应用数学和力学,第 28 卷 第 10 期
2007 年 10 月 15 日出版

Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 28, No. 10, Oct. 15, 2007

文章编号: 1000-0887(2007) 10-1253-08

互补约束均衡问题一个新的磨光技术*

朱志斌[1], 罗志军[1], 曾吉文[2]

(1. 桂林电子科技大学 计算科学与数学系,广西 桂林 541004;
2. 厦门大学 数学科学学院, 福建 厦门 361005)

(张石生推荐)

摘要: 研究了一类带非线性互补约束的均衡问题. 借助于逐步逼近思想, 构造了一个在求解意义上与原问题等价的磨光非线性规划. 从而保证一些经典的标准优化算法可以应用到该类优化问题上. 最后提出了两个算法模型并分析了其全局收敛性.

关 键 词: 均衡问题; 非线性互补约束; 原始-对偶稳定点; 磨光方程组; 全局收敛

中图分类号: O211 文献标识码: A

引 言

本文考虑如下带非线性互补约束的均衡问题(MPEC)

$$\begin{cases}\min f(x, y),\\ \text{s.t.}\quad 0 \leqslant \boldsymbol{F}(x, y) \perp y \geqslant 0,\end{cases}\tag{1}$$

其中 $f: R^{n+m} \to R$, $\boldsymbol{F}: R^{n+m} \to R^m$ 连续可微, $x \in R^n$ 为上层(设计)变量, $y \in R^m$ 为下层(状态)变量. 该类问题大量出现在经济, 工程设计等各领域中. 有关该类问题的研究及应用, 见文献[1]和文献[2].

众所周知, 由于互补约束条件的存在, 该类问题的求解是一个十分有意义而又比较困难的课题. 因为文献[3]: 指出: 对于该类优化问题, 即使较弱的 MFCQ 条件, 在任意可行点处都不满足, 从而非线性规划一些经典的算法一般不能直接应用到均衡问题上来.

近来, 有学者对均衡问题的求解提出了几类数值方法, 但存在许多尚未解决的问题, 如光滑性, 收敛性及收敛速度等. 文献[4]和文献[5]利用带扰动参数 $\mu(\mu > 0)$ 的互补函数, 通过求解一系列光滑扰动问题来成功地逼近原 MPEC 问题的解. 但由于参数 μ 的存在, 一方面, 即使在理论上, 该类光滑化方法也不能有限步内终止求得原 MPEC 问题的精确解, 只能随着 $\lim_{\mu\to 0}\mu = 0$, 求其近似解. 另一方面, 将一些快速收敛的标准优化算法应用到 MPEC 问题上会影响其超线性收敛速度, 具体见文献[6].

本文对文献[4]和文献[5]的光滑化方法进一步研究, 提出了求解问题(1)的一个新的磨光

* 收稿日期: 2006-07-05; 修订日期: 2007-07-25
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10501009; 60471039); 广西自然科学基金资助项目(0728206); 中国博士后基金资助项目(20070410227)
作者简介: 朱志斌(1974—), 男, 湖南双峰人, 副教授, 博士(联系人. +86-773-5608612; E-mail: zhuzb@guet.edu.cn).

技术.

利用无扰动参数的互补函数 $\phi(a,b)=a+b-\sqrt{a^2+b^2}$ 与逐次逼近思想[7-8], 构造了一个在求解意义上与原 MPEC 问题等价的光滑非线性规划, 给出了 2 个求解该类均衡问题的磨光方法. 克服了上述缺点, 理论上保证了当算法有限步终止时, 当前迭代点即为 MPEC 问题 (1) 的一个精确解. 为进一步研究 MPEC 问题的快速数值算法提供了一种新的光滑化方法.

1 MPEC 问题的最优性条件

记问题(1) 的可行集为

$$\mathscr{F}=\left\{z=(x,y): \boldsymbol{F}(x,y)^{\mathrm{T}}y=0, \boldsymbol{F}(x,y)\geqslant 0, y\geqslant 0\right\},$$

而在 $z^*=(x^*,y^*)$ 处 $\mathscr{F}$ 的切锥为

$$\mathscr{T}(z^*,\mathscr{F})=\left\{d=\lim_{k\to\infty}\frac{z^k-z^*}{\tau_k}:\left\{z^k\right\}\subset\mathscr{F}, z^k\to z^*, \tau_k\downarrow 0\right\},$$

$\forall z=(x,y)$, 将指标集 $L=\left\{1,2,\cdots,m\right\}$ 分解成如下 3 个不相交的子集:

$$\alpha(z)=\left\{1\leqslant i\leqslant m: F_i(z)<y_i\right\},$$
$$\beta(z)=\left\{1\leqslant i\leqslant m: F_i(z)=y_i\right\},$$
$$\gamma(z)=\left\{1\leqslant i\leqslant m: F_i(z)>y_i\right\},$$

且在 z 处记 $\mathscr{A}(z)$ 为如下集合

$$\mathscr{A}(z)=\left\{(\mathscr{J},\mathscr{K}): \mathscr{J}\supseteq\alpha(z), \mathscr{K}\supseteq\gamma(z), \mathscr{J}\cup\mathscr{K}=\left\{1,2,\cdots,m\right\}\ \mathscr{J}\cap\mathscr{K}=\varnothing\right\}$$

相应地, 如 $z^*=(x^*,y^*)\in\mathscr{F}$, 则

$$\alpha(z^*)=\left\{1\leqslant i\leqslant m: F_i(z^*)<y_i^*\right\},$$
$$\beta(z^*)=\left\{1\leqslant i\leqslant m: F_i(z^*)=y_i^*\right\},$$
$$\gamma(z^*)=\left\{1\leqslant i\leqslant m: F_i(z^*)>y_i^*\right\},$$

$\forall(\mathscr{J},\mathscr{K})\in\mathscr{A}(z^*)$, 令

$$\mathscr{F}_{(\mathscr{J},\mathscr{K})}=\left\{z: F_i(z)=0\leqslant y_i, \forall i\in\mathscr{J}, F_i(z)\geqslant 0=y_i, \forall i\in\mathscr{K}\right\}.$$

下面, 列出关于问题(1) 最优性条件的几个重要定义及结论, 具体见文献[9].

命题 1.1 点 $z^*\in\boldsymbol{F}$ 是问题(1) 的一个局部极小点, 当且仅当 $\forall(J,K)\in A(z^*)$, z^* 是如下非线性规划

$$\begin{cases}\min f(z),\\ \text{s.t.}\quad z\in\mathscr{F}_{(\mathscr{J},\mathscr{K})}\end{cases}\tag{2}$$

的一个局部极小点.

定义 1.1(S-稳定点) 称可行点 $z^*=(x^*,y^*)\in\mathscr{F}$ 为问题(1) 的一个 S-稳定点(Strongly stationary point), 如果 $\forall(\mathscr{J},\mathscr{K})\in\mathscr{A}(z^*)$, 存在 K-T 乘子 $\eta^*\in R^m$, $\pi\in R^m$, 使得

$$\begin{cases}\nabla f(x^*,y^*)-\nabla\boldsymbol{F}(x^*,y^*)\eta^*-\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}_{n\times m}\\ \boldsymbol{I}_{m\times m}\end{pmatrix}\pi^*=0,\\ F_j(x^*,y^*)=0,\ 0\leqslant y_j^*\perp\pi_j^*\geqslant 0,\quad \forall j\in J,\\ 0\leqslant F_j(x^*,y^*)\perp\eta_j^*\geqslant 0,\ y_j^*=0,\quad \forall j\in K.\end{cases}\tag{3}$$

定义 1.2(下层非退化条件) 称问题(1) 在点 $(x,y)\in R^{n+m}$ 处满足下层非退化条件

如果 $\quad y_j\neq F_j(x,y),\quad \forall j=1,2,\cdots,m.$

2 等价的光滑优化问题

无扰动参数的 Fischer-Burmeister 互补函数

$$\phi(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{4}$$

具有如下性质:

$$\phi(a, b) = 0 \Leftrightarrow a \perp b \geqslant 0,$$

另外, $\phi(\cdot, \cdot)$ 除了$(a, b) = (0, 0)$ 外, 处处可微, 且当$(a, b) \neq (0, 0)$ 时

$$\therefore \phi(a, b) = \begin{pmatrix} \partial_a \phi(a, b) \\ \partial_b \phi(a, b) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ 1 - \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{pmatrix}. \tag{5}$$

借助于上述互补函数 $\phi(a, b)$, 问题(1) 可等价转化为如下优化问题:

$$\begin{cases} \min f(x, y), \\ \text{s.t.} \quad \boldsymbol{F}(x, y) = w, \quad \Phi(y, w) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

其中 $\Phi: R^{2m} \to R^m$ 定义为

$$\Phi(y, w) = \begin{pmatrix} \phi(y_1, w_1) \\ \vdots \\ \phi(y_m, w_m) \end{pmatrix},$$

显然, 问题(6) 非光滑. 为此, 利用文献[7] 和文献[8] 中的思想, 具体作如下逐步逼近, 对 $\varepsilon > 0$, 令

$$\Phi(y, w) = \Phi_\varepsilon(y, w) + \Phi_\varepsilon(y, w), \tag{7}$$

其中

$$\Phi_\varepsilon(y, w) = \begin{pmatrix} \phi_\varepsilon(y_1, w_1) \\ \vdots \\ \phi_\varepsilon(y_m, w_m) \end{pmatrix}, \quad \Phi_\varepsilon(y, w) = \begin{pmatrix} \phi_\varepsilon(y_1, w_1) \\ \vdots \\ \phi_\varepsilon(y_m, w_m) \end{pmatrix},$$

且对于指标集 $E(z, \varepsilon) \overset{\Delta}{=} \left\{ j \in L \mid \sqrt{y_j^2 + w_j^2} < \varepsilon \right\}$, 定义

$$\phi_\varepsilon(y_j, w_j) = \begin{cases} \phi(y_j, w_j), & j \in L \setminus E(z, \varepsilon), \\ \dfrac{2\varepsilon - y_j}{2\varepsilon} y_j + \dfrac{2\varepsilon - w_j}{2\varepsilon} w_j, & j \in E(z, \varepsilon), \end{cases} \tag{8}$$

$$\phi_\varepsilon(y, w) = \begin{cases} 0, & j \in L \setminus E(z, \varepsilon), \\ \dfrac{\left(\sqrt{w_j^2 + y_j^2} - \varepsilon\right)^2}{2\varepsilon}, & j \in E(z, \varepsilon), \end{cases} \tag{9}$$

显然, 函数 $\Phi_\varepsilon(y, w)$ 处处连续可微, 且

$$\therefore_a \phi_\varepsilon(y_j, w_j) = \begin{cases} \therefore_a \phi(y_j, w_j) = 1 - \dfrac{y_j}{\sqrt{y_j^2 + w_j^2}}, & j \in L \setminus E(z, \varepsilon), \\ 1 - \dfrac{y_j}{\varepsilon}, & j \in E(z, \varepsilon), \end{cases} \tag{10}$$

$$\therefore_b \phi_\varepsilon(y_j, w_j) = \begin{cases} \therefore_b \phi(y_j, w_j) = 1 - \dfrac{w_j}{\sqrt{y_j^2 + w_j^2}}, & j \in L \setminus E(z, \varepsilon), \\ 1 - \dfrac{w_j}{\varepsilon}, & j \in E(z, \varepsilon), \end{cases} \tag{11}$$

经简单推导可得 $\nabla\Phi_\varepsilon(y,w)$ 的一个基本性质.

引理 2.1 $\forall(y,w)\in R^{2m}$, 成立

$$\nabla_a\phi_\varepsilon^2(y_j,w_j)+\nabla_b\phi_\varepsilon^2(y_j,w_j)\geqslant 3-2\sqrt{2}>0,\qquad j=1,2,\dots,m. \tag{12}$$

借助于函数 $\Phi_\varepsilon(y,w)$, 考虑如下光滑非线性规划:

$$P(\varepsilon)\quad\begin{cases}\min f(x,y),\\ \text{s.t.}\quad \boldsymbol{F}(x,y)-w=0,\quad \Phi_\varepsilon(y,w)=0.\end{cases} \tag{13}$$

如果点 $z^*=(x^*,y^*,w^*)$ 是问题(13)的 K-T 点, 则存在 K-T 乘子 $(\lambda_F,\lambda_\Phi)\in R^{2m}$, 使得

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\nabla f(x^*,y^*)\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\nabla\boldsymbol{F}(x^*,y^*)\\ -I\end{pmatrix}\lambda_F+\begin{pmatrix}0\\ \nabla\Phi_\varepsilon(y^*,w^*)\end{pmatrix}\lambda_\Phi=0,\\ \boldsymbol{F}(x^*,y^*)-w^*=0,\quad \Phi_\varepsilon(y^*,w^*)=0.\end{cases} \tag{14}$$

下面的结论表明: 问题(1)和问题(13)的求解在某种意义下是等价的.

定理 2.1 假设点 $(x^*,y^*)\in\mathscr{F}$ 满足 $\Phi(y^*,w^*)=\Phi_\varepsilon(y^*,w^*)$, 则以下两论断等价:

1) (x^*,y^*) 是问题(1)的一个全局(局部)最优点;

2) (x^*,y^*,w^*) 是问题(13)的一个全局(局部)最优点, 其中 $w^*=\boldsymbol{F}(x^*,y^*)$.

定理 2.2 假设点 $(x^*,y^*)\in\mathscr{F}$ 满足下层非退化条件, 且 $\Phi(y^*,w^*)=\Phi_\varepsilon(y^*,w^*)$, 则以下两论断等价:

1) (x^*,y^*) 是问题(1)的一个 S-稳定点;

2) (x^*,y^*,w^*) 是问题(13)的一个 K-T 点, 其中 $w^*=\boldsymbol{F}(x^*,y^*)$.

证明 (1)$\Rightarrow$(2). 显然 $\beta(z^*)=\varnothing$, 故有

$$\mathscr{A}(z^*)=\{(\alpha(z^*),\gamma(z^*))\}.$$

由式(3), 知存在乘子向量 $(\eta^*,\pi^*)\in R^{2m}$, 使得

$$\begin{cases}\nabla f(x^*,y^*)-\nabla\boldsymbol{F}(x^*,y^*)\eta^*-\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}_{n\times m}\\ \boldsymbol{I}_{n\times m}\end{pmatrix}\pi^*=0,\\ w_j^*=F_j(x^*,y^*)=0,\ y_j^*>0,\ \pi_j^*=0,\qquad j\in\alpha(z^*),\\ w_j^*=F_j(x^*,y^*)>0,\ y_j^*=0,\ \eta_j^*=0,\qquad j\in\gamma(z^*).\end{cases} \tag{15}$$

令 $\lambda_F=-\eta^*$, 且定义 λ_Φ 如下:

当 $j\in\alpha(z^*)$ 时, 由于 $\Phi(y^*,w^*)=\Phi_\varepsilon(y^*,w^*)$, 故

$$\nabla_a\phi_\varepsilon(y_j^*,w_j^*)=0,\quad \nabla_b\phi_\varepsilon(y_j^*,w_j^*)=1.$$

此时, 定义

$$(\lambda_\Phi)_j=-(\eta^*)_j,\qquad j\in\alpha(z^*).$$

当 $j\in\gamma(z^*)$ 时, 易知

$$\nabla_a\phi_\varepsilon(y_j^*,w_j^*)=1,\quad \nabla_b\phi_\varepsilon(y_j^*,w_j^*)=0.$$

此时, 定义

$$(\lambda_\Phi)_j=-(\pi^*)_j,\qquad j\in\gamma(z^*).$$

故, 由(15)式, 有

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\nabla f(x^*,y^*)\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\nabla\boldsymbol{F}(x^*,y^*)\\ -I\end{pmatrix}\lambda_F+\begin{pmatrix}0\\ \nabla\Phi_\varepsilon(y^*,w^*)\end{pmatrix}\lambda_\Phi=0,\\ w^*-\boldsymbol{F}(x^*,y^*)=0,\quad \Phi_\varepsilon(y^*,w^*)=0.\end{cases} \tag{16}$$

这表明 (x^*, y^*, w^*) 是问题(13) 的一个 K-T 点, 其中 $w^* = \boldsymbol{F}(x^*, y^*)$.

(2) ⇒(1). 设(16)式成立, $(x^*, y^*) \in \boldsymbol{F}$. 由于

$$\Phi(y^*, w^*) = \Phi_\varepsilon(y^*, w^*),\ \beta(z^*) = ƒ,$$

故

$$\nabla_a \phi_\varepsilon(y_j^*, w_j^*) = 0,\ \nabla_b \phi_\varepsilon(y_j^*, w_j^*) = 1, \qquad j \in \alpha(z^*),$$

$$\nabla_a \phi_\varepsilon(y_j^*, w_j^*) = 1,\ \nabla_b \phi_\varepsilon(y_j^*, w_j^*) = 0, \qquad j \in \gamma(z^*).$$

由式(16), 知 $\lambda_F = \nabla_b \Phi_\varepsilon(y_j, w_j)\lambda_\Phi$.

令 $\quad \eta^* = -\lambda_F = -\nabla_b \Phi_\varepsilon(y^*, w^*)\lambda_\Phi,\ \pi^* = -\nabla_a \Phi_\varepsilon(y^*, w^*)\lambda_\Phi,$

则

$$\begin{pmatrix} \nabla f(x^*, y^*) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \nabla \boldsymbol{F}(x^*, y^*) \\ -I \end{pmatrix}\eta^* + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \nabla_b \Phi_\varepsilon(y^*, w^*) \end{pmatrix}\lambda_\Phi +$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ \nabla_a \Phi_\varepsilon(y^*, w^*) \\ 0 \end{pmatrix}\lambda_\Phi = 0,$$

故, 由 $\Phi(y^*, w^*) = \Phi_\varepsilon(y^*, w^*)$, 即 $\sqrt{(y_j^*)^2 + (w_j^*)^2} \geqslant \varepsilon,\ \forall j$, 有

$$\nabla f(x^*, y^*) - \nabla \boldsymbol{F}(x^*, y^*)\eta^* - \begin{pmatrix} \boldsymbol{0}_{n\times m} \\ \boldsymbol{I}_{n\times m} \end{pmatrix}\pi^* = 0,$$

$$w_j^* = F_j(x^*, y^*) = 0,\ y_j^* > 0,\ \nabla_a \phi_\varepsilon(y_j^*, w_j^*) = 0,\ \pi_j^* = 0, j \in \alpha(z^*),$$

$$w_j^* = F_j(x^*, y^*) > 0,\ y_j^* = 0,\ \nabla_b \phi_\varepsilon(y_j^*, w_j^*) = 0,\ \eta_j^* = 0, j \in \gamma(z^*).$$

这表明 (x^*, y^*) 是问题(1) 的一个 S-稳定点.

记映射 $\boldsymbol{H}_\varepsilon: R^{n+2m} \to R^{2m}$

$$\boldsymbol{H}_\varepsilon = \begin{pmatrix} \boldsymbol{F}(x, y) - w \\ \Phi_\varepsilon(y, w) \end{pmatrix}.$$

由引理 2.1, 类似于文献[4] 和文献[5] 的分析, 有如下结论:

引理 2.2　对 $\varepsilon > 0$, 如 $\nabla_y \boldsymbol{F}(y, w)$ 是 P- 矩阵, 则 $\boldsymbol{H}_\varepsilon$ 关于 (x, y, z) 的 Jacobi 矩阵可逆, 从而问题(13) 的可行域 $\mathscr{F}_\varepsilon$ 非空.

引理 2.3　设 (ε, x, y, w) 满足 $\boldsymbol{H}_\varepsilon(\varepsilon, x, y, w) = 0$, 则存在 (ε, x) 的一个邻域 U 与一个连续函数 $(y, w): U \to R^{2m}$, 使

$$\boldsymbol{H}_\varepsilon(x, y(\varepsilon, x), w(\varepsilon, x)) = 0, \qquad \forall (\varepsilon, x) \in U.$$

引理 2.4　给定 x, 则对 $\forall \varepsilon$, 扰动问题 P_ε 的可行集 F_ε 中均存在唯一点 z_ε, 使得其对应于 x 的分量恰为 x, 即可记为 $z_\varepsilon = (x, y_\varepsilon(x), w_\varepsilon(x))$, 且 z_ε 作为 ε 的函数是连续的.

3　算法模型及其收敛性分析

本节将设计两个求解原 MPEC 问题(1) 的最优点的算法模型并分析其收敛性. 首先从理论意义上出发, 设计一个求解问题(1) 的全局最优点的算法 G(全局解).

算法 G

步骤 0　给定参数 $\varepsilon_1 > 0$, 初始点 $z^0 = (x^0, y^0, w^0) \in R^{n+2m}$. $k = 1$.

步骤 1 求问题 (P_{ε_k}) 的一个全局最优点 z^k.

步骤 2 如 $\|\Phi_{\varepsilon_k}(y^k, w^k)\| = 0$, 停. 否则, 求

$$r_k = \min\left\{\sqrt{(y_j^k)^2 + (w_j^k)^2} \mid j = 1, 2, \cdots, m\right\}, \quad \varepsilon_{k+1} = \begin{cases} \varepsilon_k/2, & \text{如果 } r_k < \varepsilon_k; \\ \varepsilon_k, & \text{否则}. \end{cases}$$

步骤 3 令 $k = k+1$, 返回步骤 1.

对于上述算法 G, 有以下收敛性结论.

定理 3.1 算法 G 或有限步终止于 $z^k = (x^k, y^k, w^k)$, 使对应的 (x^k, y^k) 是问题 (1) 的全局最优点, 或产生无穷点列 $\{z^k\}$, 使其任一聚点 $z^* = (x^*, y^*, w^*)$ 对应的 (x^*, y^*) 皆为问题 (1) 的全局最优点.

证明 定理的前半部分由定理 2.1 及算法的结构易得. 下设算法产生一无穷点列 $\{z^k\} \subseteq F_{\varepsilon_k}$. 不妨设存在一无穷子集 K, 使

$$z^k \to z^*, \quad k \in K.$$

易知 $(x^*, y^*) \in \mathscr{F}$. 反设 (x^*, y^*) 不是问题 (1) 的全局最优点, 则存在点 $z = (x, y, w)$, 其中 $(x, y) \in \mathscr{F}$, 使

$$f(x, y) < f(x^*, y^*). \tag{17}$$

由引理 2.4 知, 对于 ε_k 及给定的 x, 存在唯一的点

$$z_{\varepsilon_k} = (x, y_{\varepsilon_k}(x), w_{\varepsilon_k}(x)) \in \mathscr{F}_{\varepsilon_k},$$

且

$$z_{\varepsilon_k} \to z_{\varepsilon_*} = z = (x, y, w).$$

从而由连续性及式 (17) 知当 $k \in K$, k 充分大时, 有

$$f(x, y_{\varepsilon_k}(x)) < f(x^k, y^k),$$

这与 z^k 是问题 (P_{ε_k}) 的全局最优点矛盾.

另外, 用标准的优化方法求解问题 (P_{ε_k}) 时, 多数情况都是考虑求其 K-T 点或稳定点. 为此, 我们构造如下更为实用的求解问题 (1) 的稳定点的算法 S.

类似于文献[5], 首先将问题 (P_{ε_k}) 的 K-T 条件重记如下:

$$\begin{pmatrix} \nabla f(x, y) \\ 0 \end{pmatrix} + \nabla(\boldsymbol{F}(x, y) - w)\lambda_F + \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla \Phi_\varepsilon(y, w) \end{pmatrix} \lambda_\Phi = 0, \quad d(z \mid \mathscr{F}_\varepsilon) = 0,$$

算法 S

步骤 0 给定参数 ε_1, 容许误差 $\delta > 0$, 非负数列 $\{\tau_k\}$, 初始点 $z^0 = (x^0, y^0, w^0) \in R^{n+2m}$, 令 $k = 1$.

步骤 1 求一点 $z^k = (x^k, y^k, w^k)$ 及相应乘子向量 $(\lambda_F^k, \lambda_\Phi^k) \in R^{2m}$, 满足

(a) $$\left\| \begin{pmatrix} \nabla f(x^k, y^k) \\ 0 \end{pmatrix} + \nabla(\boldsymbol{F}(x^k, y^k) - w^k)\lambda_F^k + \begin{pmatrix} 0 \\ \nabla \Phi_{\varepsilon_k}(y^k, w^k) \end{pmatrix} \lambda_\Phi^k \right\| \leqslant \tau_k;$$

(b) $d(z^k \mid \mathscr{F}_{\varepsilon_k}) \leqslant \tau_k$.

步骤 2 如 $\max\{\tau_k, d((x^k, y^k) \mid \mathscr{F})\} \leqslant \delta$, 停.

步骤 3 计算

$$r_k = \min\left\{\sqrt{(y_j^k)^2 + (w_j^k)^2} \mid j = 1, 2, \cdots, m\right\}, \quad \varepsilon_{k+1} = \begin{cases} \varepsilon_k/2, & \text{如果 } r_k < \varepsilon_k; \\ \varepsilon_k, & \text{否则}. \end{cases}$$

步骤 4　置 $k = k+1$, 返回步骤 1.

注　在步骤 2 中, δ 是给定的足够小的容许误差, $d(z \mid \Omega)$ 表示点 z 到集合 Ω 的距离函数.

$d((x^k, y^k) \mid \mathscr{F}) < \delta$ 是要求 (x^k, y^k) 对问题(1) 的 δ- 近似可行性. 称步骤 2 中表示的条件为问题(13) 的 δ- 近似 K-T 条件. 如果 $z^* = (x^*, y^*, w^*)$ 是问题(1) 的一个 δ- 近似 K-T 点, 且 (x^*, y^*) 满足问题(1) 的 δ- 近似可行性, 则称 (x^*, y^*) 是问题(1) 的一个 δ- 近似 S- 稳定点.

为分析算法 S 的全局收敛性, 作如下假设条件:

H 3.1　算法 S 产生的点列 $\{z^k, \lambda_F^k, \lambda_\Phi^k\}$ 有界. 点列 $\{z^k\}$ 的聚点 z^* 满足下层非退化条件.

由算法 S 中 ε_k 的定义及假设 H3.1, 易知有如下结论成立.

引理 3.1　如假设 H3.1 成立, 则存在一正整数 k_1, 使得

$$\varepsilon_k \equiv \varepsilon_{k_1} = \varepsilon, \qquad \forall k \geqslant k_1.$$

参考定理 2.2 与定理 3.1, 可证如下结论成立.

定理 3.1　设非负数列 $\{\tau_k\} \to 0$, 则

1) 如 $\delta > 0$, 则算法 S 有限步后在点 $z^k = (x^k, y^k, w^k)$ 处终止, 其中 (x^k, y^k) 为问题(1) 的一个 δ- 近似 S- 稳定点;

2) 如 $\delta = 0$, 则算法 S 或有限步终止于点 z^k, 其中 (x^k, y^k) 为问题(1) 的 S- 稳定点, 或产生无穷点列 $\{z^k\}$, 其任何聚点 z^* 对应的 (x^k, y^k) 都为问题(1) 的 S- 稳定点.

致谢　衷心感谢审阅者对本文提出的宝贵建议.

[参　考　文　献]

[1] Outrata J, Zowe J. A numerical approach to optimization problems with variational inequality constraints[J]. Mathematical Programming, 1995, **68**(1): 105-130.

[2] Luo Z Q, Pang J S, Ralph D, et al. Exact penalization and stationarity conditions of mathematical programs with equilibrium constraints[J]. Mathematical Programming, 1996, **75**(1): 19-76.

[3] Outrata J, Kocvare M, Zowe J. Nonsmooth Approach to Optimization Problems With Equilibrium Consraints[M]. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1998.

[4] Facchinei F, Jiang H Y, Qi L. A smoothing method for mathematical programs with equilibjum constraints[J]. Mathematical Programming, 1999, **85**(1): 107-134.

[5] 李飞, 徐成贤. 求解带均衡约束数学规划问题的一个连续化方法[J]. 计算数学, 2004, **26**(1): 3-12.

[6] Fukushima M, Luo Z Q, Pang J S. A globally convergent sequential quadratic programming algorithm for mathematical programs with linear complementarity constraints[J]. Computational Optimization and Applications, 1998, **10**(1): 5-34.

[7] Qi L, Chen X J. A globally convergent successive approximation methods for non-smooth equation [J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1995, **33**(3): 402-418.

[8] Ma C F, Liang G P. A new successive approximation damped Newton method for nonlinear complementarity problems[J]. Journal of Mathematical Research and Exposition, 2003, **23**(1): 1-6.

[9] Luo Z Q, Pang J S, Ralph D. Mathematical Programs With Equilibrium Constraints[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

A New Smoothing Technique for Mathematical Programs With Equilibrium Constraints

ZHU Zhi-bin[1], LUO Zhi-jun[1], ZENG Ji-wen[2]

(1. Department of Computational Science and Mathematics, Guilin University of Electronic Technology, Guilin 541004, P. R. China;

2. Shool of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, P. R. China)

Abstract: A kind of mathematical programs with equilibrium constraints (MPEC) is studied. By using the idea of successive approximation, a smoothing nonlinear programming, which is equivalent to the MPEC problem, was proposed. Thereby, it is ensured that some classical optimization methods can be applied for the MPEC problem. In the end, two algorithm models were proposed with the detailed analysis of the global convergence.

Key words: mathematical program with equilibrium constraint; nonlinear complementarity constraint; primal-dual stationary point; smoothing system of equation; global convergence