应用数学和力学,第 28 卷 第 11 期
2007 年 11 月 15 日出版
Applied Mathematics and Mechanics
Vol. 28, No. 11, Nov. 15, 2007

文章编号: 1000-0887(2007) 11-1340-13

双调和型抛物方程的 Schauder 估计*

姚锋平, 周蜀林

(北京大学 数学学院, 北京 100871)

(郭懋正推荐)

摘要: 该文给出了双调和型抛物方程初值问题解的Schauder 估计, 并且在适当的空间中证明了解的存在性与惟一性· 类似于二阶情形, 首先通过 Fourier 变换得到一个形式解, 然后再利用位势理论和逼近方法得到解的正则性、唯一性及存在性· 该方法简单而易懂·

关 键 词: 双调和; 抛物; Schauder 估计; 存在性; 惟一性
中图分类号: O175.26 文献标识码: A

引 言

在70 多年前, Schauder[1-2] 得到了一类关于二阶线性椭圆微分方程古典解的先验估计· 这些点态的估计后来发现在研究椭圆和抛物型微分方程中非常有用, 这类估计也随之被命名为Schauder 估计· 现在 Schauder 估计在二阶线性椭圆型与抛物型方程微分方程的理论研究中起到了至关重要的作用, 是研究解的存在性、惟一性和正则性的基础· 现在 Schauder 估计已经被很多学者推广和简化· 现在主要有 4 种方法来得到椭圆型方程的 Schauder 估计· 第 1 种方法就是 Schauder 早期给出的建立在Newton 位势理论上的方法· 第 2 种方法是 Campanato 在文献[3] 中提出的, 在那里他通过引入 Campanato 空间来刻画 Hölder 空间· 第 3 种方法是利用磨光函数得到的(见 Trudinger[4])· 第 4 种得到 Schauder 估计的方法是 Caffarelli[5] 提出的处理二阶椭圆方程粘性解的扰动方法·

抛物型方程的 Schauder 估计是 Ciliberto[6] 最早得到的· 随后很多作者提出了不同的证明方法(见文献[7-17])· 在有界区间或者全空间中有界系数的二阶线性抛物方程解的全局及内部Schauder 估计可以用多种方法得到(见文献[7-8, 10-11])· 最近通过半群理论无界系数的二阶线性抛物方程在 R^n 中的 Schauder 估计也已经得到了(见文献[12-14]· 滕[15], 王[16] 和 Solonnikov[17] 分别独立地得到了关于一般情形的高阶线性抛物方程边值问题的 Schauder 估计· 他们主要是通过基本解和 Green 函数得到估计的· 本文我们得到双调和型四阶方程 Cauchy 问题的Schauder 估计· 这里我们是先通过Fourier 变换得到一个形式解, 然后再利用位势理论和逼近方法得到解的正则性、惟一性及存在性· 我们的方法相比而言更加简单易懂· 事实上, 我们

* 收稿日期: 2006-10-23; 修订日期: 2007-08-20
基金项目: 国家科技部973 计划资助项目(2006CB705700) ; 国家自然科学基金资助项目(60532080) ; 国家教育部科学技术重点项目(306017)
作者简介: 姚锋平(1978—) , 江苏吴江人, 博士(联系人. E-mail: yfp1123@ math. pku. edu. cn) ;
周蜀林(1966—) , 贵州惠水人, 博士(E-mail: szhou@ math. pku. edu. cn) .

的方法适用于更加一般的情形(见附注2)。

本文我们将研究下述四阶抛物方程的全局Schauder估计:

$$u_t + \Delta^2 u = f, \qquad (x, t) \in R^n \times (0, T], \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = 0, \qquad x \in R^n. \tag{2}$$

方程(1)实际上是Cahn-Hilliard方程[18]

$$u_t + \Delta(\varepsilon^2 \Delta u + f(u)) = 0$$

的一个简单情形。Cahn-Hilliard方程来源于自然界中某些扩散现象。例如,描述两种物质构成的体系(如合金,聚合物等)的相变都提出了Cahn-Hilliard方程。许多作者从不同角度研究了这个方程(见文献[19-20])。在文献[21]中方程

$$u_t + \lambda\Delta^2 u = \gamma \operatorname{div}(u^m \nabla u), \qquad (x, t) \in R^n \times (0, \infty), \tag{3}$$

被用来模拟生物群体之间的扩散现象。另外,一般的薄膜(thin film)方程

$$u_t + \operatorname{div}(|\nabla\Delta u|^{p-2}\nabla\Delta u) = f, \tag{4}$$

这里 $p \in (1, +\infty)$ 也被广泛的研究(见文献[22-23])。而我们容易看出方程(1)只是方程(3)或者(4)的一个简单情形。

在阐述本文的主要结论之前,我们首先介绍一些基本概念。

设函数 $u(x, t): R^n \times (0, T] \to \mathbf{R}$, $\nu = (\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_n)$ 是任一多重指标, $\nu_i \geqslant 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$ 和 $|\nu| = \sum_{i=1}^{n} \nu_i$。我们称

$$D_x^\nu u(x, t) = \frac{\partial^{|\nu|} u(x, t)}{\partial x_1^{\nu_1} \cdots \partial x_n^{\nu_n}}$$

为 u 的第 ν 次弱导数。简单起见,我们经常省略下标 x 并记 $D^k u = \left\{D^\nu u: |\nu| = k\right\}$。

在 $R^n \times \mathbf{R}_+$ 中我们定义距离

$$\delta(X, Y) = \max\left\{|x - y|, |t - s|^{1/4}\right\}, \quad X = (x, t), \quad Y = (y, s)$$

和Banach空间

$$C^{4,1}(R^n \times [0, T]) = \left\{u \in C(R^n \times [0, T]) \mid u_t, D^s u \in C(R^n \times [0, T]), 1 \leqslant s \leqslant 4\right\}.$$

定义1 对于 $0 < \alpha < 1$, 我们引入Hölder半模

$$[u]_{\alpha, R^n \times [0, T]} = \sup_{\substack{X, Y \in R^n \times [0, T] \\ X \neq Y}} \frac{|u(X) - u(Y)|}{\delta(X, Y)^\alpha}.$$

用 $C^{\alpha, \alpha/4}(R^n \times [0, T])$ 表示全体满足上面半模有限的函数集合,并规定范数如下

$$\|u\|_{\alpha, R^n \times [0, T]} = [u]_{\alpha, R^n \times [0, T]} + \|u\|_{0, R^n \times [0, T]} < +\infty,$$

其中 $\|u\|_{0, R^n \times [0, T]} = \sup_{R^n \times [0, T]} |u|$。

进一步,定义函数空间 $C^{4+\alpha, 1+\alpha/4}(R^n \times [0, T])$ 为

$$\|u\|_{4+\alpha, R^n \times [0, T]} = \sum_{0 \leqslant r + 4s \leqslant 4} \|D^r D_t^s u\|_{0, R^n \times [0, T]} + [D^4 u]_{\alpha, R^n \times [0, T]} + [u_t]_{\alpha, R^n \times [0, T]} < +\infty.$$

实际上,不难验证上述的两个函数空间均为Banach空间。

通过对式(1)、(2)在空间 x 方向取Fourier变换,我们可得到一个形式解

$$V(x, t) = \int_0^t \int_{R^n} \Phi(x, t; y, \tau) f(y, \tau) \, dy \, d\tau, \tag{5}$$

其中

$$\Phi(x,t;y,\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{(2\pi\sqrt{t-\tau})^{n/2}}\phi\left[\dfrac{x-y}{(t-\tau)^{1/4}}\right], & t>\tau,\\ 0, & t\leqslant\tau\text{.}\end{cases}\tag{6}$$

这里

$$\phi(x)=[\mathrm{e}^{-|\xi|^4}]^{\vee}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n}\mathrm{e}^{-|\xi|^4}\cos(\xi\cdot x)\mathrm{d}\xi\text{.}\tag{7}$$

由 Fourier 积分定理我们有

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n}\phi(x)\mathrm{d}x=1\text{.}\tag{8}$$

进一步, 对于 $t>\tau$, 由于 $D_t^rD_x^s\Phi(x,t;y,\tau)=(-1)^{r+s}D_\tau^rD_y^s\Phi(x,t;y,\tau)$, 则

$$\int_{R^n}D_t^rD_x^s\Phi(x,t;y,\tau)\mathrm{d}y=\begin{cases}1, & r=s=0,\\ 0, & r+s\geqslant 1\text{.}\end{cases}\tag{9}$$

现在我们来阐述本文的主要结论:

定理 1 设 $\alpha\in(0,1)$, $f\in C^{\alpha,\alpha/4}(R^n\times[0,T])$. 则 $V(x,t)$(定义如式(5)) 是原问题(1)、(2) 在空间 $C^{4+\alpha,1+\alpha/4}(R^n\times[0,T])$ 中的惟一解. 另外, $V(x,t)$ 满足估计

$$\|V\|_{4+\alpha,R^n\times[0,T]}\leqslant C\|f\|_{\alpha,R^n\times[0,T]},$$

其中 C 只依赖于 α、n、T.

附注 1 如果我们替换初值条件(2) 为

$$u(x,0)=\varphi(x)\in C^{4+\alpha}(R^n),\tag{10}$$

则

$$V(x,t)=V(x,t)+\int_{R^n}\Phi(x,t;y,0)\varphi(y)\mathrm{d}y,$$

其中 V 和 Φ 如式(5) 和(6) 所示, 是问题(1)、(10) 在空间 $C^{4+\alpha,1+\alpha/4}(R^n\times[0,T])$ 中的惟一解. 另外, $V(x,t)$ 满足估计

$$\|V\|_{4+\alpha,R^n\times[0,T]}\leqslant C(\|f\|_{\alpha,R^n\times[0,T]}+\|\varphi\|_{4+\alpha,R^n})\text{.}$$

类似定义 1 我们可以定义 Banach 空间 $C^{2m+\alpha,1+\alpha/2m}(R^n\times[0,T])$ 为所有满足下面范数有界的函数组成的空间

$$\|u\|_{2m+\alpha,R^n\times[0,T]}=\sum_{0\leqslant r+2ms\leqslant 2m}\|D^rD_t^su\|_{0,R^n\times[0,T]}+[D^{2m}u]_{\alpha,R^n\times[0,T]}+[u_t]_{\alpha,R^n\times[0,T]}<\infty\text{.}$$

附注 2 利用同文给出的方法我们可得: 设 m 是任意正整数. 如果 $f\in C^{\alpha,\alpha/2m}(R^n\times[0,T])$, 则 $V_m(x,t)$ (定义如下) 是问题

$$\begin{cases}u_t+(-\Delta)^mu=f, & (x,t)\in R^n\times(0,T],\\ u|_{t=0}=0, & x\in R^n,\end{cases}$$

在空间 $C^{2m+\alpha,1+\alpha/2m}(R^n\times[0,T])$ 中的惟一解. 另外, $V_m(x,t)$ 满足估计

$$\|V_m\|_{2m+\alpha,R^n\times[0,T]}\leqslant C\|f\|_{\alpha,R^n\times[0,T]}\text{.}$$

这里

$$V_m(x,t)=\int_0^t\int_{R^n}\Phi_m(x,t;y,\tau)f(y,\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau,$$

其中

$$\Phi_m(x,t;y,\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{(2\pi\sqrt[m]{t-\tau})^{n/2}}\phi_m\left[\dfrac{x-y}{(t-\tau)^{1/(2m)}}\right], & t>\tau,\\ 0, & t\leqslant\tau\text{.}\end{cases}$$

$$\phi_m(x)=[\mathrm{e}^{-|\xi|^{2m}}]^{\vee}(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n}\mathrm{e}^{-|\xi|^{2m}}\cos(\xi\cdot x)\,\mathrm{d}\xi\text{.}$$

本文我们将给出一个跟热方程的 Schauder 估计(见文献[11,24])类似的证明方法. 本文后面的内容组织如下: 第1节证明了两个辅助定理, 第2节完成定理1的证明. 在下面的章节中哪怕在同一个式子中常数 C 都代表不同取值的常数. 简单起见, 我们记

$$[u]_\alpha=[u]_{\alpha,R^n\times[0,T]},\quad [u]_0=\|u\|_{0,R^n\times[0,T]},\quad \|u\|_{4+\alpha}=\|u\|_{4+\alpha,R^n\times[0,T]}\text{.}$$

1 辅助定理

首先我们定义一个速降函数空间

$$\mathscr{S}_T=\left\{u\in C^{4,1}(R^n\times[0,T])\;\Big|\;\sum_{0\leqslant s\leqslant 4}\sup_{\substack{x\in R^n\\ t\in[0,T]}}|x|^{n+1}|D^s u(x,t)|<\infty\right\}\text{.}$$

设 B_R 是在 R^n 中中心为原点、半径为 $R>0$ 的开球. 本节我们将证明下面关于原问题(1)、(2)解的两个结论.

定理2 设 $\alpha\in(0,1)$, $f\in C^{\alpha,\alpha/4}(R^n\times[0,T])$. 则定义如式(5)的 $V(x,t)\in C^{4,1}(R^n\times[0,T])$ 并满足方程(1)、(2). 另外, 我们有估计

$$\|V_t(x,t)\|_0+\sum_{s=0}^{4}\|D^sV(x,t)\|_0\leqslant C\|f\|_\alpha,\tag{11}$$

这里常数 C 只依赖于 α、n、T.

进一步, 我们有

定理3 设 $\alpha\in(0,1)$, $f\in C^{\alpha,\alpha/4}(R^n\times[0,T])$ 且对任意的 $t\in[0,T]$, $\mathrm{supp}(\cdot,t)\subset B_{R_0}$, 这里 $R_0>0$ 是一固定的常数. 则定义如式(5)的 $V(x,t)$ 是原问题(1)、(2)在 $\mathscr{S}_T$ 中的惟一解.

让我们回顾一下 Schwarz 函数的定义.

定义2 假如对于任意的 $k,m\in\mathbf{N}$,

$$\sup_{x\in R^n}(1+|x|^2)^m|D^ku(x)|<\infty,\tag{12}$$

则我们称 $u\in C^\infty(R^n)$ 是一个 Schwartz 函数. 所有 Schwartz 函数的集合称为 Schwartz 空间并记作 $\mathscr{S}(R^n)$.

显然, 如果 $u\in\mathscr{S}(R^n)$, 则它的 Fourier 变换及反变换 $\hat{u}(\lambda)$, $\check{u}(\lambda)\in\mathscr{S}(R^n)$.

引理1 $\phi(x)$ 和 $\Phi(x,t;y,\tau)$ 定义如式(6)和式(7). 则我们有下列性质

(i) $\phi(x)\in\mathscr{S}(R^n)$.

(ii) 设 $t>\tau$, $s\in\mathbf{N}$. 则 $\Phi(x,t;y,\tau)$ 满足

$$|D_t^rD_x^s\Phi(x,t;y,\tau)|\leqslant C(t-\tau)^{-n/4-s/4-r}\sum_{i=0}^{r}\frac{|x-y|^i}{(t-\tau)^{i/4}}\left|D^{s+i}\phi\left[\frac{x-y}{(t-\tau)^{1/4}}\right]\right|\text{.}$$

证明 结论(ii)的证明显然. 而我们能由 $\mathrm{e}^{-|\xi|^4}\in\mathscr{S}(R^n)$ 得到结论(i).

定理2的证明 首先我们证明下面的结论: 对于任意的多重指标 $\nu=(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_n)$, 这里 $1\leqslant|\nu|\leqslant 4$. 则

$$V_t(x,t)=\int_0^t\int_{R^n}D_t\Phi(x,t;y,\tau)[f(y,\tau)-f(x,\tau)]\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau+f(x,t),\tag{13}$$

$$D_x^{\nu}V(x,t)=\int_0^t\int_{R^n}D_x^{\nu}\Phi(x,t;y,\tau)[f(y,\tau)-f(x,\tau)]\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau.\tag{14}$$

接下来我们将给出式(13)和式(14)的证明. 设 $\varepsilon\in(0,t)$. 令 $\eta=(x-y)/(t-\tau)^{1/4}$和

$$V_{\varepsilon}(x,t)=\int_0^{t-\varepsilon}\int_{R^n}\Phi(x,t;y,\tau)f(y,\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau.$$

则通过引理 1 我们有

$$\left|V_{\varepsilon}(x,t)-V(x,t)\right|=\left|\int_{t-\varepsilon}^t\int_{R^n}\Phi(x,t;y,\tau)f(y,\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\right|\leqslant$$
$$C\|f\|_0\int_{t-\varepsilon}^t\left\{\int_{R^n}|\phi(\eta)|\,\mathrm{d}\eta\right\}\mathrm{d}\tau\leqslant C\varepsilon\|f\|_0\to0,\text{ 当 }\varepsilon\to0.$$

从而可得

$$V_{\varepsilon}(x,t)\to V(x,t),\qquad\text{当 }\varepsilon\to0.\tag{15}$$

由式(9)知

$$D_tV_{\varepsilon}(x,t)=\int_0^{t-\varepsilon}\int_{R^n}D_t\Phi(x,t;y,\tau)f(y,\tau)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau+$$
$$\int_{R^n}\Phi(x,t;y,t-\varepsilon)f(y,t-\varepsilon)\mathrm{d}y=$$
$$\int_0^{t-\varepsilon}\int_{R^n}D_t\Phi(x,t;y,\tau)[f(y,\tau)-f(x,\tau)]\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau+$$
$$\int_{R^n}\Phi(x,t;y,t-\varepsilon)f(y,t-\varepsilon)\mathrm{d}y.\tag{16}$$

记

$$I_1=\left|\int_0^{t-\varepsilon}\int_{R^n}D_t\Phi(x,t;y,\tau)[f(y,\tau)-f(x,\tau)]\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau-\right.$$
$$\left.\int_0^t\int_{R^n}D_t\Phi(x,t;y,\tau)[f(y,\tau)-f(x,\tau)]\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\right|,$$

$$I_2=\left|\int_{R^n}\Phi(x,t;y,t-\varepsilon)f(y,t-\varepsilon)\mathrm{d}y-f(x,t)\right|.$$

回顾引理 1, 我们有

$$I_1=\left|\int_{t-\varepsilon}^t\int_{R^n}D_t\Phi(x,t;y,\tau)[f(y,\tau)-f(x,\tau)]\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\right|\leqslant$$
$$C[f]_{\alpha}\int_{t-\varepsilon}^t\int_{R^n}\frac{|x-y|^{\alpha}}{(t-\tau)^{n/4+1}}\left(\left|\phi\left[\frac{x-y}{(t-\tau)^{1/4}}\right]\right|+\right.$$
$$\left.\frac{|x-y|}{(t-\tau)^{1/4}}\left|D\phi\left[\frac{x-y}{(t-\tau)^{1/4}}\right]\right|\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau.$$

令 $\eta=(x-y)/(t-\tau)^{1/4}$. 我们知

$$I_1\leqslant C[f]_{\alpha}\int_{t-\varepsilon}^t(t-\tau)^{\alpha/4-1}\left\{\int_{R^n}(|\eta|^{\alpha}|\phi(\eta)|+|\eta|^{1+\alpha}|D\phi(\eta)|)\mathrm{d}y\right\}\mathrm{d}\tau\leqslant$$
$$C[f]_{\alpha}\int_{t-\varepsilon}^t(t-\tau)^{\alpha/4-1}\mathrm{d}\tau\leqslant C\varepsilon^{\alpha/4}[f]_{\alpha}.$$

因此可得

$$I_1\to0,\qquad\text{当 }\varepsilon\to0.$$

另外, 利用引理 1 和式(9)可推出

$$I_2 = \left|\int_{R^n}\Phi(x,t;y,t-\varepsilon)[f(y,t-\varepsilon)-f(x,t)]\mathrm{d}y\right| \leqslant$$
$$C\int_{R^n}\varepsilon^{-n/4}\left|\phi\left(\frac{x-y}{\varepsilon^{1/4}}\right)\right||f(y,t-\varepsilon)-f(x,t)|\mathrm{d}y.$$

令 $\sigma=(x-y)/\varepsilon^{1/4}$, 则

$$I_2 \leqslant C\int_{R^n}|\phi(\sigma)||f(x-\varepsilon^{1/4}\sigma,t-\varepsilon)-f(x,t)|\mathrm{d}\sigma \leqslant$$
$$C\varepsilon^{\alpha/4}[f]_\alpha\int_{R^n}|\phi(\sigma)|(1+|\sigma|^\alpha)\mathrm{d}\sigma \leqslant C\varepsilon^{\alpha/4}[f]_\alpha.$$

由上式可得

$$I_2\to 0,\qquad 当\ \varepsilon\to 0.$$

综合式(16)和上面关于 I_1、I_2 的估计, 则当 $\varepsilon\to 0$ 我们有

$$D_tV_\varepsilon(x,t)\to\int_0^t\int_{R^n}D_t\Phi(x,t;y,\tau)[f(y,\tau)-f(x,\tau)]\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau+f(x,t); \tag{17}$$

类似地, 当 $\varepsilon\to 0$ 我们有

$$D_x^\nu V_\varepsilon(x,t)\to\int_0^t\int_{R^n}D_x^\nu\Phi(x,t;y,\tau)[f(y,\tau)-f(x,\tau)]\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau. \tag{18}$$

综合式(15)和式(17)、(18), 我们可得结论(13)和(14). 故我们易知 V_t, $D^sV(0\leqslant s\leqslant 4)\in C(R^n\times(0,T])$ 且由于 $\Phi_t(x,t;y,\tau)+\Delta_x^2\Phi(x,t;y,\tau)=0$, 则

$$V_t(x,t)+\Delta^2V(x,t)=f(x,t),\qquad (x,t)\in R^n\times(0,T]. \tag{19}$$

另外, 因为

$$\|V(x,t)\|_0\leqslant C\|f\|_0\int_0^t\int_{R^n}|\phi(\eta)|\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau\leqslant Ct\|f\|_0, \tag{20}$$

所以我们可知 $V(x,t)$ 满足

$$\lim_{t\to 0}V(x,t)=0.$$

因此对任意 $1\leqslant|\nu|\leqslant 4$, 则 $D^\nu V(x,0)=0$. 进一步, 利用引理 1 我们发现

$$\lim_{t\to 0}D^\nu V(x,t)=D^\nu V(x,0)=0. \tag{21}$$

实际上

$$|D^\nu V(x,t)|=\left|\int_0^t\int_{R^n}D_x^\nu\Phi(x,t;y,\tau)[f(y,\tau)-f(x,\tau)]\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\right|\leqslant$$
$$C[f]_\alpha\int_0^t\int_{R^n}|x-y|^\alpha(t-\tau)^{-n/4-|\nu|/4}\left|D^{|\nu|}\phi\left[\frac{x-y}{(t-\tau)^{1/4}}\right]\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\leqslant$$
$$C[f]_\alpha\int_0^t(t-\tau)^{\alpha/4-|\nu|/4}\left\{\int_{R^n}|\eta|^\alpha|D^{|\nu|}\phi(\eta)|\mathrm{d}\eta\right\}\mathrm{d}t=$$
$$Ct^{\alpha/4+1-|\nu|/4}[f]_\alpha. \tag{22}$$

更进一步, 我们能证明

$$\lim_{t\to 0}V_t(x,t)=f(x,0)=V_t(x,0). \tag{23}$$

事实上, 由于

$$|V_t(x,t)-f(x,0)|\leqslant$$
$$\left|\int_0^t\int_{R^n}D_t\Phi(x,t;y,\tau)[f(y,\tau)-f(x,\tau)]\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\right|+|f(x,t)-f(x,0)|\leqslant$$
$$Ct^{\alpha/4}[f]_\alpha+t^{\alpha/4}[f]_\alpha\leqslant Ct^{\alpha/4}[f]_\alpha,$$

同 I_1 的估计我们能得

$$\lim_{t\to 0} V_t(x,t)=f(x,0).$$

又因为从引理1和式(9)可得

$$\begin{aligned}&\left|\frac{V(x,t)-V(x,0)}{t}-f(x,0)\right|=\\&\quad t^{-1}\left|\int_0^t\int_{R^n}\Phi(x,t;y,\tau)[f(y,\tau)-f(x,0)]\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\right|\leqslant\\&\quad\frac{C[f]_\alpha}{t}\int_0^t\int_{R^n}\frac{(|x-y|^\alpha+t^{\alpha/4})}{(t-\tau)^{n/4}}\left|\phi\left[\frac{x-y}{(t-\tau)^{1/4}}\right]\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\leqslant\\&\quad\frac{C[f]_\alpha}{t}\int_0^t\left\{\int_{R^n}[\eta^\alpha(t-\tau)^{\alpha/4}+t^{\alpha/4}]\,|\phi(\eta)|\,\mathrm{d}\eta\right\}\mathrm{d}\tau\leqslant\\&\quad Ct^{\alpha/4}[f]_\alpha,\end{aligned}$$

因此

$$V_t(x,0)=f(x,0).$$

结合上面结论可知式(23)成立. 那么 $V_t, D^sV(0\leqslant s\leqslant 4)\in C(R^n\times[0,T])$. 最后,结合式(19)~式(23),我们得式(11),从而完成定理2的证明.

定理3的证明

1) 存在性

设 $|x|\geqslant 2R_0$. 则对任意的 $y\in B_{R_0}$, $|x|\leqslant 2|x-y|$. 那么由引理1有

$$\begin{aligned}|x|^{n+1}|V(x,t)|&\leqslant C\|f\|_0\int_0^t\int_{B_{R_0}}\frac{|x|^{n+1}}{(t-\tau)^{n/4}}\left|\phi\left[\frac{x-y}{(t-\tau)^{1/4}}\right]\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\leqslant\\&\quad C\|f\|_0\int_0^t\int_{B_{R_0}}\frac{|x-y|^{n+1}}{(t-\tau)^{n/4}}\left|\phi\left[\frac{x-y}{(t-\tau)^{1/4}}\right]\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau.\end{aligned}$$

令 $\eta=(x-y)/(t-\tau)^{1/4}$. 则再利用引理1可得

$$\begin{aligned}&|x|^{n+1}|V(x,t)|\leqslant\\&\quad C\|f\|_0\int_0^t(t-\tau)^{(n+1)/4}\left\{\int_{R^n}|\eta|^{n+1}|\phi(\eta)|\,\mathrm{d}\eta\right\}\mathrm{d}\tau< C\|f\|_0.\end{aligned}$$

因此

$$|x|^{n+1}|V(x,t)|< C\|f\|_0,\qquad (x,t)\in R^n\times[0,T].$$

类似地,对任意的 $1\leqslant s\leqslant 4$ 可得

$$|x|^{n+1}|D^sV(x,t)|< C\|f\|_0,\qquad (x,t)\in R^n\times[0,T].$$

故应用定理2可得 $V(x,t)\in\mathscr{S}_T$ 满足原问题(1)、(2).

2) 惟一性

要证明惟一性,我们只须证明下面的结论:

设 $f\equiv 0$. 如果 $u\in\mathscr{S}_T$ 是问题(1)、(2)的一个解,则 $u\equiv 0$.

在方程(1)两边乘 u 然后在 $B_R\times[0,t]$ 上积分,其中 $t\leqslant T$, $R>0$, 经过简单计算可得

$$\frac{1}{2}\int_{B_R}|u(x,t)|^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{B_R}u\Delta^2u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=0.$$

分步积分后我们可得

$$\int_0^t\int_{B_R}u\Delta^2u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t=\int_0^t\int_{B_R}|\Delta u|^2\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t-$$

$$\int_0^t\int_{\partial B_R}\Delta u D u\cdot\gamma \mathrm{d}S(x)\mathrm{d}t+\int_0^t\int_{\partial B_R} uD\Delta u\cdot\gamma \mathrm{d}S(x)\mathrm{d}t=J_1+J_2+J_3, \tag{24}$$

其中 γ 为 B_R 的单位外法向量. 又因 $u\in\mathscr{S}_T$, 我们可得, 对于 $0\leqslant s\leqslant 4$,

$$|x|^{n+1}|D^s u(x,t)|\leqslant C,\qquad (x,t)\in R^n\times[0,T].$$

因此

$$|J_2|+|J_3|\leqslant C\int_0^T\int_{\partial B_R}\frac{1}{|x|^{2(n+1)}}\mathrm{d}S(x)\mathrm{d}t\leqslant\frac{C}{R^{n+3}}.$$

在式(24)中取 $R\to\infty$ 那么结合 J_2 和 J_3 的估计, 我们有

$$\frac{1}{2}\int_{R^n}|u(x,t)|^2\mathrm{d}x+\int_0^t\int_{R^n}|\Delta u|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

因此

$$u(x,t)\equiv 0,\qquad (x,t)\in R^n\times[0,T].$$

从而我们完成定理的证明.

2 主要结论的证明

本节将利用下面的结论来证明定理 1. 首先我们证明下述重要结论:

命题 1 设 $\alpha\in(0,1)$, $f\in C^{\alpha,\alpha/4}(R^n\times[0,T])$. 则 $V(x,t)\in C^{4+\alpha,1+\alpha/4}(R^n\times[0,T])$ 满足

$$\|V\|_{4+\alpha}\leqslant C\|f\|_\alpha,$$

其中 C 仅依赖于 α、n、T.

证明 设 $X_1=(x_1,t_1)$, $X_2=(x_2,t_2)\in R^n\times[0,T]$, 这里 $t_2\geqslant t_1$. 又设 $\nu=(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_n)$, 其中 $\nu_i\geqslant 0\ (i=1,2,\dots,n)$, 是一个 $|\nu|=4$ 的多重指标. 我们记

$$r=\delta(X_1,X_2)=\max\left\{|x_2-x_1|,(t_2-t_1)^{1/4}\right\}.$$

当 $t_1=0$, 由式(21)和式(22)可得

$$|D_x^\nu V(x_2,t_2)-D_x^\nu V(x_1,0)|=|D_x^\nu V(x_2,t_2)|\leqslant Cr^\alpha[f]_\alpha. \tag{25}$$

今后假设 $t_2\geqslant t_1>0$. 因为

$$\begin{aligned}&|D_x^\nu V(x_2,t_2)-D_x^\nu V(x_1,t_1)|\leqslant\\&\quad|D_x^\nu V(x_2,t_2)-D_x^\nu V(x_2,t_1)|+|D_x^\nu V(x_2,t_1)-D_x^\nu V(x_1,t_1)|,\end{aligned} \tag{26}$$

故我们只须估计式(26)右端的两项. 不失一般性我们不妨设 $t_2>t_1>0$. 不然我们只须估计式(26)右端的第 2 项.

利用式(14)我们可计算得

$$\begin{aligned}&|D_x^\nu V(x_2,t_2)-D_x^\nu V(x_2,t_1)|\leqslant\\&\left|\int_{t_1}^{t_2}\int_{R^n}D_x^\nu\Phi(x_2,t_2;y,\tau)[f(y,\tau)-f(x_2,\tau)]\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\right|+\\&\left|\int_0^{t_1}\int_{R^n}[D_x^\nu\Phi(x_2,t_2;y,\tau)-D_x^\nu\Phi(x_2,t_1;y,\tau)][f(y,\tau)-f(x_2,\tau)]\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\right|=\\&K_1+K_2.\end{aligned}$$

K_1 的估计: 我们通过引理 1 可得

$$K_1\leqslant[f]_\alpha\int_{t_1}^{t_2}\int_{R^n}(t_2-\tau)^{-n/4-1}|y-x_2|^\alpha\left|D^4\phi\left[\frac{y-x_2}{(t_2-\tau)^{1/4}}\right]\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau.$$

在上面的积分中令 $\eta=(y-x_2)/(t_2-\tau)^{1/4}$, 可知

$$K_1\leqslant[f]_\alpha\int_{t_1}^{t_2}(t_2-\tau)^{\alpha/4-1}\left\{\int_{R^n}|\eta|^\alpha|D^4\phi(\eta)|\,\mathrm{d}\eta\right\}\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$C(t_2-t_1)^{\alpha/4}[f]_\alpha\leqslant Cr^\alpha[f]_\alpha.$$

K_2 的估计: 由于

$$K_2=\left|\int_0^{t_1}\int_{R^n}\left(\int_{t_1}^{t_2}D_\theta D_x^\nu\Phi(x_2,\theta;y,\tau)\,\mathrm{d}\theta\right)[f(y,\tau)-f(x_2,\tau)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau\right|\leqslant$$

$$[f]_\alpha\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{t_1}\int_{R^n}|y-x_2|^\alpha|D_\theta D_x^\nu\Phi(x_2,\theta;y,\tau)|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\theta,$$

若令 $\eta=(y-x_2)/(t_2-\tau)^{1/4}$, 那么回顾引理 1 我们可得

$$K_2\leqslant C[f]_\alpha\int_{t_1}^{t_2}\int_0^{t_1}(\theta-\tau)^{\alpha/4-2}\times$$

$$\left\{\int_{R^n}(|\eta|^\alpha|D^4\phi(\eta)|+|\eta|^{1+\alpha}|D^5\phi(\eta)|)\,\mathrm{d}\eta\right\}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}\theta\leqslant$$

$$C[f]_\alpha\int_{t_1}^{t_2}\left\{\int_0^{t_1}(\theta-\tau)^{\alpha/4-2}\mathrm{d}\tau\right\}\mathrm{d}\theta\leqslant$$

$$C[f]_\alpha\int_{t_1}^{t_2}(\theta-t_1)^{\alpha/4-1}\mathrm{d}\theta\leqslant C(t_2-t_1)^{\alpha/4}[f]_\alpha\leqslant Cr^\alpha[f]_\alpha.$$

因此

$$|D_x^\nu V(x_2,t_2)-D_x^\nu V(x_2,t_1)|\leqslant Cr^\alpha[f]_\alpha. \tag{27}$$

接下来我们将估计式(26)的右端第 2 项. 实际上, 利用式(14)我们可计算得

$$|D_x^\nu V(x_2,t_1)-D_x^\nu V(x_1,t_1)|=$$

$$\left|\int_0^{t_1}\int_{R^n}D_x^\nu\Phi(x_2,t_1;y,\tau)[f(y,\tau)-f(x_2,\tau)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau-\right.$$

$$\left.\int_0^{t_1}\int_{R^n}D_x^\nu\Phi(x_1,t_1;y,\tau)[f(y,\tau)-f(x_1,\tau)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau\right|.$$

情形 1 $t_1\leqslant r^4$.

通过式(22)可知

$$|D_x^\nu V(x_2,t_1)-D_x^\nu V(x_1,t_1)|\leqslant Ct_1^{\alpha/4}[f]_\alpha\leqslant Cr^\alpha[f]_\alpha.$$

情形 2 $t_1>r^4$.

$$|D_x^\nu V(x_2,t_1)-D_x^\nu V(x_1,t_1)|\leqslant$$

$$\left|\int_{t_1-r^4}^{t_1}\int_{R^n}D_x^\nu\Phi(x_2,t_1;y,\tau)[f(y,\tau)-f(x_2,\tau)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau\right|+$$

$$\left|\int_{t_1-r^4}^{t_1}\int_{R^n}D_x^\nu\Phi(x_1,t_1;y,\tau)[f(y,\tau)-f(x_1,\tau)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau\right|+$$

$$\left|\int_0^{t_1-r^4}\int_{R^n}D_x^\nu\Phi(x_2,t_1;y,\tau)[f(y,\tau)-f(x_2,\tau)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau-\right.$$

$$\left.\int_0^{t_1-r^4}\int_{R^n}D_x^\nu\Phi(x_1,t_1;y,\tau)[f(y,\tau)-f(x_1,\tau)]\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau\right|=$$

$$L_1+L_2+L_3.$$

L_1+L_2 的估计: 同式(22)的证明, 我们可得

$$L_1+L_2\leqslant Cr^{\alpha/4}[f]_\alpha\cdot$$

L_3 的估计: 由式(9)可得到

$$L_3=\Big|\int_0^{t_1-r^4}\int_{R^n}[D_x^\nu\Phi(x_2,t_1;y,\tau)-D_x^\nu\Phi(x_1,t_1;y,\tau)][f(y,\tau)-f(x_1,\tau)]\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\Big|\cdot$$

定义

$$L_{31}=\int_0^{t_1-r^4}\int_{B_{2r}(x_1)}|D_x^\nu\Phi(x_2,t_1;y,\tau)-D_x^\nu\Phi(x_1,t_1;y,\tau)||f(y,\tau)-f(x_1,\tau)|\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau,$$

$$L_{32}=\int_0^{t_1-r^4}\int_{R^n\setminus B_{2r}(x_1)}|D_x^\nu\Phi(x_2,t_1;y,\tau)-D_x^\nu\Phi(x_1,t_1;y,\tau)||f(y,\tau)-f(x_1,\tau)|\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\cdot$$

L_{31} 的估计: 由引理1我们可看出

$$L_{31}\leqslant[f]_\alpha\int_0^{t_1-r^4}\int_{B_{2r}(x_1)}\frac{|y-x_1|^\alpha}{(t_1-\tau)^{n/4+1}}\left[\left|D^4\phi\left[\frac{x_1-y}{(t_1-\tau)^{1/4}}\right]\right|+\left|D^4\phi\left[\frac{x_2-y}{(t_1-\tau)^{1/4}}\right]\right|\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\cdot$$

令 $\eta=(x_1-y)/(t_1-\tau)^{1/4}$, $\zeta=(x_2-x_1)/(t_1-\tau)^{1/4}\cdot$ 则当 $y\in B_{2r}(x_1)$, $\tau\in[0,t_1-r^4]$ 时, 我们可得

$$|\eta|\leqslant 2,\ |\eta+\zeta|\leqslant|\eta|+1\leqslant 3\cdot$$

因此

$$L_{31}\leqslant[f]_\alpha\int_0^{t_1-r^4}(t_1-\tau)^{\alpha/4-1}\left\{\int_B|\eta|^\alpha(|D^4\phi(\eta)|+|D^4\phi(\eta+\zeta)|)\mathrm{d}\eta\right\}\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$[f]_\alpha\int_0^{t_1-r^4}(t_1-\tau)^{\alpha/4-1}\left[\frac{2r}{(t_1-\tau)^{1/4}}\right]^n\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$C[f]_\alpha r^n\int_0^{t_1-r^4}(t_1-\tau)^{(\alpha-n)/4-1}\mathrm{d}\tau\leqslant Cr^\alpha[f]_\alpha,$$

这里 $B=B_{2r/(t_1-\tau)^{1/4}}(0)\subset B_2(0)\cdot$

L_{32} 的估计: 由引理1可得

$$L_{32}\leqslant[f]_\alpha\int_0^{t_1-r^4}\int_{R^n\setminus B_{2r}(x_1)}|y-x_1|^\alpha\left|\int_0^1\mathrm{d}(D_x^\nu\Phi(\theta x_2+(1-\theta)x_1,t_1;y,\tau))\right|\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$[f]_\alpha\int_0^{t_1-r^4}\int_{R^n\setminus B_{2r}(x_1)}|y-x_1|^\alpha|x_2-x_1|\int_0^1|D_x^5\Phi(x_\theta,t_1;y,\tau)|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}y\mathrm{d}\tau,$$

其中 $x_\theta=\theta x_2+(1-\theta)x_1\cdot$ 显然当 $y\in R^n\setminus B_{2r}(x_1)$ 时, $B_r(x_\theta)\subset B_{2r}(x_1)$ 且 $|y-x_1|\leqslant 2|y-x_\theta|$, 因此

$$L_{32}\leqslant r[f]_\alpha\int_0^{t_1-r^4}\int_0^1\int_{R^n\setminus B_r(x_\theta)}|y-x_\theta|^\alpha|D_x^5\Phi(x_\theta,t_1;y,\tau)|\mathrm{d}y\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\tau\leqslant$$

$$r[f]_\alpha\int_0^{t_1-r^4}(t_1-\tau)^{\alpha/4-5/4}\int_{R^n}|\eta|^\alpha|D^5\phi(\eta)|\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\tau\leqslant Cr^\alpha[f]_\alpha.$$

综合上面的估计可知

$$|D_x^\nu V(x_2,t_1)-D_x^\nu V(x_1,t_1)|\leqslant Cr^\alpha[f]_\alpha.\tag{28}$$

考虑到式(25)~式(28), 我们得到, 对任意 $|\nu|=4$,

$$[D^\nu V]_\alpha\leqslant C[f]_\alpha,$$

从而

$$[D^4V]_\alpha\leqslant C[f]_\alpha.\tag{29}$$

利用定理 2 和式(29), 我们得

$$[D_tV]_\alpha\leqslant C([f]_\alpha+[\Delta^2V(x,t)]_\alpha)\leqslant C[f]_\alpha.$$

再结合定理2 的结论我们完成证明.

推论 1 设 $0<\alpha<1$. 如果 $u\in C^{4+\alpha,1+\alpha/4}(R^n\times[0,T])$, $u|_{t=0}=0$ 且对任意 $t\in[0,T]$, $\mathrm{supp}\,u(\cdot,t)\subset B_{\tau R}$, 其中 $\tau\in(0,1)$. 则我们有估计

$$[u_t]_{\alpha,B_R\times[0,T]}+[D^4u]_{\alpha,B_R\times[0,T]}\leqslant C[u_t+\Delta^2u]_{\alpha,B_R\times[0,T]}.$$

证明 从所给的已知条件我们可知 $u(x,t)\in\mathscr{S}$. 令 $f=u_t+\Delta^2u$. 那么对于任意的 $t\in[0,T]$, 则 $f\in C^{\alpha,\alpha/4}(R^n\times[0,T])$, $\mathrm{supp}\,f(\cdot,t)\subset B_{\tau R}$. 由定理 3 可得

$$u(x,t)=\int_0^t\int_{R^n}\Phi(x,t;y,\tau)f(y,\tau)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\tau.$$

而利用命题1, 我们可得

$$[u_t]_{\alpha,B_R\times[0,T]}+[D^4u]_{\alpha,B_R\times[0,T]}\leqslant$$
$$[u_t]_\alpha+[D^4u]_\alpha\leqslant C[f]_\alpha\leqslant C[u_t+\Delta^2\nu]_{\alpha,B_R\times[0,T]}.$$

故我们完成证明.

让我们回顾下面的结论(见文献[25] § 2.1).

引理 2 如果 $u,v\in C^{\alpha,\alpha/4}(R^n\times[0,T])$, 那么

$$[uv]_\alpha\leqslant[u]_\alpha\|v\|_0+\|u\|_0[v]_\alpha.$$

定理 1 的证明 由定理 2 和命题 1 的结论我们现在只须证明惟一性. 若 $u_1,u_2\in C^{4+\alpha,1+\alpha/4}(R^n\times[0,T])$ 是原问题的两个解. 现在令 $z=u_1-u_2\in C^{4+\alpha,1+\alpha/4}(R^n\times[0,T])$. 则 z 满足

$$z_t+\Delta^2z=0,\qquad (x,t)\in R^n\times(0,T],$$
$$z|_{t=0}=0,\qquad x\in R^n.$$

对任意的常数 $R>0$, 我们取一个截断函数 $\zeta=\zeta(x)\in C_0^\infty(R^n)$ 满足下列条件

$$\begin{cases}0\leqslant\zeta\leqslant1, & \zeta\equiv1,\ x\in B_R,\ \zeta=0,\ x\in R^n/B_{2R},\\ |D^k\zeta|_0+R^\alpha[D^k\zeta]_\alpha\leqslant C/R^k, & \forall k\in\mathbf{N}.\end{cases}\tag{30}$$

令 $v(x,t)=z(x,t)\zeta(x)$. 则 $v(x,t)\in C^{4+\alpha,1+\alpha/4}(R^n\times[0,T])$ 且 $\mathrm{supp}\,v(\cdot,t)\subset B_{2R}$, $t\in[0,T]$. 另外

$$v_t+\Delta^2v=f,\qquad (x,t)\in B_{3R}\times(0,T],$$
$$v|_{t=0}=0,\qquad x\in B_{3R},$$

其中

$$f = 2\Delta\zeta\Delta z + 4D^2\zeta\cdot D^2 z + 4D\zeta\cdot D\Delta z + 4Dz\cdot D\Delta\zeta + z\Delta^2\zeta. \tag{31}$$

而由推论 1、引理 2 和式(30), 可得

$$\begin{aligned}
&[z_t]_{\alpha, B_R\times[0,T]} + [D^4 z]_{\alpha, B_R\times[0,T]} \leqslant \\
&\quad [z_t]_{\alpha, B_{3R}\times[0,T]} + [D^4 z]_{\alpha, B_{3R}\times[0,T]} \leqslant \\
&\quad C[f]_{\alpha, B_{3R}\times[0,T]} \leqslant \\
&\quad C\sum_{k=0}^{4}\left(\frac{1}{R^k}[D^{4-k}z]_{\alpha, B_{3R}\times[0,T]} + \frac{1}{R^{k+\alpha}}[D^{4-k}z]_{0, B_{3R}\times[0,T]}\right).
\end{aligned}$$

在上式中取 $R\to+\infty$, 则得 $[z_t]_\alpha = 0$. 又因 $z(x,0) = 0$, 故在 $R^n\times[0,T]$ 中 $z(x,t) = 0$. 因此可得在 $R^n\times[0,T]$ 中 $u_1 = u_2$.

[参 考 文 献]

[1] Schauder J. Über lineare elliptische Differentialgleichungen zweiter Ordnung[J]. Math Z, 1934, **38**(1): 257-282.

[2] Schauder J. Numerische Absch¾dtzungen in elliptischen linearen Differentialgleichungen[J]. Studia Math, 1934, **5**(1): 34-42.

[3] Campanato S. Propriet di una famiglia di spazi funzionali[J]. Ann Scuola Norm Sup Pisa, 1964, **18**(3): 137-160.

[4] Trudinger N S. A new approach to the Schauder estimates for linear elliptic equations[J]. Proc Centre Math Anal Austral Nat Univ, 1986, **14**: 52-59.

[5] Caffarelli L A. Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations[J]. Ann Math, 1989, **130**(1): 189-213.

[6] Ciliberto C. Formule di maggiorazione e teoremi di esistenza per le soluzioni delle equazioni paraboliche in due variabili[J]. Ricerche Mat, 1954, **3**(1): 40-75.

[7] Campanato S. Equazioni paraboliche del secondo ordine e spazi $\mathscr{L}^{2,\lambda}(\Omega;\delta)$ [J]. Ann Math Pura Appl, 1966, **73**(4): 55-102.

[8] Simon L. Schauder estimates by scaling[J]. Calc Var PDE, 1997, **5**(5): 391-407.

[9] WANG Li-he. On the regularity theory of fully nonlinear parabolic equations Ⅱ[J]. Comm Pure Appl Math, 1992, **45**(2): 141-178.

[10] Friedman A. Partial Differential Equations of Parabolic Type[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Inc, 1964.

[11] Ladyzenskaja O A, Solonnikov V A, Uralceva N N. Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type[M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1968.

[12] Lorenzi L. Schauder estimates for degenerate elliptic and parabolic problems with unbounded coefficients in R^N[J]. Differential Internat Equations, 2005, **18**(5): 531-566.

[13] Lunardi A. Schauder theorems for linear elliptic and parabolic problems with unbounded coefficients in R^N[J]. Studia Math, 1998, **128**(2): 171-198.

[14] Lunardi A. Schauder estimates for a class of degenerate elliptic and parabolic operators with unbounded coefficients in R^N[J]. Annali della Scuola Normale Superiore Pisa, 1997, **24**(4): 133-164.

[15] 腾振寰. 抛物型方程一般边界问题解的先验估计[J]. 数学进展, 1965, **4**(3): 334-386.

[16] 王柔怀. 关于一般抛物型边值问题的 Schauder 估计[J]. 吉林大学自然科学学报, 1964, **2**(1): 35-64.

[17] Solonnikov V A. On boundary value problems for linear parabolic systems of differential equations of

general form[J]. Trudy Mat Inst Steklov, 1965, **83**: 3-163.

[18] Cahn J W, Hilliard J E. Free energy of nonuniform system I. Interfacial free energy[J]. J Chem Phys, 1958, **28**(2): 258-367.

[19] Alikakos N D, Fusco G. Slow dynamics for the Cahn-Hilliard equation in higher space dimensions: the motion of bubbles[J]. Arch Rat Mech Anal, 1998, **141**(1): 1-61.

[20] Rossi R. On two classes of generalized viscous Cahn-Hilliard equations[J]. Comm Pure Appl Anal, 2005, **4**(2): 405-430.

[21] Kwembe T A. Existence and uniqueness of global solutions for the parabolic equation of the bi-harmonic type[J]. Nonlinear Anal, 2001, **47**(2): 1321-1332.

[22] XU Meng, ZHOU Shu-lin. Existence and uniqueness of weak solutions for a generalized thin film equation[J]. Nonlinear Anal, 2005, **60**(4): 755-774.

[23] YIN Jing-xue, LIU Chang-chun. Regularity of solutions of the Cahn-Hilliard equation with concentration dependent mobility[J]. Nonlinear Anal, 2001, **45**(5): 543-554.

[24] DiBenedetto E. Partial Differential Equations[M]. Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser, 1995.

[25] CHEN Ya-zhe, WU Lan-cheng. Second Order Elliptic Partial Differential Equations and Elliptic Systems[M]. Providence, RI: American Mathematical Society, 1998.

Schauder Estimates for the Parabolic Equation of the Bi-Harmonic Type

YAO Feng-ping, ZHOU Shu-lin

(LMAM, School of Mathematical Sciences, Peking University, Beijing 100871, P.R. China)

Abstract: Global Schauder estimates for the initial-value parabolic problem of the bi-harmonic type were proved. The existence and uniqueness of the solutions in the suitable space were obtained. Similarly to the second-order case, a fomal expression of solutions by the Fourier transform was obtained. Then the regularity, uniqueness, existence of solutions using the potential theory and approximation argument were got. The approach is simple and straightforward.

Key words: bi-harmonic; parabolic; Schauder estimate; existence; uniqueness