

# 随机激励下结构的非线性分析

高世桥<sup>1</sup>, 金磊<sup>1</sup>, M 卡斯巴斯基<sup>2</sup>, 刘海鹏<sup>1</sup>, 李明辉<sup>1</sup>

(1. 北京理工大学 宇航科学技术学院, 100081 北京;

2. 波鸿鲁尔大学 土木工程系, 德国)

(宋顺成推荐)

摘要: 针对随机时间序列载荷激励下的非线性系统, 提出一种基于  $Z$  变换的递归方法 对于所获得的响应时间序列的识别, 建议了一种离散小波变换(DWT)的技术

关键词: 非线性; 随机; 递归; 小波变换

中图分类号: O322 文献标识码: A

## 引言

传统 Fourier 分析不能够解决结构非线性和非平稳随机振动的问题, 因为它至少存在两个方面的局限性 第一个局限出现在系统非线性时 对于一个非线性系统, 基于叠加原理的传统谱方法不再有效 两个激励的加权和所得到的响应不能等于两个响应的加权和 第二个局限出现在随机信号非平稳时 对于一个非平稳时间序列信号, 统计特性随时间变化 Wiener-Khintchine 定理不再有效, 因为谱分析是在信号的整个持续时间上取平均, 不能描述局部瞬态特征

为了获得非线性结构系统的有效响应解, 已经提出了一系列的方法<sup>[1-3]</sup>, 包括 FPK 方法、统计(或随机)线性化方法、摄动法、截断矩(或累计矩)方法, 等等 但是大部分只适用于平稳问题 当激励为非平稳离散信号以及系统为多自由度时, 问题就会变得很难求解 同时为了识别非平稳信号, 人们提出和改进了一系列的时频方法, 例如短时 Fourier 变换、移动窗自回归模型、谐小波变换, 等等<sup>[4-7]</sup> 但它们中大部分都不能直接用于求解非线性方程, 只能用来识别信号

尽管有很多方法用于解决系统非线性, 也有许多技术用来处理信号识别, 但对非线性结构系统在非平稳随机激励下的响应解却仍难以获得 为了求解这样一个问题, 本文提出一种基于  $Z$  变换的递归方法 并利用这种方法, 对 Duffing 振子进行了分析

## 1 非线性多自由度系统的方程和解

对于多自由度(MDOF)非线性系统, 时间序列和参数形式的一般振动方程可表示为

收稿日期: 2006-06-06; 修订日期: 2007-08-20

作者简介: 高世桥(1961), 男, 满族, 辽宁人, 教授, 博士(联系人, Tel/Fax: + 86-10-68915087; E-mail: gaoshq@bit.edu.cn);

刘海鹏(Tel: + 86-10-68914201; E-mail: lhp@bit.edu.cn).

$$M(x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n) / T^2 + Kx_n + N(x_n) = n f, \quad (1)$$

其中  $M$  和  $K$  分别为质量矩阵和刚度矩阵,  $N(x_n)$  为非线性项,  $x_n$  为响应位移,  $n f$  为激励,  $T$  为时间步长

因为方程(1)左边有一个非线性项  $N(x_n)$ , 所以很难求解 为了克服这个困难, 一个有效的办法就是将非线性项移到右端作为输入激励的一部分 将非线性项移到方程右端, 则方程(1)可写成

$$M x_{n+2} - 2M x_{n+1} + (M + T^2 K) x_n = T^2 [n f - N(x_n)] \quad (2)$$

为了对方程解耦, 通过坐标变换  $x_n = q_n$  引入广义位移  $q_n$ , 其中  $T$  是对应于线性系统的振动模态矩阵

代入方程(2), 并对方程两端都左乘转置矩阵  $T^T$ , 对第  $j$  阶振动模态  $j$ , 有

$$q_{n+2}^j - 2q_{n+1}^j + (1 + \frac{T^2}{m_j} K_j) q_n^j = n f_j - n y_j, \quad j = 1, 2, \dots, p, \quad (3)$$

其中  $\omega_j = (k_j / m_j)^{1/2}$  为系统第  $j$  阶固有频率,  $m_j = T_j^T M_j$  和  $k_j = T_j^T K_j$  分别是系统第  $j$  阶质量和刚度,  $f_j = T_j^T f / m_j$ ,  $y_j = T_j^T g^T N(x_n) / m_j$

对方程(3)应用  $Z$  变换及逆变换, 对于 0 初始位移和 0 初始速度条件, 即  $q_0^j = \dot{q}_0^j = 0$ , 当前响应可表示为脉冲函数和激励的卷积, 即

$$q_n^j = h_n^* \left( n f_j - n y_j \right) = \sum_{i=0}^n h_i \left( n - i f_j - n(n - i) y_j \right), \quad (4)$$

其中脉冲函数可表示为

$$h_n = Z^{-1} \left[ \frac{1}{z^2 - 2z + 1 + (\omega_j T)^2} \right] = \frac{\sin((n-1)\omega_j T)}{\cos^{n-2} \omega_j T \sin \omega_j T} u_{n-1}, \quad (5)$$

其中

$$= \arccos \left( \frac{1}{(1 + (\omega_j T)^2)^{1/2}} \right),$$

且单位阶跃函数

$$u_n = \begin{cases} 1, & \text{当 } n \geq 0, \\ 0, & \text{当 } n < 0 \end{cases}$$

由于  $h_0 = h_1 = 0$ , 式(4)可以写成

$$q_n^j = \sum_{i=2}^n h_i \left( n - i f_j - n(n - i) y_j \right) \quad (6)$$

## 2 单自由度非线性系统的解

对于单自由度(SDOF)强非线性弹簧-质量系统, 当考虑阻尼时, 振动方程可写为

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + kx + \alpha x^p = f(t), \quad (7)$$

其中  $m$  是质量,  $c$  为阻尼系数,  $k$  是刚度,  $\alpha$  是强化系数, 整数  $p$  为幂系数,  $f$  是激励,  $x$  是位移 当  $p = 3$  时, 它是 Duffing 振子

由方程(6)可知, 当前的响应为

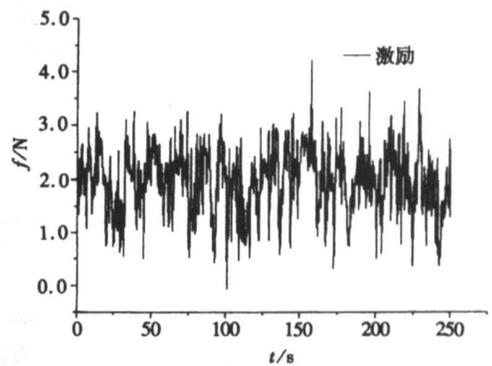


图 1 随机激励信号

$$x_n = \sum_{i=2}^n h_i(f_{n-i} - x_{n-i}^p) T^2/m, \tag{8}$$

其中  $x_n = x(t_n), f_n = f(t_n)$   $T$  为时间步长, 脉冲序列可写成

$$h_n = \frac{(1 - \frac{T}{\cos})^{n-2}}{\cos^{n-2}} \frac{\sin(n-1)}{\sin} u_{n-1}, \tag{9}$$

其中

$$\cos = \frac{1 - \frac{T}{2}}{(1 - 2 \frac{T}{T} + \frac{T^2}{T^2})^{1/2}}, \quad \omega = \frac{k}{m}, \quad c = \frac{1}{2} \frac{c}{m}$$

### 3 时间序列信号识别和处理

对于处理和识别时间序列信号, 一个众所周知的传统但却很有效的方法是 Fourier 分析但是它不能用于处理非平稳问题, 因为它是对信号整个持续时间的平均 为了克服这个缺陷, 通常使用短时 Fourier 变换(STFT) 这种方法非常容易理解, 但它不能同时在时域和频域获得高分辨率 为了解决这个缺陷, 提出并建议一种小波变换方法

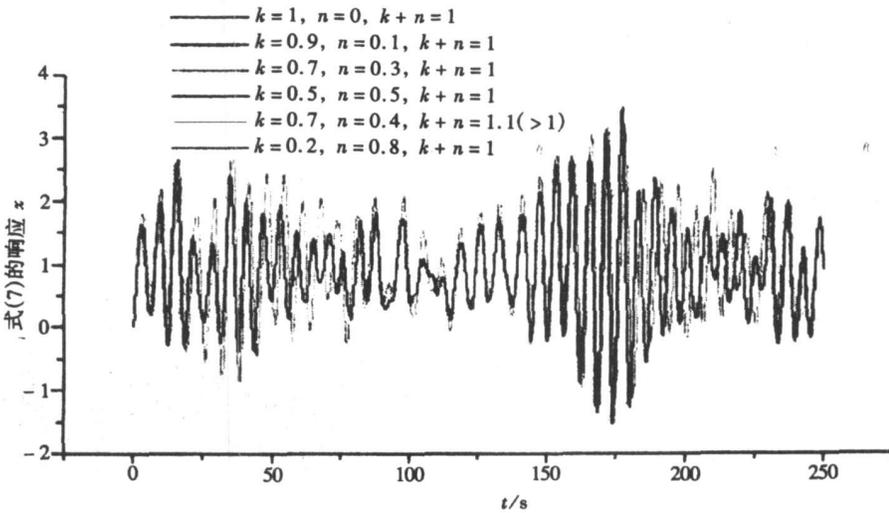
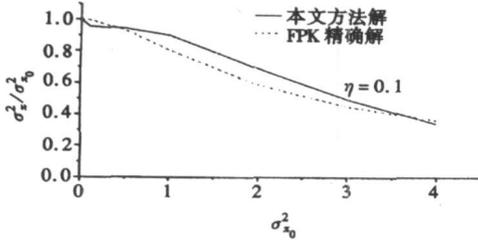


图2 线性系统的响应 ( $mx + cx + kx = f - (x)$ )

在小波分析中, 信号被分解为一系列有限长度的基函数, 而这些函数是由一个母小波函数经过平移和尺度伸缩得来的, 即在时间或空间上不同尺度和位置的小波函数<sup>[4,5]</sup> 小波分析非常灵活, 允许在时频平面变化以同时达到高分辨率 选择一个合适的基函数, 使其在关心的



(a)  $\eta = 0.1$

时间段外迅速衰减到 0, 能获得信号频率成分的局部瞬态表示 对于时间序列信号, 需要离散小波变换(DWT) 通过这种方法, 时间序列信号  $x(n)$  可被表示成一系列平移和伸缩母小波的和, 即

$$x(n) = \sum_i \sum_j a_{i,j} \psi_{i,j}(n), \tag{10}$$

其中  $a_{i,j}$  称为小波系数,  $\psi_{i,j}(n) = 2^{i/2} (2^j n - j)$ ,  $\psi(n)$  是母小波,  $i, j$  代表分解子集的尺度和移位 小波系数  $a_{i,j}$  可由下面的小波变换(DWT) 得到

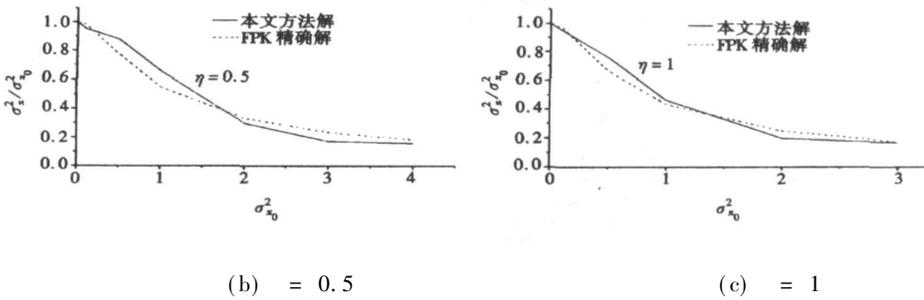


图3 文中方法计算的解与 FPK 方法计算的精确解的对比

$$a_{i,j} = \frac{1}{n} \sum_{n=1}^n x(n) \cdot i,j(n) \tag{11}$$

方程(10) 也称为逆小波变换 IWT

实践中, 利用迭代滤波器组技术, 可将原始信号(时间序列) 谱分解为两个部分, 高通部分和低通部分。高通部分包含我们关心的最小的细节, 低通部分仍然包含很多细节, 并能在下一迭代步骤再次分成两个部分, 这种分解能无限进行。对信号进行小波变换可认为是让信号通过这个滤波器组。通过每个高通滤波器的信号是对应于不同的频段的细节, 对应地, 通过低通滤波器的信号是该信号的近似表示。

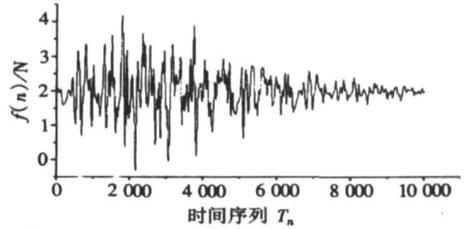


图4 激励力信号

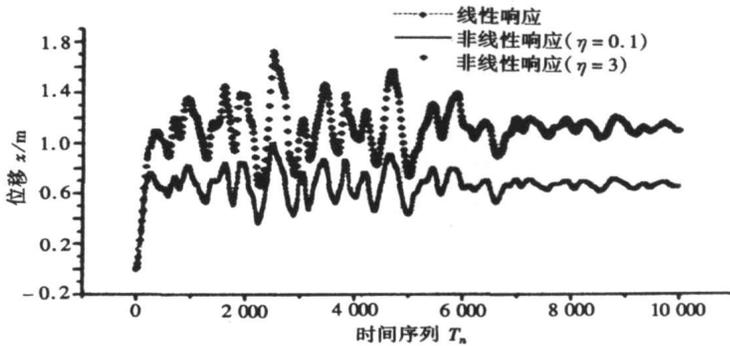


图5 单自由度系统的位移响应

## 4 单自由度系统的验证

为了验证上面的方法, 对于单自由度系统, 我们从两个方面进行了对比。一个是线性系统的恢复(或退化), 另一个是非线性 Duffing 振子的平方差变量计算及比较。

### 4.1 线性系统的恢复

对于  $p = 1$ , 方程(7) 退化为线性系统。为了验证该方法, 施加一随机激励力信号(源于风洞风压测试信号), 如图1所示, 对于不同的  $k$  和  $\eta$ , 可以获得了一系列响应曲线, 如图2所示。从这些图中可以看出, 当取不同的  $k$  和  $\eta$  值, 但  $k + \eta = 1$  的时候, 各响应曲线几乎都是重叠的。这从一个方面证明了移项递归技术方法对退化线性系统的正确性。

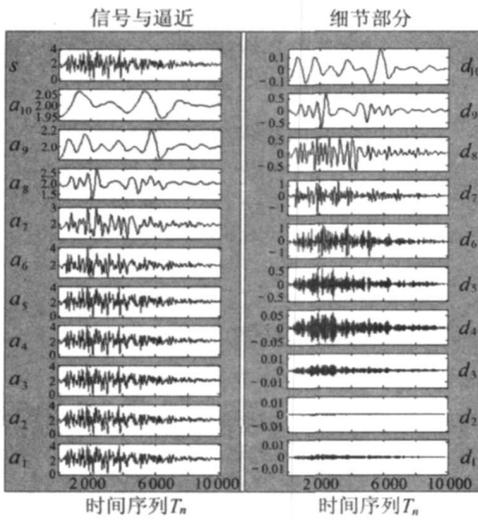


图6 激励信号的 DWT 分析

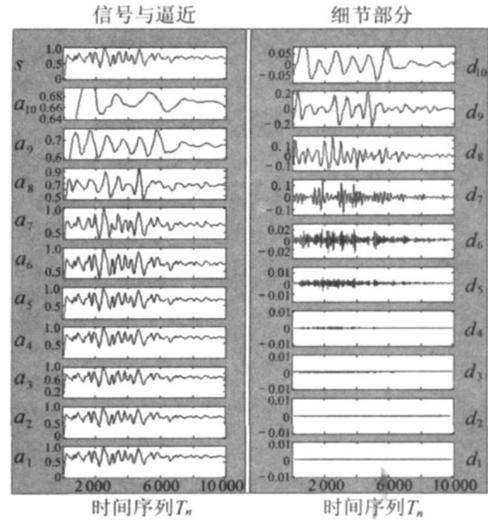


图7 \$\gamma = 0.1\$ 时位移的 DWT 分析

### 4.2 非线性 Duffing 振子的平方差变量计算及比较

对于  $p = 3$ , 方程(7)变成 Duffing 振子方程 对于 Duffing 振子, 当激励是白噪声时, 可以由 FPK 方法获得精确的解析解 为了验证上面的方法, 我们对比了本文方法所获得的解与 FPK 方法获得的精确解析解 激励是相同的 Gauss 白噪声 改变功率谱密度, 我们能获得一系列响应的平方差变量  $\sigma_{x_0}^2$ , 不同的非线性系数  $\gamma$ , 也将获得不同的响应 对应不同非线性系数的  $\sigma_{x_0}^2$  的曲线见图 3 从结果曲线中可以看出, 由上面方法所计算的值与 FPK 方法计算的精确值有很好的 consistency 这也从另一方面证明了本文的方法是有效的

## 5 算 例

作为例子, 本文计算了非平稳激励下 Duffing 振子的非平稳位移响应, 其中,  $m = 50 \text{ kg}$ ,  $k = 3 \text{ N/m}$ ,  $c = 10 \text{ N s/m}$ ,  $p = 3$ ,  $T = 0.05 \text{ s}$ , 图 4 给出了由谱模拟方法得到的非平稳输入力的时间序列 它的 DWT 识别见图 6 离散小波变换的中心频率和准频率的关系为  $F_a = F_c / (a T)$ , 其中  $F_c$  为小波的中心频率, 单位为 Hz,  $F_a$  为对应于尺度的  $a$  准频率, 单位为 Hz,  $a$  为尺度,  $T$  为采样周期 这里所用的中心频率为  $F_c = 0.7143$  从 DWT 分析可以看到, 激励信号中大幅值对应的尺度接近于  $a = 2^6$  和  $a = 2^7$ , 对应的频率接近于  $0.223 \text{ Hz}$  和  $0.112 \text{ Hz}$

由文中递归方法获得的非线性和非平稳位移响应见于图 5 图 5 中有 3 条响应曲线, 一个是线性情形, 即  $\gamma = 0$ ; 另一个是弱非线性情形  $\gamma = 0.1$ ; 第 3 个是强非线性情形  $\gamma = 3$  从图中可以

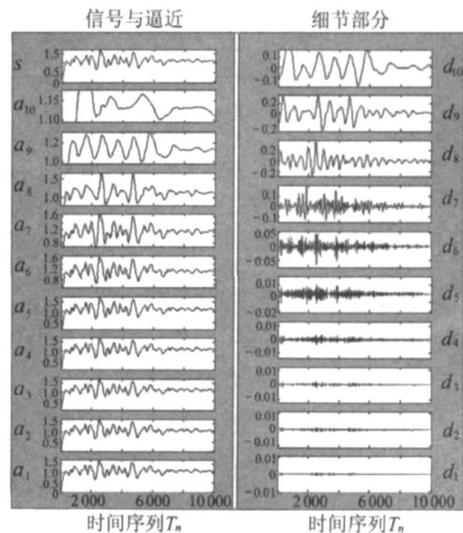


图8 \$\gamma = 3\$ 时位移的 DWT 分析

看出, 线性和弱非线性曲线差别非常小, 这两条曲线几乎重叠。弱非线性对响应影响很小, 线性和强非线性曲线的区别很大, 与通常情况不同的是非线性响应比线性大。其原因是对于非线性系统, 相当于提高了等效固有频率。随着等效固有频率的增加, 它会更接近激励的频率, 出现谐振效应。弱和强非线性 Duffing 振子系统位移信号的离散小波变换分别由图 7 和图 8 给出。从 DWT 分析中可以看出弱非线性系统的大响应幅值对应的尺度接近于  $a = 2^8$  和  $a = 2^9$ , 对应的频率接近于 0.056 Hz 和 0.028 Hz; 强非线性系统的大响应幅值对应的尺度接近于  $a = 2^8$ , 对应的频率接近于 0.056 Hz。

## 6 结 论

为获得非平稳随机时间序列信号激励下非线性系统的时间序列响应信号, 本文提出了一种有效的基于  $Z$  变换的递归方法。为了处理和识别非平稳响应信号, 对随机响应信号提出并建议了一种离散小波变换方法。利用 Duffing 振子作为例子, 不仅对比了 Gauss 白噪声激励下精确分析解, 而且获得和识别了非平稳激励的响应。结果的对比和分析表明方法是有效的。

### [参 考 文 献]

- [1] Sobczyk K. Stochastic analysis of one-dimensional nonlinear wave processes[A]. In: Ziegler F, Schueller G I Eds. Proc IUTAM Symp in Innsbruck. Nonlinear Stochastic Dynamic Engineering Systems[C]. Austria: Springer-Verlag, 1988, 313-320.
- [2] Gao S Q, Niemann H J. A method of iteration linearization to solve the nonlinear stochastic vibration problems[J]. Comm in Num Meth in Engng, 1994, **10**(1): 67-72.
- [3] 高世桥, 金磊, H J 尼曼, 等. 考虑旋转壳几何非线性时的随机响应研究[J]. 应用数学和力学, 2001, **22**(11): 1142-1146.
- [4] Neild S A, Mcfadden P D, Williams M S. A review of time-frequency methods for structural vibration analysis[J]. Engng Struct, 2003, **25**(6): 713-728.
- [5] Cohen L. Time-frequency distributions a review[J]. Proceedings of the IEEE, 1989, **77**(7): 941-981.
- [6] Owen J S, Eccles B J, Choo B S, et al. The application of auto-regressive time series modeling for the time-frequency analysis of civil engineering structures[J]. Engng Struct, 2001, **23**(5): 521-536.
- [7] Gurley K, Kareem A. Applications of wavelet transforms in earthquake, wind and ocean engineering[J]. Engng Struct, 1999, **21**(2): 149-167.
- [8] Seidel D K, Davies P. Modeling nonlinear system by using autoregressive moving average models[J]. Proceedings of the IEEE, 1990, **78**(10): 2559-2562.

# Nonlinear Analysis of a Structure Loaded by a Stochastic Excitation

GAO Shi-qiao<sup>1</sup>, JIN Lei<sup>1</sup>, M. Kasperski<sup>2</sup>, LIU Hai-peng<sup>1</sup>, LI Ming-hui<sup>1</sup>

(1. School of Aerospace Science and Engineering, Beijing Institute of Technology,

Beijing 100081, P. R. China;

(2. Faculty of Civil Engineering, Ruhr University Bochum, Germany)

**Abstract:** For a non-linear system excited by a stochastic load which is expressed as a time series, a recursive method based on the Z-transform was presented. To identify the obtained response time series, a discrete wavelet transform (DWT) technique was proposed.

**Key words:** non-linear; stochastic; recursive; wavelet transform