) (w_{kl} - w_{0kl}) = 0,$$

$$\frac{1}{S} \mathcal{W}_{kl} + \frac{1}{1-L^2} \left[l^2 + \frac{P^2(1-L)}{2K^2} k^2 + \frac{6K^2(1-L)}{D^2} \right] (1-\#^*) W_{ykl} -$$

$$\frac{P}{2K(1-L)} kl (1-\#^*) W_{xkl} - \frac{6K^2}{D(1+L)} l (1-\#^*) (w_{kl} - w_{0kl}) = 0,$$

$$k = 1, 2, \dots, N; l = 1, 2, \dots, M,$$

其中 c 为壳体材料中的声速, 通过公式 $\sqrt{E/\rho}$ 给出, P_{cr} 为静临界载荷, $D = h/R$, $K = L/R$ 系统中出现其他无量纲参数和壳体的物理-力学与几何参数有关¹

数值方法求解该积分-微分方程时,使用了文献[18]的求积分公式1 这里,以文献[16]中的3个流变参数(A、B和A)的Koltunov-Rzhanitsyn 奇异核作为松弛核:

$$\#(t) = A e^{-Bt} t^{A-1} \quad (0 < A < 1) l$$

如文献[1]所述,确定临界时间和临界载荷的标准时需满足条件:变形应比厚度小得多1 为了确定动临界载荷,使用动力放大因子 F_D , 该因子为动/临界0载荷与静载荷上限的比1

图1至图7和表1给出了使用计算机和 Delphi 得到的计算结果1 除非另作说明,初始值取为: $w_{0kl} = 10^{-4}$, $A = 0.05$, $A = 0.25$, $B = 0.05$, $q_{kl} = 0$, $K = 2$, $S = 1$, $D = 0.05$, $L = 0.321$

研究表明在上述情况下, Bubnov-Galarkin 法是数值收敛的,方程(6)中的 N 和 M 值,造成变形前期急剧增加1

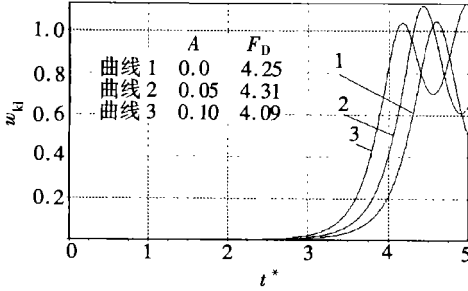


图 1 流变参数 A 的影响

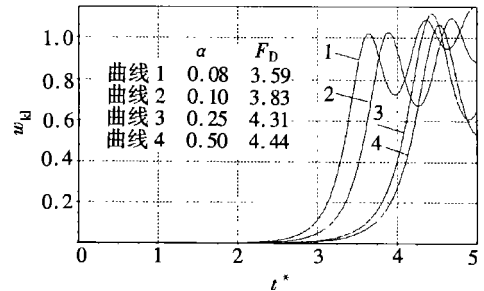


图 2 流变参数 A 的影响

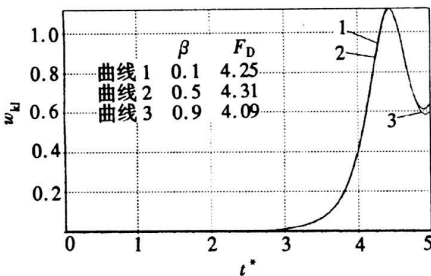


图 3 流变参数 B 的影响

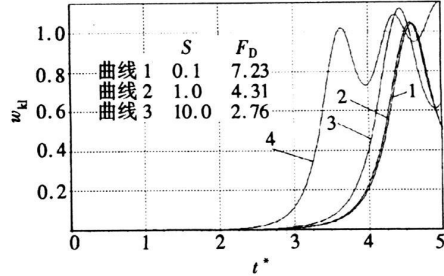


图 4 不同松弛核的影响

图1显示了材料的黏弹性对圆柱壳行为的影响1 无量纲量 t^* 等于可变的压力与 Euler 静载荷的比,无量纲变形 w_{kl} 沿横坐标和纵坐标设置 1 弹性情况($A = 0$ 时的曲线 1)和黏弹性情况($A = 0.05$ 时的曲线 2, $A = 0.1$ 时的曲线 3)时的放大因子 F_D 分别等于 4.52、4.31和 4.091 图示结果表明,考虑壳体材料的黏弹性属性,会导致临界载荷的下降1

图2给出了不同的流变参数 A ($A = 0.08$ 时的曲线 1、 $A = 0.1$ 时的曲线 2、 $A = 0.25$ 时的曲线 3、 $A = 0.5$ 时的曲线 4)时的黏弹性壳体材料的动力特性 1 这时的放大因子 F_D 分别等于 3.59、3.83、4.31和 4.441 从图中可以看到,随着流变参数 A 增加,临界载荷和临界时间增大 1 这些结果表明了,相对其他流变参数 A 和 B,参数 A 起着关键的作用,当 $A = 0.08$ 和 $A = 0.5$ 时,对应的临界载荷的差超过 20% 1 值得注意的是,在弹性情况下,当 $S = 1$ 时,半波数 N 的/临界0 值为 9,而在黏弹性的情况下, $N = 121$

研究表明,表示黏性的流变参数 B ($0 < B < 1$) 的变化,对临界载荷和临界时间起不了本质的影响(图 3 中, $B = 0.01$ 时的曲线 1、 $B = 0.095$ 时的曲线 2、 $B = 0.9$ 时的曲线 3) 1

为了进一步研究不同松弛核时对圆柱壳行为的影响,在图 4 中给出了壳体变形的计算曲

线1 立即发现, 具有指数核 $\#(t) = Ae^{-Bt}$ (曲线2) 的黏弹性问题结果, 和弹性问题结果 ($A = 0$ 时的曲线1) 几乎完全相一致。对于 Koltunov-Rzhanitsyn 型核 $\#(t) = Ae^{-Bt}t^A$ ($A = 0.05, B = 0.05, A = 0.25$ 时的曲线3和 $A = 0.08$ 时的曲线4), 区别是显著的, 相差超过 20%。结果显示, 对许多作者广泛使用的、具有指数型核的黏弹性问题的结果并无新意, 因为它们与弹性问题得到的解相一致。因此, 在粘弹性动力学问题中有必要选择 Koltunov-Rzhanitsyn 型核作为松弛核, 因为它们不仅能描述初始时间, 还能描述随后时间段里在黏弹性结构中发生的过程。

图5 给出了加载速度参数不同时, $S = 0.1, 1$ 和 10 时变形相应的放大因子 F_D 分别等于 7.23、4.31 和 2.76。参数 S 和 v^2 成反比关系。正如预计, 与文献 [1] 中弹性的情况类似, 随着黏弹性情况中 v 的增加, 临界载荷和临界时间也随之增加。但是, 值得注意的是, 在黏弹性问题中, 早期变形比起弹性情况增加得要快。

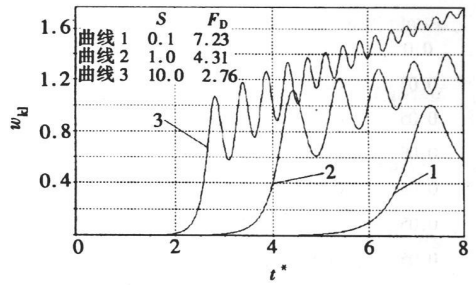


图5 不同加载速度的影响

接着研究无量纲几何参数 D 的影响。对 $D = 0.01, D = 0.03$ 和 $D = 0.05$, 放大因子 F_D 分别等于 4.39、4.36 和 4.311。它表明, 随着无量纲几何参数 D 的增加 (尽管不是最重要的), 临界载荷和临界时间随之减少。

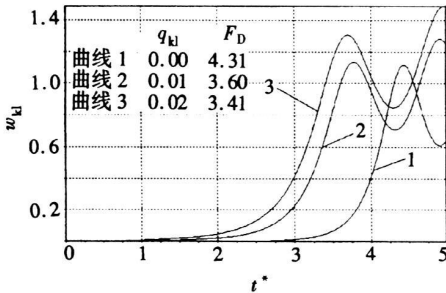


图6 不同剪切载荷 q_{kl} 的影响

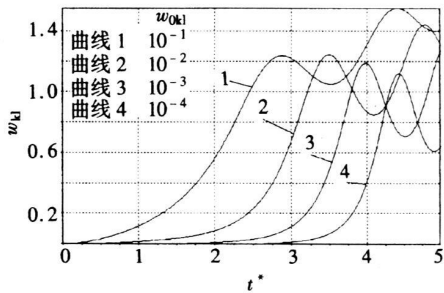


图7 初始缺陷 w_{0kl} 的影响

图6 给出了不同剪切载荷 q_{kl} 时, 黏弹性圆柱壳的 w_{kl} 的函数图。对 $q_{kl} = 0$ (曲线1)、 $q_{kl} = 0.01$ (曲线2) 和 $q_{kl} = 0.02$ (曲线3) 时, 放大因子 F_D 的/临界值0 分别等于 4.31、3.60 和 3.41。因此, 参数 q_{kl} 的增加, 导致所有曲线向左移, 即朝着较小的 t^* 值的方向, 从而使放大因子减小。

图7 研究了在快速增加的压缩载荷下, 初始缺陷对圆柱壳特性的影响 (图中曲线1 时的 $w_{0kl} = 10^{-1}$, 曲线2 时的 $w_{0kl} = 10^{-2}$, 曲线3 时的 $w_{0kl} = 10^{-3}$ 和曲线4 时的 $w_{0kl} = 10^{-4}$)。和弹性情况一样, w_{0kl} 的增加导致临界载荷和临界时间减少。

表1 中给出了圆柱壳的物理-力学和几何参数在大范围内变化时, 不同理论得出的 F_D 的值。

从表1 可以看出: 在许多情况下, 线性理论(L.) 和 Kirchhoff-Love 理论(K. L.) 得到的 F_D 的值几乎一样。但是随着初始缺陷 w_{0kl} 值的提高, 这些理论开始出现差别。比如当 $w_{0kl} = 10^{-1}$ 时, 相差 4.4%。

与此同时, 当外加静载荷 q_{kl} 时, 随着初始缺陷参数值 w_{0kl} 和加载速度 S 的增加, 无量纲几

何参数 D 的减小, Kirchoff-Love 理论 (K. L.) 和 Timoshenko (T.) 得到的 F_D 值是一致的 1 但在其他情况下, 结果是有差别的 1 随着流变参数 A 和加载速度参数的减小以及几何参数 D 的增加, 差别更显著 1 在这种情况下, 这些理论得到的 F_D 值的差别超过 33% 1

表 1 不同理论下得到的 F_D 值

A	A	B	q	K	w_0	S	D	F_D 的值			
								理论缩写			
								L.	K.-L.	T.	T. 1
0.0	-	-	0	2	10^{-4}	1	0.05	4.50	4.52	4.38	4.52
0.03	0.25	0.05	0	2	10^{-4}	1	0.05	4.39	4.40	4.26	4.38
0.05	0.25	0.05	0	2	10^{-4}	1	0.05	4.29	4.31	4.18	4.31
0.08	0.25	0.05	0	2	10^{-4}	1	0.05	4.17	4.20	4.05	4.20
0.05	0.08	0.05	0	2	10^{-4}	1	0.05	3.62	3.65	3.44	3.59
0.05	0.1	0.05	0	2	10^{-4}	1	0.05	3.85	3.86	3.69	3.83
0.05	0.5	0.05	0	2	10^{-4}	1	0.05	4.43	4.45	4.32	4.44
0.05	0.25	0.03	0	2	10^{-4}	1	0.05	4.29	4.31	4.18	4.31
0.05	0.25	0.01	0	2	10^{-4}	1	0.05	4.29	4.31	4.18	4.31
0.05	0.25	0.05	0	2	10^{-4}	1	0.05	1.41	1.43	1.43	1.48
0.05	0.25	0.05	0	2	10^{-4}	1	0.05	1.00	1.02	1.02	1.05
0.05	0.25	0.05	0	3	10^{-4}	1	0.05	4.30	4.31	4.17	4.31
0.05	0.25	0.05	0	4	10^{-4}	1	0.05	4.29	4.31	4.17	4.31
0.05	0.25	0.05	0	2	10^{-3}	1	0.05	3.69	3.71	3.59	3.80
0.05	0.25	0.05	0	2	10^{-2}	1	0.05	2.96	2.99	2.90	3.22
0.05	0.25	0.05	0	2	10^{-1}	1	0.05	1.96	2.05	2.01	2.46
0.05	0.25	0.05	0	2	10^{-4}	0.1	0.05	7.43	7.45	6.94	7.23
0.05	0.25	0.05	0	2	10^{-4}	10	0.05	2.60	2.61	2.66	2.76
0.05	0.25	0.05	0	2	10^{-4}	1	0.01	4.29	4.30	4.26	4.39
0.05	0.25	0.05	0	2	10^{-4}	1	0.1	4.31	4.33	4.01	4.29
0.05	0.25	0.05	0	2	10^{-1}	10	0.01	1.31	1.31	1.31	1.82
0.05	0.25	0.05	0	2	10^{-4}	0.1	0.1	4.27	4.29	2.86	3.93

进一步考虑弹性波传播 (T1) 时黏弹性圆柱壳中 F_D 值的变化 1 结果表明, 切向惯量产生的影响将随着初始缺陷参数 w_{0kl} 值的增加 1 随着加载速度的增加以及几何参数 D 的减小, 影响更为明显 1 此时差别超过 32% 1

3 结 论

本文对黏弹性圆柱壳动力稳定性的非线性问题的研究表明:

- 1) 在快速增长的动载荷作用下, 临界载荷和临界时间的减少本质上是由于材料的黏弹性造成的 1
- 2) 通常使用指数核作为材料黏弹性的松弛核, 但不能用于黏弹性系统动力学计算问题 1
- 3) Koltunov-Rzhanitsyn 弱奇异核, 并含有足够数量的流变参数, 能很好地描述任意时刻黏弹性壳体中发生的变化 1
- 4) 计算中应根据圆柱壳体的几何和物理参数, 选择恰当的计算理论 (线性理论或非线性的 Kirchoff-Love/Timoshenko 理论, 以及是否考虑弹性波的传播等) 以求和实验数据相符合 1

[参 考 文 献]

- [1] Volmir A S. The Nonlinear Dynamics of Plates and Shells [M]. Moscow: Nauka, 1972.
- [2] Timoshenko S P. Vibration Problems in Engineering [M]. New York: Van Nostrand, 1958.
- [3] Uflyand Ya S. Distribution of waves at transverse vibrations of cores and plates [J]. Journal of Soviet Applied Mathematics and Mechanics [Translated from Prikladnaya Matematika i Mekhanika], 1948, 12(3): 287-300.
- [4] Mindlin R D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates [J]. Journal of Applied Mechanics, 1951, 19(1): 31-8.
- [5] Reissner E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates [J]. Journal of Applied Mechanics, 1945, 12: A69-88.
- [6] Ambartsumyan S A. General Theory of Anisotropic Shells [M]. Moscow: Nauka, 1974. (in Russian)
- [7] Rzhantsyn A R. Theory of Creep [M]. Moscow: Stroyizdat, 1968. (in Russian)
- [8] Il'yushin A A, Pobedrya B E. Fundamentals of the Mathematical Theory of Thermoelastoplasticity [M]. Moscow: Nauka, 1970. (in Russian)
- [9] Rabotnov Yu N. Elements of the Hereditary Mechanics of Solids [M]. Moscow: Nauka, 1977. (in Russian)
- [10] Shirakawa K. Effects of shear deformation and rotatory inertia on vibration and buckling of cylindrical shells [J]. Journal of Sound and Vibration, 1983, 91(3): 425-37.
- [11] Bogdanovich A E. Nonlinear Dynamic Problems for Composite Cylindrical Shells [M]. New York: Elsevier Science Publishers Ltd, 1993.
- [12] Awrejcewicz J, Kryszewski V A. Nonclassical Thermoelastic Problems in Nonlinear Dynamics of Shells. Applications of the Bubnov-Galerkin and Finite Difference Numerical Methods [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2003.
- [13] Okazaki A, Tatemichi A. Damping properties of two-layered cylindrical shells with an unconstrained viscoelastic layer [J]. Journal of Sound and Vibration, 1994, 176(2): 145-61.
- [14] 程昌钧, 张能辉. 轴压作用下粘弹性柱壳的动力学行为 [J]. 应用数学和力学, 2001, 22(1): 1-8.
- [15] Kozlov V I, Karnaukhova T V. Basic equations for viscoelastic laminated shells with distributed piezoelectric inclusions intended to control nonstationary vibrations [J]. Journal of International Applied Mechanics, 2002, 38(10): 1253-60.
- [16] Koltunov M A. Creep and Relaxation [M]. Moscow: Visshaya shkola, 1976. (in Russian)
- [17] Potapov V D. Stability of Stochastic Elastic and Viscoelastic Systems [M]. Chichester (England): Wiley, 1999.
- [18] Badalov F B, Eshmatov Kh, Yusupov M. About some methods of the decision of systems integro-differential equations meeting in problems viscoelasticity [J]. Journal of Soviet Applied Mathematics and Mechanics [Translated from Prikladnaya Matematika i Mekhanika], 1987, 51: 867-71.
- [19] Badalov F B, Eshmatov Kh. The brief review and comparison of integrated methods of mathematical modeling in problems of hereditary mechanics of rigid bodies [J]. International Journal of Electronic Modeling, 1989, 11(2): 81-90.
- [20] Badalov F B, Eshmatov Kh. To research of nonlinear vibrations of viscoelastic plates with initial imperfections [J]. Journal of Soviet Applied Mechanics [Translated from Prikladnaya Mekhanika], 1990, 28(8): 99-105.
- [21] Badalov F B, Eshmatov Kh, Akbarov U I. Stability of a viscoelastic plate under dynamic loading [J]. Journal of Soviet Applied Mechanics [Translated from Prikladnaya Mekhanika], 1991, 27(9): 892-99.

- [22] Verlan A F, Eshmatov B Kh. Mathematical simulation of oscillations of orthotropic viscoelastic plates with regards to geometric nonlinearity[J]. International Journal of Electronic Modeling, 2005, 27(4): 3-17.
- [23] Eshmatov B Kh. Dynamic stability of viscoelastic plates at growing compressing loadings[J]. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2006, 47(2): 165-75.
- [24] Eshmatov B Kh. Nonlinear vibration analysis of viscoelastic plates based on a refined Timoshenko theory[J]. International Applied Mechanics, 2006, 42(5): 596-605.
- [25] Eshmatov B Kh. Nonlinear vibrations and dynamic stability of viscoelastic orthotropic rectangular plates[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 300: 709-26.
- [26] Eshmatov B Kh. Nonlinear vibrations of viscoelastic cylindrical shells taking into account shear deformation and rotatory inertia[J]. International Journal of Nonlinear Dynamics, 2007.
- [27] Eshmatov B Kh, Khodjaev D A. Nonlinear vibrations and dynamical stability of viscoelastic cylindrical panel with concentrated masses[J]. International Journal of Acta Mechanica, 2007, 190(1/ 4): 165-183.
- [28] Eshmatov B Kh. Nonlinear vibrations of viscoelastic orthotropic cylindrical shells in view of propagation of elastic waves[J]. Materials of XVII Session of the International School on Models of Mechanics of the Continuous Environment, July, 4-10, Kazan, 2004, 186-91. (in Russian)
- [29] Eshmatov B Kh. Nonlinear vibrations of viscoelastic orthotropic plates from composite materials [A]. Third M I T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics [C]. June 14-17, Boston: the Massachusetts Institute of Technology (USA), 2005.

D y n a m i c S t a b i l i t y o f V i s c o e l a s t i c C i r c u l a r
C y l i n d r i c a l S h e l l s T a k i n g I n t o A c c o u n t S h e a r
D e f o r m a t i o n a n d R o t a t o r y I n e r t i a

B. Kh. Eshmatov

(Department of Mathematical Modeling and Information Technology ,
Tashkent Institute of Irrigation and Melioration , Tashkent , 100000, Uzbekistan)

Abstract: The problem of dynamic stability of a viscoelastic circular cylindrical shell was discussed according to Timoshenko revised theory, with account of shear deformation and rotatory inertia in the geometrically nonlinear statement. Proceeding by Bubnov-Galerkin method in combination with numerical method based on the quadrature formula the problem was reduced to a solution of a system of nonlinear integro-differential equations with singular kernel of relaxation. For wide range of variation of physical-mechanical and geometrical parameters, dynamic behavior of the shell was studied. The influence of viscoelastic properties of the material on the dynamical stability of the circular cylindrical shell is shown. Results obtained using different theories are compared.

Key words: Timoshenko theory; dynamic stability; cylindrical shell; viscoelasticity