文章编号: 1000-0887(007) 10-1 3-09

应用数学和力学编委会, ISSN 1000-0887

含极限次临界增长项 p-Laplace 方程的无穷多解

耿 堤

(华南师范大学 数学科学学院, 广州 510631)

(李继彬推荐)

摘要: 讨论了有界光滑区域上一类 p-Laplace 方程, 非线性项具奇对称性且在无穷远为极限次临界增长 证明了变分泛函在大范围内满足推广的 Palais-Smale 条件, 构造了变分泛函的一列临界值, 进而得到了无穷多个弱解的存在性, 对应泛函的能量趋于正无穷 所得到的结果推广了次临界增长的情形

关 键 词: p-Laplace 算子; 极限次临界增长; 集中紧性原理; 广义的 Palais-Smale 条件; 渐近极小极大值原理

中图分类号: O175. 5 文献标识码: A

1 问题的提出和主要结果

考虑 $\boldsymbol{R}^N$ 中有界光滑区域 上的 p-Laplace 方程:

$$\begin{cases} - \quad (| \quad u|^{p-} \quad u) = f(x, u), & x \quad , \\ u = 0, & x \quad , \end{cases} \tag{1}$$

其中 $N > \ p > 1$, $(| \quad u|^{p-} \quad u) = \quad {}_p u$ 是所谓的 p-Laplace 算子

关于非线性项 $f(x, u)$, 我们提出以下的假设:

(F1) 非线性项 $f(x, u)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是连续函数, 且满足如下的增长条件

$$\lim_{u} \sup \frac{f(x, u)u}{|u|^{p^*}} = 0, \qquad \text{关于 } x \qquad \text{一致}, \tag{ }$$

其中 $p^* = Np/(N - p)$ 是 Sobolev 嵌入的临界指标, 即嵌入关系

$$W_0^{1,p}(\ ) \quad L^s(\ ), \tag{3}$$

对于 $s \quad [1, p^*)$ 是连续且紧的, 对于 $s = p^*$ 仅是连续而非紧的 当 $s = p^*$ 时嵌入(3) 中的最佳嵌入常数记为 S

(F) $f(x, u)$ 关于 u 在无穷远是超线性的, 即满足如下关系

$$\lim_{u} \frac{f(x, u)u}{|u|^p} = + \quad , \qquad \text{关于 } x \qquad \text{一致}$$

(F3) $f(x, u)$ 满足如下的广义单调性: 存在 $\quad 1$ 和 $M \quad 0$, 使得对于 $u, v \quad \mathbf{R}$, 如果 M

收稿日期: 006-04- 1; 修订日期: 007-07-30

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10371045) ; 广东省自然科学基金资助项目(5005930; 7005795)

作者简介: 耿堤(1956) , 男, 天津市人, 教授(Tel: + 86- 0-85 10116; E-mail: gengdi@ scnu. edu. cn) .

$|u| \quad |v|$, 则

$$f(x,u)u - pF(x,u) \quad [f(x,v)v - pF(x,v)]$$

注记 条件(F1)表明无穷远的增长可以是一种极限次临界的状态, 而不是通常的次临界增长形式, 即存在 $q \quad [1, p^* - 1)$, 使得 $f(x,u) \quad C(1 + |u|^q)$ 例如 $f(x,u) = |u|^{p^* -} u/\ln(\ + |u|)$ 满足我们的条件, 但却不是通常的次临界增长 我们称满足条件(F1)而不是通常的次临界憎长的非线性项为极限次临界增长 条件(F3)弱于 Ambrosetti-Rabinowitz 条件, 也弱于假设 $f(x,u)u/|u|^p$ 关于 u 是单调增加函数, 可参见文献[1]

问题(1)的弱解对应于如下 C^1 泛函的临界点:

$$I(u) = \frac{1}{p} \quad | \quad u|^p \mathrm{d}x - \quad F(x,u)\mathrm{d}x, \qquad u \quad W_0^{1,p}(\quad), \tag{4}$$

这里 $F(x,u) = \int_0^u f(x, \ )$, 而 $\quad u \quad = \left(\quad | \quad u|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p}$ 是 $W_0^{1,p}(\quad)$ 中的等价范数

p-Laplace 方程的多解问题起源于 Laplace 方程的多解问题, 其背景来源自非线性量子力学 Azorero 和 Alonso 首先将 Laplace 方程中的无穷多解的结果推广到 p-Laplace 方程中[ ], 方程中的非线性项具有特殊的次临界增长的形式 在文献[3]中, 证明了在无界区域中含有临界增长项的 p-Laplace 方程仍能保证无穷多解的存在性, 然而, 这些解对应的泛函的能量是负的 含有临界增长项的 p-Laplace 方程的大能量的多解存在性仍旧是一个尚未解决的问题, 其困难主要在于变分泛函的大能量处的 Palais-Smale 条件不能成立($p =$ 时的情形可见文献[4]), 本文针对次临界增长的极限形式, 对变分泛函 $I(u)$ 的 $(\mathrm{PS})_c$ 序列 $\{u_n\}$, 首先在颇为一般的条件下证明了有界性, 接着给出了测度序列 $\{|u_n|^{p^*}\}$ 与测度序列 $\{| \quad u_n|^p\}$ 测度弱收敛极限之间的某些进一步的关系, 进而证明了这些弱极限无奇异部分 因此得到了 $(\mathrm{PS})_c$ 序列存在强收敛的子列 最后运用渐近极小极大值原理, 构造出了变分泛函的一列大能量的临界值, 得到了能量趋于无穷大的弱解 需要指出的是, 在极限次临界增长的条件下, (3)式中的 Sobolev 紧嵌入也不能应用于构造趋于无穷大的极小极大值序列, 故不能直接应用通常的喷泉定理[1], 我们用了一些新的技巧来克服这些困难 如下定理是本文的主要结果

定理 1 设条件(F1)、(F) 和(F3)成立, 如果进一步假设 $f(x,u)$ 关于 u 是奇函数, 即

$$f(x, -u) = -f(x,u), \qquad (x,u) \qquad \mathbf{R}^1$$

则问题(1)存在无穷多个弱解 $\{u\} \quad W_0^{1,p}(\quad)$, 对应的变分泛函的临界值 $I(u_n)$ 趋于正无穷大

推广的 Palais-Smale 条件

我们所假设的条件(F1)、(F) 和(F3)在形式上较弱, 用通常的方法难以验证 $I(u)$ 满足标准的 Palais-Smale 条件, 改为证明其推广的形式

命题 1 设条件(F1)、(F) 和(F3)成立 则泛函 $I(u)$ 满足推广的 Palais-Smale 条件(简称为 $(\mathrm{PS})_c$ 条件), 即对于 $c \quad \mathbf{R}$ 以及 $W_0^{1,p}(\quad)$ 中的任意点列 $\{u_n\}$, 如果当 $n \qquad$ 时, 成立

$$I(u_n) \quad c, \ (1 + \quad u_n \quad) \quad I(u_n) \qquad 0, \tag{5}$$

则 $\{u_n\}$ 在 $W_0^{1,p}(\quad)$ 中存在收敛的子列

在给出上述命题的证明之前, 我们先对条件(F1)进行某些处理, 再证明若干预备性的结果 我们知道对于任意的 $\ > 0$, 存在 $C > 0$, 使得

$$F(x,u) = \int_0^u f(x, \ )\mathrm{d} \qquad |u|^{p^*} + C \ |u|, \qquad (x,u) \qquad \mathbf{R} \tag{6}$$

引理 1　设条件(F1)、(F2)和(F3)成立，则满足(5)式的点列 $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ 是有界的，即存在一个正数 M，使得

$$\|u_n\| \le M, \quad n = 1, 2, \cdots$$

证明　用反证法．设 $\{u_n\}$ 无界．不失一般性，可设

$$\|u_n\| \to +\infty \tag{7}$$

首先，由(5)式我们可以得到 $|\langle I'(u_n), u_n\rangle| \le \|I'(u_n)\| \|u_n\| = o(1)$，因此

$$c + o(1) = I(u_n) - \frac{1}{p}\langle I'(u_n), u_n\rangle = \int_\Omega \left[\frac{1}{p} f(x, u_n) u_n - F(x, u_n)\right] dx, \tag{8}$$

另一方面，记 $w_n = u_n / \|u_n\|$，则序列 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中有界．利用 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 的自反性和 Sobolev 紧嵌入的结果，我们可设存在 $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$，使得当 $n \to +\infty$ 时，有

$$\begin{cases} w_n \rightharpoonup w, & \text{在 } W_0^{1,p}(\Omega) \text{ 中弱收敛}, \\ w_n \to w, & \text{在 } L^r(\Omega) \text{ 中强收敛}(1 \le r < p^*), \\ w_n(x) \to w(x), & \text{在 } \Omega \text{ 中几乎处处收敛} \end{cases} \tag{9}$$

如果 $w \ne 0$，则 $|\Omega \setminus \Omega_0| > 0$，这里 $\Omega_0 = \{x \in \Omega; w(x) = 0\}$．在两端除以 $\|u_n\|^p$，可将 $\langle I'(u_n), u_n\rangle = o(1)$ 写为

$$1 - o(1) = \int_\Omega \frac{f(x, u_n) u_n}{\|u_n\|^p} dx =$$

$$\int_{\Omega_0} \frac{f(x, u_n) u_n}{\|u_n\|^p} dx + \int_{\Omega \setminus \Omega_0} \frac{f(x, u_n) u_n}{|u_n|^p} |w_n|^p dx \tag{10}$$

对于第 2 项，当 $x \in \Omega \setminus \Omega_0$ 时 $w(x) \ne 0$，故有 $|u_n(x)| \to +\infty$，于是由条件(F2)可得

$$\frac{f(x, u_n(x)) u_n(x)}{|u_n(x)|^p} |w_n(x)|^p \to +\infty, \quad \text{当 } n \to \infty \text{ 时}$$

注意到 $|\Omega \setminus \Omega_0| > 0$，则利用 Fatou 引理可得

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_0} \frac{f(x, u_n(x)) u_n(x)}{|u_n(x)|^p} |w_n(x)|^p dx \to +\infty, \quad \text{当 } n \to \infty \text{ 时} \tag{11}$$

另一方面，由条件(F2)，我们可知存在常数 $M > 0$，使得当 $(x, u) \in \Omega \times (-\infty, -M] \cup [M, \infty)$ 时，$f(x, u) u \ge 0$．因而对每个 $n = 1, 2, \cdots$，我们可对第 1 项处理如下

$$\frac{1}{\|u_n\|^p} \int_{\Omega_0} f(x, u_n) u_n dx = \frac{1}{\|u_n\|^p}\left(\int_{\Omega_0(|u_n| > M)} + \int_{\Omega_0(|u_n| \le M)}\right) f(x, u_n) u_n dx$$

$$\ge -\frac{1}{\|u_n\|^p} \int_{\Omega_0(|u_n| \le M)} |f(x, u_n) u_n| dx \ge -\frac{A_1}{\|u_n\|^p}(M + M^{p^*}) |\Omega_0|$$

注意到当 $n \to \infty$ 时，有 $\|u_n\| \to \infty$，所以第 1 项是有下界的，即存在常数 $M' \ge 0$，使得

$$\frac{1}{\|u_n\|^p} \int_{\Omega_0} f(x, u_n) u_n dx \ge -M',$$

由此蕴涵了(10)式的右端趋于无穷大，因而得到 1 个矛盾．

如果 $w = 0$，由(9)式知 $\{w_n\}$ 在 $L^1(\Omega)$ 中强收敛于 $w = 0$．利用增长性条件(6)和(7)式，不难看出 $\{\|u_n\|_{L^{p^*}(\Omega)}\}$ 是无界的，不妨设当 $n \to \infty$ 时，有 $\|u_n\|_{L^{p^*}(\Omega)} \to \infty$．记

$$m_n = M \frac{u_n}{\|u_n\|_{L^{p^*}}},$$

其中 M 是任意取定的一个正数．显然

$$m_n \quad S^{1/p}M, \qquad \text{且} \frac{m_n}{u_n} = \frac{M}{u_n \quad L^{p^*}(\ )} \quad 0 \qquad (\text{当 } n \qquad \text{时})$$

因而当 n 充分大时, 有 $m_n/ \quad u_n \qquad (0, 1)$

对 $n = 1, \ ,$ 和 $t \quad [0, \quad)$, 考虑 C^1 函数 $I(tu_n)$ 我们通过下式定义一列数 t_n:

$$I(t_n u_n) = \max_{t \quad [0,1]} I(tu_n)$$

如果对某个自然数 n, 有多个 t_n 满足上式, 取其中任何一个作为 t_n 我们断言

$$I(t_n u_n) \quad + \qquad (\text{当 } n \qquad \text{时}) \qquad (1\ )$$

事实上, 利用 t_n 的定义和增长性条件(6) 我们有

$$I(t_n u_n) \quad I\left(\frac{m_n}{u_n} u_n\right) = I(m_n w_n)$$

$$\frac{1}{p} m_n^p - \quad \left|\frac{m_n}{u_n} u_n\right|^{p^*} \mathrm{d}x - C \quad \left|\frac{m_n}{u_n} u_n\right| \mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{p} m_n^p - \quad \frac{M^{p^*}}{u_n \quad L^{p^*}(\ )} \quad | u_n |^{p^*} \mathrm{d}x - C m_n \quad | w_n | \mathrm{d}x$$

$$\frac{1}{p} m_n^p - \quad M^{p^*} - C m_n \quad w_n \quad L^1(\ )$$

如果 $\{m_n\}$ 本身当 n 时趋向于无穷大, 则对于取定的 (例如 $= 1$), 由上面的估计显然可以得到(1) 式 故不妨假设 $m_n \quad M$, 则可将上面的估计写为

$$I(t_n u_n) \quad \frac{1}{p} m_n^p - \quad M^{p^*} - C M \quad w_n \quad L^1(\ )$$

$$\frac{1}{p} SM^p - EM^{p^*} - CEMc + w_n + L^1(8) 1$$

利用 $\{w_n\}$ 在 $L^1(8)$ 中强收敛于 $w = 0$, 可以得到

$$\lim_{n y]} \inf I(t_n u_n) \ \backslash \ \frac{1}{p} SM^p - EM^{p^*} \ 1$$

而 E 是任意的, 故

$$\lim_{n y]} \inf I(t_n u_n) \ \backslash \ \frac{1}{p} SM^p \ 1$$

又 M 也是任意的, 故得到 $\lim \inf_{n y]} I(t_n u_n) = + \ ]$, 因此(1) 式得证1

显然 $t_n \ I \ [0, 1]$, 由条件(F3) 和(1) 式, 知

$$\text{H}_{Q\,8} \left[f(x, u_n) u_n - pF(x, u_n)\right] \mathrm{d}x \ \backslash$$

$$_{Q\,8} \left[f(x, t_n u_n) t_n u_n - pF(x, t_n u_n)\right] \mathrm{d}x - A_3 | \ 8 | =$$

$$pI(t_n u_n) - 3Ic(t_n u_n), t_n u_n 4 - A_3 | \ 8 | =$$

$$pI(t_n u_n) - t_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I(tu_n) |_{t = t_n} - A_3 | \ 8 | =$$

$$pI(t_n u_n) - A_3 | \ 8 | \ y + \ ] \qquad (\text{当 } n \ y \ ] \ \text{时}),$$

这与(8) 式矛盾1 因此 $\{ + u_n + \}$ 是有界的1 t

以下将所讨论的函数在 8 以外作零延拓, 并将其视为定义在整个 R^N 上1 我们先叙述一些已知的结果1 设 $\{u_n\}$ 是 $W_0^{1,p}(8)$ 中的某个点列1 如果 $\{u_n\}$ 是有界列, 根据Lions 的集中列紧原理[5], 存在子列(仍用原记号) 和某个 $u \ I \ W_0^{1,p}(8)$, 存在一个至多可数集 J =

$\{x_1, x_2, \cdots, x_j, \cdots\} \subset \Omega$ 和两列正数 $\{\nu_j\}$ 和 $\{\mu_j\}$，使得

$$u_n \rightharpoonup u, \quad |u_n|^{p^*} \rightharpoonup \mu, \quad |\nabla u_n|^p \rightharpoonup \nu,$$

这里,第一个极限是 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的弱收敛,后两个是测度弱收敛,ν 和 μ 是两个非负测度且满足

$$\mu = |u|^{p^*} + \sum_{x_j\in\mathcal{J}} \mu_j\delta_{x_j}, \quad 且 \quad \nu \geq |\nabla u|^p \mathrm{d}x + \sum_{x_j\in\mathcal{J}} \nu_j\delta_{x_j}, \tag{13}$$

且 $\nu_j \geq S\mu_j^{p/p^*}$. 其中 δ_{x_k} 是 x_k 处的 Dirac 测度. 我们可以得到以下的结论:

引理 2[6] 设条件(F1)成立且有界点列 $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ 满足 $I_c(u_n) \to 0$. 则存在一个至多有限的点集 $\mathcal{J} = \{x_1, x_2, \cdots, x_k\} \subset \Omega$ 及某个 $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, 使得对于所有充分小的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\{u_n\}$ 的子列(仍用原记号)满足

$$u_n(x) \to u(x) \qquad (在 L^{p^*}(\Omega_\varepsilon) 中强收敛), \tag{14}$$

其中 $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \cup_{j=1}^m B_\varepsilon(x_j)$.

将有限测度 ν 根据测度 $|\nabla u|^p$ 作 Lebesgue 分解:

$$\nu = |\nabla u|^p + \nu_0,$$

这里 $|\nabla u|^p \perp \nu_0$. 根据(13)式,显然有 $\nu_0 \geq \sum_{x_j\in\mathcal{J}} \nu_j\delta_{x_j}$. 然而我们还可以给出进一步的结论:

引理 3 设条件(F1)成立且有界点列 $\{u_n\} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ 满足 $I_c(u_n) \to 0$. 则

$$\nu_0 = 0, \tag{15}$$

即 $\mathcal{J} = \varnothing$.

证明 我们首先证明 $\nu_0(\Omega \setminus \mathcal{J}) = 0$, 或即

$$\Big(\nu_0 - \sum_{x_j\in\mathcal{J}} \nu_j\delta_{x_j}\Big)(\Omega) = 0. \tag{16}$$

这也只需证明,对任意的闭集 $F \subset \Omega \setminus \mathcal{J}$, 有 $\nu_0(F) = 0$. 设 $F \subset \Omega \setminus \mathcal{J}$ 是任意一个取定的闭集,则

$$\rho = \mathrm{dist}(F, \mathcal{J}) > 0.$$

于是存在有限个(例如 m 个)半径为 $\rho/4$, 球心在 $z_i \in F(i = 1, \cdots, m)$ 的开球 $B_{\rho/4}(z_i)$ 覆盖 F:

$$F \subset \bigcup_{i=1}^m B_{\rho/4}(z_i) \subset \Omega \setminus \mathcal{J}.$$

考虑

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^m \varphi_{\rho/4, z_i}(x) \in C_0^\infty(\Omega \setminus \mathcal{J}), \tag{17}$$

其中 $\varphi_{\varepsilon,y}(x) = \phi(|x-y|/\varepsilon)$, 而 $\phi(t) \in C^\infty([0,\infty), [0,1])$ 满足 $\phi([0,1/2]) \equiv 1$, $\phi([1,\infty)) \equiv 0$. 对于任意取定的 $y \in \mathbf{R}^N$, 不难计算 $\|\nabla\varphi_{\varepsilon,y}\|_{L^N(\mathbf{R}^N)}$ 是与 ε 无关的常数,因而 $\{\varphi_{\varepsilon,y}u_n\}$ 仍是 $W_0^{1,p}(\Omega)$ 中的有界序列,故

$$\langle I_c(u_n), \varphi_{\varepsilon,y}u_n\rangle = o(1), \quad \langle I_c(u_n) - I_c(u), (u_n - u)\varphi_{\varepsilon,y}\rangle = o(1). \tag{18}$$

另一方面,根据 φ 的定义有

$$0 \leq \varphi(x) \leq m, \qquad F \subset \bigcup_{i=1}^m B_{\rho/4}(z_i) \subset \mathrm{spt}\,\varphi(x) \subset \bigcup_{i=1}^m B_{\rho}(z_i) \subset \Omega_{\rho/4}. \tag{19}$$

不难看出将(18)式中 GE$_y$ 换为 G, (18)式仍然成立,而其左端可以表示为:

$$3Ic(u_n) - Ic(u),(u_n - u)G4 = Q8|\ u_n - \ u|^p G\mathrm{d}x +$$

$$Q8(u_n - u)(\ u_n - \ u)\#\ G\mathrm{d}x - Q8[f(x,u_n) - f(x,u)](u_n - u)G\mathrm{d}x\ 1$$

我们来估计上式右端的每一项1 首先根据 Brezis-Lieb 的结果,我们有

$$Q8|\ u_n - \ u|^p G\mathrm{d}x = Q8|\ u_n|^p G\mathrm{d}x - Q8|\ u|^p G\mathrm{d}x + o(1),$$

而

$$\left|Q8(u_n - u)\ (u_n - u)\#\ G\mathrm{d}x\right| [\ Q8|u_n - u|\ |\ (u_n - u)\#\ G|\mathrm{d}x\ [$$

$$\left[Q8|\ u_n|^p\mathrm{d}x + Q8|\ u|^p\mathrm{d}x\right] + \ G+_{L^N(\mathbf{R}^N)}\left(Q_{\mathrm{spt}(\ G)}|u_n - u|^{p^*}\mathrm{d}x\right)^{1/p^*}\ [$$

$$mM + \ GE_y +_{L^N(\mathbf{R}^N)}\left(Q_{\mathrm{spt}(G)}|u_n - u|^{p^*}\mathrm{d}x\right)^{1/p^*}\ [$$

$$mM + \ GE_y +_{L^N(\mathbf{R}^N)}\left(Q\ 8_{Q4}|u_n - u|^{p^*}\mathrm{d}x\right)^{1/p^*},$$

其中 M 是点列$\{u_n\}$在 $W_0^{1,p}(8)$ 中的一个界,而 y 可以是集合 J 中的任何一个元,因为容易证明 + ¨GE$_y$ +$_{L^N(\mathbf{R}^N)}$ 是与 E 和 y 无关的常数1 又

$$\left|Q8[f(x,u_n) - f(x,u)](u_n - u)G\mathrm{d}x\right| [$$

$$Q8[|f(x,u_n)|+|f(x,u)|]\ |u_n - u|\ G\mathrm{d}x\ [$$

$$Q8[\ C:+\ :(|u_n|^{p^*-1}+|\ u|^{p^*-1})]\ |u_n - u|\ G\mathrm{d}x\ [$$

$$C:Q8|u_n - u|\mathrm{d}x + :\left(+u_n+_{L^P(8)}^{p^*-1} + \ +u+_{L^p(8)}^{p^*-1}\right)\left[Q\ 8|u_n - u|^{p^*}G\mathrm{d}x\right]^{1/p^*}\ [$$

$$C:Q8|u_n - u|\mathrm{d}x + :C(M)1 \qquad (\ 0)$$

结合这些估计,我们可以得到

$$\left|Q8(|\ u_n|^p - |\ u|^p)G\mathrm{d}x\right| [$$

$$mM + \ GE_y +_{L^N(\mathbf{R}^N)}\left(Q\ 8_{Q4}|u_n - u|^{p^*}\right)^{1/p^*}\mathrm{d}x + o(1) +$$

$$C:Q8|u_n - u|\mathrm{d}x + :C(M)1$$

现在,引用上面的引理 的结果,令 $n\ y\ ]$,注意到 u_n 在$L^1(8)$ 强收敛于 u, 我们可以得到

$$Q8G\mathrm{d}L_0 = 0, \text{ 或即 } 0 [\ L_0(F) [\ L_0(\mathrm{spt}(G)) [\ Q8G\mathrm{d}L_0 = 01$$

既然 F 是任意的,我们便可得知 $L_0(8\setminus J\ ) = 0$, 因而(16)式成立1

最后证明 J = 1 这也只需再证 $L_0(J\ ) = 01$ 我们将(18)式写为

$$Q8|\ u_n|^p G\mathrm{d}x = Q8f(x,u_n)u_n G\mathrm{d}x +$$

$$Ic(u_n), u_n G4 - \int_{Q8} | \quad u_n |^{p-} (\quad u_n \# \quad G) u_n dx + o(1) [$$

$$\int_{Q8} [: | u_n |^{p^*} + C: | u_n |] G dx + M \left[\int_{Q8} | u_n \quad G | ^p dx \right]^{1/p} + o(1) 1$$

对每个 $j = 1, , , , k$, 分别取 $G = GE_{x_j}$, 代入上式, 令 $n \; y \;]$, 得到

$$Q \; 8 GE_{x_j} dL [: \int_{Q8} GE_{x_j} dM + C: \int_{Q8} | u | GE_{x_j} dx + M \left[\int_{Q8} | u \quad GE_{x_j} |^p dx \right]^{1/p} [$$

$$: \int_{Q8} GE_{x_j} dM + C^c_: \int_{Q8 H B_E(x_j)} | u | dx + Mc \left[\int_{Q8 H B_E(x_j)} | u |^p dx \right]^{1/p},$$

其中 $C^c_:$ 与 Mc 是与 E 无关的常数1　先令 E y 0, 有

$$L_j [: M_j,$$

再令 : y 0, 即可得到 $L_j = 0, (j = 1, , , , k) 1$　即 L 的奇异部分 L_0 为 0, 因而 J = 1　t

命题 1 的证明　从上面的诸引理可以看出, 如果非线性项 $f(x, u)$ 满足条件(F1)、(F)和(F3) 1 则对于 $W_0^{1,p}(8)$ 中使得 $I(u_n) \; y \; c$ 且 $+ u_n + + Ic(u_n) + y \; 0$ 的点列 $\{u_n\}$ 是有界的, 而且存在子列(仍用原记号) 和某个 $u \; I \; W_0^{1,p}(8)$, 使得在测度弱收敛的意义下

$$| u_n |^{p^*} \_ M = | u |^{p^*}, \quad | \quad u_n |^p \_ L = | \quad u |^p,$$

即测度 L、M 和 K 均无奇异部分, 因此我们得到 u_n 在 $W_0^{1,p}(8)$ 中强收敛于 $u 1$　　t

3　主要结果的证明

为构造 $I(u)$ 的临界值, 我们给出如下的临界值定理: 设 E 是具有 Schauder 基 $\{w_k\}$ 的 Banach 空间, 记

$$E_k = \mathrm{span}\{w_1, w , , , w_k\}, \quad E_k^L = \overline{\mathrm{span}}\{w_k, w_{k+1}, , \} 1$$

对于 $R_k > r_k > 0$, 定义如下的数: $(B_r(0) = \{x \; I \; E; +x+ < r\})$

$$b_k = \inf_{u I E_k^L H 5 B_{r_k}(0)} I(u); \quad a_k = \max_{u I E_k H 5 B_{R_k}(0)} I(u) 1$$

$$\#_k = \{ C \; I \; C(E_k \; H \; B_{R_k}(0), E); C \text{ 是奇映射, 且 } C|_{E_k H 5 B_{R_k}(0)} = \mathrm{id}\};$$

$$c_k = \inf_{C \# k} \max_{u I E_k H 5 B_{R_k}(0)} I(C(u)) 1$$

定理 2　设 $I(u)$ 是 E 上的 C^1 偶泛函, 如果 $b_k > a_k$, 则 $c_k \setminus b_k$ 是 $I(u)$ 的一个渐近临界值, 即存在一个点列 $\{u_n\} < E$, 使得

$$I(u) \; y \; c_k, \; (1 + + u_n +) + Ic(u_n) + y \; 0,$$

进而, 如果 $I(u)$ 满足$(PS)^c_{c_k}$ 条件, 则 c_k 是 $I(u)$ 的一个临界值, 即存在 $u_k \; I \; E$, 使得 $I(u_k) = c_k$ 且 $Ic(u_k) = 0 1$

关于这个定理的证明, 对于 $k = 1$ 的情形(即推广的山路引理), 可参见文献[7]; 至于 $k > 1$ 时的情形, 可将文献[7] 中的广义 Ekeland 变分原理应用于渐近极小极大值原理[8], 这些结果同样对偶泛函也是成立的1

对于 Sobolev 空间 $W_0^{1,p}(8)$, 我们知道(例如参见 Triebel[9]) Schauder 基是存在的, 记其一组 Schauder 基为 $\{w_k\}$, 同上我们可以在 $E = W_0^{1,p}(8)$ 中定义 E_k 和 $E_k^L 1$　显然, 当 $k = 1$ 时, $E_k^L = W_0^{1,p}(8) 1$　在 Sobolev 空间 $W_0^{1,p}(8)$ 中, Sobolev 不等式成立, 而在 E_k^L 中, 有更进一步的

结果:

引理4(Triebel[9])　对于有界且具有锥性质的区域 8, 在 $W_0^{1,p}(8)$ 中存在一组Schauder基 $\left\{w_k\right\}_{k=1}^{]}$, 使得对于 $q\ I\ [p, p^*)$, 存在正常数 $C>0$, 当 $u\ I\ E_k^L$ 时, 成立

$$Ck^{1/N+1/q-1/p}+u+_{L^q(8)}\ [\ +\ u+_{L^p(8)}1 \qquad (1)$$

利用这个引理的结果, 我们不难按照定理　所要求的条件求出 a_k 和 b_k 1

引理5　存在一个子列 $\left\{k_j\right\}_{j=1}^{]}$, 及相应的 r_{k_j} 和 b_{k_j}, 使得当 $j\ y\ ]$ 时, $r_{k_j}=j\ y\ ]$, $b_{k_j}\ y+\ ]$ 1 且有

$$I(u)\ \backslash\ \frac{1}{8p}j^p, \qquad \text{当 } u\ I\ E_{k_j}^L \text{ 且 } +u+=j\ (\text{对所有充分大的 } j)1$$

证明　在 8 上积分(6) 式, 当 $u\ I\ E_k^L$ 时, 利用引理4中的结果(令 $q=p$), 不难估计 $I(u)$ 如下:

$$I(u)\ \backslash\ \frac{1}{p}+u+^p-(E+u+^{p^*}_{L^{p^*}(8)}+CE+u+_{L^p(8)})\ \backslash$$

$$\left(\frac{1}{p}-E+u+^{p^*-p}-\frac{AE}{k^{1/N}}\right)+u+^p1$$

对于每一个 $j=1,\ ,\ ,\ ,$ 当 $+u+=j$ 时, 取 $E_j=j^{p-p^*}/(p)1$ 因此由(6) 式有一个确定的 $AE_j>0$(不失一般性, 可设 $AE_j>AE_{j-1}$), 由此我们可取 $k=k_j$ 足够大使得

$$AE_jk_j^{-1/N}\ [\ \frac{1}{4p},$$

不失一般性, 我们也可设 $k_j>k_{j-1}$, 因此

$$I(u)\ \backslash\ \frac{1}{8p}+u+^p, \qquad \text{当 } u\ I\ E_{k_j}^L \text{ 且 } +u+=j1$$

由此我们得到子列 k_j 及 $r_{k_j}=j$, 也不难得到 $b_{k_j}\ \backslash\ j1$ 引理的结果得证1　t

利用通常的Borsuk 定理, 可得

$$c_{k_j}\ \backslash\ b_{k_j}, \qquad \text{对所有充分大的 } j1 \qquad (\ \ )$$

至于 a_k 的取法, 可按照如下的方式进行1　在有限维空间 E_k 中, 范数 $+u+_{L^p(8)}$ 与 $+u+$ 等价, 故存在 $M_k>0$, 使得当 $u\ I\ E_k$ 时, 成立

$$\frac{1}{p}+u+^p\ [\ M_k+u+^p_{L^p(8)}1$$

由条件(F　), 我们知道存在 $D_k>0$, 使得当 $|u|\ \backslash\ D_k$ 时, 有 $F(x,u)\ \backslash\ M_k|u|^p$, 因此

$$F(x,u)\ \backslash\ M_k|u|^p-C_k,$$

其中 $C_k=\max\left\{0, \inf_{(x,u)I\ 8@[-D_k,D_k]}F(x,u)\right\}1$　由此可以得到

$$I(u)\ [-M_k+u+^p_{L^p(8)}+C_k|8|\ [-\frac{1}{p}+u+^p+C_k|8|1$$

只要取 $R_k\ \backslash\ (pC_k|8|)^{1/p}$, 我们便有 $a_k=\max_{u\ I\ E_kH5B_{R_k}(0)}I(u)\ [\ 01$

主要定理的证明　由引理5, 对于每一个 $j=1,\ ,\ ,\ ,$ 取 $r_{k_j}=j$, 则 $b_{k_j}\ \backslash\ j^p/(4p)1$ 取 $R_{k_j}\ \backslash\ \max\left\{r_{k_j}+1, (pC_k|8|)^{1/p}\right\}$, 则 $R_{k_j}>r_{k_j}>0$ 且 $a_{k_j}\ [\ 01$ 又(　) 式表明 $c_{k_j}\ \backslash\ b_{k_j}$ 是 $I(u)$ 的一个渐近临界值, 而 $I(u)$ 满足推广的Palais-Smale条件即蕴涵 c_{k_j} 是 $I(u)$ 的临界值, 因此问题(1) 有一个弱解 $u_{k_j}\ I\ W_0^{1,p}(8)$, 对应 $I(u_{k_j})=c_{k_j}1$　显然当 $j\ y\ ]$ 时, $c_{k_j}\ y+\ ]$, 因此 $I(u_{k_j})\ y+\ ]1$　t

[参 考 文 献]

[1] 刘轼波,李树杰.一类超线性椭圆方程的无穷多解[J].数学学报, 003, **46**(4):6 5-630.

[ ] Garcia Azorero J P, Peral Alonso I. Multiplicity of solutions for elliptic problems with critical exponent or with a nonsymmetric term[J]. Trans Amer Math Soc, 1991, **323**( ):877-895.

[3] 冉启康,方爱农. $\mathbf{R}^N$上临界增长的椭圆方程无穷多解的存在性[J].数学学报, 00 , **45**(4):773-78 .

[4] Struwe M. Variational Methods[M]. Beijing: Spriger-Verlag, 1996.

[5] Lion P L. The concentration-compactness principle in the calculus of Variation, the limit case[J]. part 1, . Rev Mat Iberoamericana, 1985, **1**(1):145- 01; **1**( ):45-1 1.

[6] 耿堤,杨舟.临界增长拟线性椭圆型方程中 p-Laplace 算子的弱连续性[J].华南师范大学学报, 003,(3):10-13.

[7] Costa D G, Miyagaki O H. Nontrivial solutions for perturbations of the p-Laplacian on unbounded domains[J]. J Math Anal Appl, 1995, **193**( ):737-755.

[8] Br zis H, Nirenberg L. Remarks on finding critical points[J]. Comm Pure Appl Math, 1991, **49**(5):939-963.

[9] Triebel H. Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators[M]. Amsterdam: North-Holland Pub Co, 1978.

[10] Suzuki T. Generalized distance and existence theorems in complete metric spaces[J]. J Math Anal Applic, 001, **253**( ):440-458.

Infinitely Many Solutions of p-Laplacian Equations With Limit Sub-Critical Growth

GENG Di

(School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou 510631, P.R. China)

Abstract: A class of p-Laplacian boundary problem on a bounded smooth domain was discussed. The nonlinearity is odd symmetric and limit sub-critical growth at infinite. A sequence of critical values of the variational functional was constructed after the generalized Palais-Smale condition was verified. It is obtained that the problem possesses infinitely many solutions and corresponding energy levels of the functional pass to positive infinite. The result is a generalization of the similar problem in case of sub-critical.

Key words: p-Laplacian operator; limit sub-critical growth; concentration-compactness principle; Palais-Smale condition; asymptotic minimax principle