

# Lagrange-Maxwell 方程与发电机组 磁饱和参数共振\*

杨志安<sup>1</sup>, 李文兰<sup>2</sup>, 邱家俊<sup>3</sup>, 席晓燕<sup>1</sup>

(1. 唐山学院 唐山市结构与振动重点实验室, 河北 唐山 063000;

2. 天津大学 图书馆, 天津 300072;

3. 天津大学 机械工程学院, 天津 300072)

(王彪推荐)

**摘要:** 推广了 Lagrange-Maxwell 方程, 使之适用于分析发电机组磁饱和和振动问题。应用机电分析动力学方法和电机学理论, 找到了考虑磁饱和时发电机电磁场能, 建立了发电机组电磁激发振动的非线性常微分方程组。发现在磁饱和状态下发电机电磁干扰力包括倍频参数激励成分。应用平均法求得系统主参数共振时的解, 分析了发电机组电磁参数对共振特性的影响, 揭示了一些新现象。

**关键词:** 发电机组; 磁饱和; 平均法; 参数共振

**中图分类号:** O321 **文献标识码:** A

## 引言

电机稳态运行时的磁场分布在电机设计中是非常重要的, 也是最基本的工作。在大多数情况下, 发电机都工作在磁饱和区, 为此, 考虑磁饱和特性对发电机的振动问题具有重要的实际意义和应用价值, 同时也引起了人们的研究兴趣<sup>[1-3]</sup>。经典的 Lagrange-Maxwell 方程是基于电场能  $W_e$  和磁场能  $W_m$  线性情况下得到的<sup>[4]</sup>。但考虑发电机组磁饱和状态下振动问题时, 上述方法失效, 必须加以推广。本文考虑到磁路饱和的非线性特性, 推广了 Lagrange-Maxwell 方程的应用范围, 使之适用于电磁非线性情况, 并应用它研究考虑磁饱和时发电机组扭振的主参数共振。

## 1 推广的 Lagrange-Maxwell 方程

第  $k$  个回路的 Kirchhoff 定律为<sup>[4]</sup>

$$u_k + u_k^c = r_k i_k + u_k^e, \quad (1)$$

式中  $u_k^c$  为电容器电压,  $u_k$  为外电压,  $r_k$  为电阻,  $i_k$  为电流, 电磁感应电势  $u_k^e$  由电磁感应定律确定:

\* 收稿日期: 2006-07-04; 修订日期: 2007-08-08

作者简介: 杨志安(1963—), 男, 河北秦皇岛人, 教授, 博士(联系人, Tel: + 86-315-2028305; Fax: + 86-315-2018158; E-mail: yangzhian@eyou.com)。

$$u_k^i = - \frac{d\phi_k}{dt}. \quad (2)$$

由磁共能  $W_m'$  的关系式, 可得到磁链的关系式<sup>[4]</sup>

$$W_m' = \sum_{k=1}^m \int_{0,0,\dots,0}^{i_1, i_2, \dots, i_m} \phi_k(i_1, i_2, \dots, i_m; q_1, q_2, \dots, q_n) di_k, \quad (3)$$

式中  $q_n$  为广义坐标,  $W_m'$  为磁共能.

$$\phi_k = \frac{\partial W_m'}{\partial i_k}, \quad (4)$$

式中  $\phi_k$  为磁链. 为此得到电磁感应电势  $u_k^i$  为

$$u_k^i = - \frac{d\phi_k}{dt} = - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_m'}{\partial i_k} \right). \quad (5)$$

由  $W_e$  的关系式, 可得电容器电压的关系式<sup>[4]</sup>

$$W_e = \sum_{k=1}^m \int_{0,0,\dots,0}^{e_1, e_2, \dots, e_m} \phi_k(e_1, e_2, \dots, e_m; q_1, q_2, \dots, q_n) de_k', \quad (6)$$

$$u_k^e = \frac{dW_e}{de_k}. \quad (7)$$

由于电耗散函数  $R_k(i_1, i_2, \dots, i_m)$  在线性情况下对  $i_k$  求导即得  $r_{ki}i_k$ , 把得到的  $u_k^i$ 、 $u_k^e$ 、 $r_{ki}i_k$  的关系式代入式(1)得到电路方程

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_m'}{\partial i_k} \right) + \frac{dW_e}{de_k} + \frac{\partial R_k}{\partial i_k} = u_k; \quad (8)$$

用  $Q_j^*$  表示广义有质动力. 由于外电压所作的功包括 Joule 热, 考虑电磁场能量的变化和有质动力所作的功, 从而得到

$$\sum_{k=1}^m u_k i_k = \sum_{k=1}^m r_{ki} i_k^2 + \frac{dW_m}{dt} + \frac{dW_e}{dt} + \sum_{j=1}^n Q_j^* \mathcal{F} \quad (9)$$

将磁能  $W_m$ 、电场能  $W_e$  对时间求导数, 并代入式(9)后, 提出公因子得

$$\sum_{k=1}^m \left[ u_k - r_{ki} i_k - \frac{\partial W_m}{\partial i_k} \frac{1}{i_k} \frac{di_k}{dt} - \frac{\partial W_e}{\partial e_k} \right] i_k = \sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial W_m}{\partial q_j} + \frac{\partial W_e}{\partial q_j} + Q_j^* \right] \mathcal{F} \quad (10)$$

由式(4)知

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_m'}{\partial i_k} \right) = \frac{d\phi_k}{dt} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial \phi_k}{\partial i_r} \frac{\partial i_r}{dt} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_k}{\partial q_j} \mathcal{F} \quad (11)$$

用式(8)中的  $u_k$  代入式(10)的左端并考虑式(11)得到式(10)的左端, 得

$$\sum_{k=1}^m \left[ \left[ \sum_{r=1}^n \frac{\partial \phi_k}{\partial i_r} i_k - \frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right] \frac{di_k}{dt} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi_k}{\partial q_j} \mathcal{F} i_k \right]. \quad (12)$$

考虑到磁场能  $W_m$  和磁共能  $W_m'$  的关系, 使磁场能  $W_m$  对  $i_k$  求导, 式(10)变为

$$\sum_{j=1}^n \left[ \frac{\partial W_m}{\partial q_j} + \frac{\partial W_e}{\partial q_j} + Q_j^* - \sum_{k=1}^m \frac{\partial \phi_k}{\partial q_j} i_k \right] \mathcal{F} = 0; \quad (13)$$

再利用磁能和共能的关系式  $W_m = \sum_{k=1}^m i_k \phi_k - W_m'$ , 则有

$$\frac{\partial W_m}{\partial q_j} = \sum_{k=1}^m i_k \frac{\partial \phi_k}{\partial q_j} - \frac{\partial W_m'}{\partial q_j}. \quad (14)$$

将式(14)代入式(13)得到有质动力  $Q_j^*$  为

$$Q_j^* = \frac{dW_m'}{dq_j} - \frac{dW_e}{dq_j}. \quad (15)$$

考虑式(15)的  $Q_j^*$ , 把电路方程(8)和 Lagrange 方程写成下式:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W_m}{\partial i_k} \right) + \frac{dW_e}{de_k} + \frac{\partial R_k}{\partial i_k} = u_k, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{\partial R_m}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial W_m}{\partial q_j} + \frac{\partial W_e}{\partial q_j} = Q_j^* \end{cases} \quad (16)$$

引入机电系统的 Lagrange 函数和耗散函数

$$\begin{cases} L = T(q_j, \dot{q}_j) - V(q_j) + W_m(i_k, q_j) - W_e(e_k, q_j), \\ R = R_k(i_k) + R_m(q_j, \dot{q}_j). \end{cases} \quad (17)$$

对  $L$  和  $R$  进行相应的运算, 并考虑到  $e_k^* = i_k$ , 则式(16)表示为

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial e_k} \right) - \frac{dL}{de_k} + \frac{\partial R}{\partial e_k^*} = u_k, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_j} = Q_j, \quad k = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n^* \end{cases} \quad (18)$$

将  $e_k$  看作  $q_j$ 、 $i_k$  或  $e_j^*$  看作  $\dot{q}_j$ ,  $U_k$  看作广义力  $Q_j$ , 则式(18)的第 1、2 式就变成一个统一的形式。对于机电耦合系统, 求得系统的动能  $T$ 、势能  $V$  和耗散函数  $R$ , 以及求得电磁系统的磁共能  $W_m$ 、电场能  $W_e$ , 把它们代入式(18)进行运算, 就可以得到机电耦联系统的动力学微分方程组。当电磁场为线性情况下,  $W_m = W_m$ , 则结果和 Lagrange-Maxwell 的结果相同<sup>[4]</sup>。

## 2 磁饱和时发电机气隙磁场能

磁感应强度  $B$  和磁场强度  $H$  之间的非线性关系可用空载特性曲线表示, 在电机学中它代表磁通  $\Phi$  与磁场  $F$  的关系, 也反映了电势  $E$  与激磁电流  $i_f$  之间的关系,  $E$  和  $i_f$  的关系曲线, 电机学中称之为空载特性曲线。考虑磁饱和的非线性特性, 用三次多项式拟和  $B-H$  曲线已具有足够的强度, 即

$$B = \mu_0 H - \mu_1 H^3 = \mu_0 \frac{F}{K_\mu \delta} - \mu_1 \left( \frac{F}{K_\mu \delta} \right)^3 = \Lambda_0 F - \Lambda_1 F^3, \quad (19)$$

式中  $\Lambda_0 = \mu_0 / (K_\mu \delta)$ ,  $\Lambda_1 = \mu_1 / (K_\mu^3 \delta^3)$ ,  $\delta$  为气隙大小,  $\mu_0$  为空气的导磁系数,  $K_\mu$  为饱和系数,  $\mu_1$  由曲线拟和计算而得。

发电机并网运行时, 因为电网的功率和发电机相比要大的多, 可看成无穷大网, 此时定子的磁势决定于电网, 定转子之间的气隙合成磁势<sup>[4]</sup>为

$$F(\alpha, t) = F_j \cos \left[ \omega t + \phi + \theta + \varphi_1 + \frac{\pi}{2} - \alpha \right] + F_s^+ \cos(\omega t - \alpha) + F_s^- \cos(\omega t + \alpha), \quad (20)$$

式中  $F_j$ 、 $F_s^+$ 、 $F_s^-$  分别代表转子磁势、定子的正序、负序磁势的基波幅值,  $\theta$  和  $\phi$  表示功率角和功率因数角。

电机定转子之间的气隙磁场的磁共能为

$$W_m' = \int \Phi dF = \int \left[ \int_S B dS \right] dF = \frac{RL}{2} \int_0^{2\pi} \Lambda_0 F^2 d\alpha - \frac{RL}{4} \int_0^{2\pi} \Lambda_1 F^4 d\alpha = W_{1m}' - W_{2m}', \quad (21)$$

式中  $W_{1m}'$  称为气隙磁场磁共能的线形部分,  $W_{2m}'$  称为磁共能的非线性部分。

因为发电机组转子垂直方向的支撑刚度远大于水平方向的支撑刚度(见图 1), 垂直方向的振动位移远小于水平方向的振动位移, 忽略垂直方向的振动位移令  $Y = 0$ , 得

$$W_{1m}' = \frac{\pi RL \Lambda_0}{2} [ \lambda_0 - (\lambda_2 + \lambda_3 \sin 2\omega t + \lambda_4 \cos 2\omega t) \cos \varphi_1 - (\lambda_1 + \lambda_3 \cos 2\omega t -$$

$$\lambda_5 \sin 2\omega t) \sin \varphi_1] \left[ 1 + \frac{X^2}{2\sigma^2} + \frac{3}{8\sigma^4} X^4 \right] + [ \lambda_{02} - (\lambda_4 + \lambda_5 \sin 2\omega t + \lambda_2 \cos 2\omega t) \cos \varphi_1 - (\lambda_3 + \lambda_4 \cos 2\omega t - \lambda_5 \sin 2\omega t) \sin \varphi_1 - (\lambda_5 \cos 2\omega t - \lambda_6 \sin 2\omega t) \cos 2\varphi_1 + (\lambda_5 \sin 2\omega t + \lambda_6 \cos 2\omega t) \sin 2\varphi_1 ] \left[ \frac{X^2}{2\sigma^2} + \frac{X^4}{2\sigma^4} \right], \quad (22)$$

$$W'_{2m} = \frac{\pi RL \Lambda_1}{2} \left\{ 2a_0 \left[ 1 + \frac{3}{\sigma^2} (X^2 + Y^2) + \frac{45}{8\sigma^4} (X^2 + Y^2)^2 \right] + a_1 \left[ \frac{3}{\sigma^2} (X^2 + Y^2) + \frac{15}{2\sigma^4} (X^3 + Y^3) X \right] + a_2 \left[ \frac{6}{\sigma^2} XY + \frac{15}{\sigma^4} (X^3 Y + XY^3) \right] + \frac{15}{8\sigma^4} a_3 (X^4 + Y^4 - 6X^2 Y^2) + \frac{15}{2\sigma^4} a_4 (X^3 Y - XY^3) \right\}. \quad (23)$$

式中  $\lambda_{01}$ 、 $\lambda_{02}$  和  $\lambda_k$  由电机的电磁参数确定。将式(22)及式(23)代入式(21),便可得到系统的磁共能。

### 3 数学模型

图1为4质量8kW稳极同步发电机组转子轴系扭振实验台的力学模型。它是国产200MW汽轮发电机组的模化模型,模化后发电机组转子轴系由发电机转子、低压缸、中压缸、高压缸4部分组成,用4个集中质量来代替,图中  $I_i (i = 1, 2, 3, 4)$  表示第  $i$  个集中质量的转动惯量,  $\varphi_i (i = 1, 2, 3, 4)$  表示第  $i$  个集中质量的旋转角和扭振角之和,即  $\varphi_i = \Omega + \varphi_i$ , 其中  $\Omega$  是转子轴系转动的角速度,  $\varphi_i (i = 1, 2, 3, 4)$  表示第  $i$  个集中质量的扭振角,  $K_{ij}$ 、 $\mu_{ij} (i = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3, 4)$  表示第  $ij$  段之间的扭转刚度和机械阻尼系数,  $K_X$  为水平方向的支撑刚度,  $\mu_x$  和  $\mu_e$  为电磁阻尼系数,  $m_1$  为发电机转子的质量。按图1, 求出系统的动能  $T$ 、势能  $V$  和耗散函数  $R$  如下

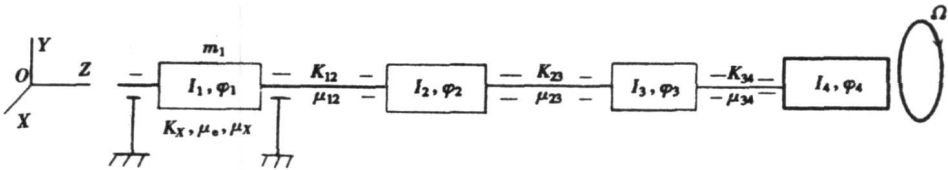


图1 力学模型

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} I_4 \dot{\varphi}_4^2 + \frac{1}{2} m_1 \dot{X}^2,$$

$$V = \frac{1}{2} K_{12} (\varphi_1 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} K_{23} (\varphi_2 - \varphi_3)^2 + \frac{1}{2} K_{34} (\varphi_3 - \varphi_4)^2 + \frac{1}{2} K_X X^2,$$

$$R = \frac{1}{2} \mu_{12} (\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2)^2 + \frac{1}{2} \mu_{23} (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_3)^2 + \frac{1}{2} \mu_{34} (\dot{\varphi}_3 - \dot{\varphi}_4)^2 + \frac{1}{2} \mu_e \dot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} \mu_x \dot{X}$$

按照推广形式的 Lagrange 方程,令  $\alpha_1 = \varphi_1 - \varphi_2$ ,  $\alpha_2 = \varphi_2 - \varphi_3$ ,  $\alpha_3 = \varphi_3 - \varphi_4$ , 经变换,删去代表横向振动的方程,也就是令  $X = 0$ , 得到轴系扭转振动方程组

$$\ddot{\alpha}_1 + \left[ \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} K_{12} - \lambda_2 (I_2 + I_3 + I_4) \sqrt{\left( \left[ \sum_{i=1}^4 I_i \right] I_1 \right)} \right] \alpha_1 - \left[ \frac{1}{I_2} K_{23} + \lambda_2 (I_3 + I_4) \sqrt{\left( \left[ \sum_{i=1}^4 I_i \right] I_1 \right)} \right] \alpha_2 - \left[ I_4 \lambda_2 \sqrt{\left( \left[ \sum_{i=1}^4 I_i \right] I_1 \right)} \right] \alpha_3 = \frac{\varepsilon \pi R L \Lambda_0}{I_1} \left\{ \frac{1}{2} \lambda_1 (I_2^{(1)} \alpha_1^2 + I_2^{(2)} \alpha_2^2 + I_2^{(3)} \alpha_3^2 + I_2^{(4)} \alpha_1 \alpha_2 + I_2^{(5)} \alpha_1 \alpha_3 + I_2^{(6)} \alpha_2 \alpha_3) - \right.$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{6} \lambda_2 (I_3^{(1)} \alpha_1^3 + I_3^{(2)} \alpha_2^3 + I_3^{(3)} \alpha_3^3 + I_3^{(4)} \alpha_1 \alpha_2^2 + I_3^{(5)} \alpha_1 \alpha_3^2 + I_3^{(6)} \alpha_2 \alpha_3^2 + I_3^{(7)} \alpha_1^2 \alpha_2 + \\
& I_3^{(8)} \alpha_1^2 \alpha_3 + I_3^{(9)} \alpha_2^2 \alpha_3 + I_3^{(10)} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) - (\lambda_3 \cos 2\omega t - \lambda_4 \sin 2\omega t) + \\
& (\lambda_3 \sin 2\omega t + \lambda_4 \cos 2\omega t) (I_1^{(1)} \alpha_1 + I_1^{(2)} \alpha_2 + I_1^{(3)} \alpha_3) + \frac{1}{2} (\lambda_2 \cos 2\omega t - \\
& \lambda_4 \sin 2\omega t) (I_2^{(1)} \alpha_1^2 + I_2^{(2)} \alpha_2^2 + I_2^{(3)} \alpha_3^2 + I_2^{(4)} \alpha_1 \alpha_2 + I_2^{(5)} \alpha_1 \alpha_3 + I_2^{(6)} \alpha_2 \alpha_3) - \\
& \frac{1}{6} (\lambda_3 \sin 2\omega t + \lambda_4 \cos 2\omega t) (I_3^{(1)} \alpha_1^3 + I_3^{(2)} \alpha_2^3 + I_3^{(3)} \alpha_3^3 + I_3^{(4)} \alpha_1 \alpha_2^2 + \\
& I_3^{(5)} \alpha_1 \alpha_3^2 + I_3^{(6)} \alpha_2 \alpha_3^2 + I_3^{(7)} \alpha_1^2 \alpha_2 + I_3^{(8)} \alpha_1^2 \alpha_3 + I_3^{(9)} \alpha_2^2 \alpha_3 + I_3^{(10)} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) \Big\} - \\
& \frac{\varepsilon \pi R L \Lambda_1}{2} \Big\{ [ (a_0^6 + 2a_0^{13}) + (a_0^7 + 2a_0^{14}) \cos 2\omega t + (a_0^8 + 2a_0^{15}) \sin 2\omega t + 2a_0^{16} \cos 4\omega t + \\
& 2a_0^{17} \sin 4\omega t] - [a_0^3 + (4a_0^9 + 9a_0^{18}) \cos 2\omega t + (4a_0^{10} + 9a_0^{19}) \sin 2\omega t + \\
& (4a_0^{11} + 9a_0^{20} + 4a_0^{25}) \cos 4\omega t + (4a_0^{12} - 4a_0^{26}) \sin 4\omega t] (I_1^{(1)} \alpha_1 + I_1^{(2)} \alpha_2 + I_1^{(3)} \alpha_3) - \\
& \left[ \frac{1}{2} a_0^6 + \left( \frac{1}{2} a_0^7 + \frac{27}{2} a_0^{21} \right) \cos 2\omega t + \left( \frac{1}{2} a_0^8 + \frac{27}{2} a_0^{22} \right) \sin 2\omega t - \right. \\
& \left. \sin 2\omega t + (4a_0^{11} + 9a_0^{20} + 4a_0^{25}) \cos 4\omega t + (4a_0^{12} - 4a_0^{26}) \sin 4\omega t \right] \times \\
& (I_1^{(1)} \alpha_1 + I_1^{(2)} \alpha_2 + I_1^{(3)} \alpha_3) - \left[ \frac{1}{2} a_0^6 + \left( \frac{1}{2} a_0^7 + \frac{27}{2} a_0^{21} \right) \cos 2\omega t + \right. \\
& \left. \left( \frac{1}{2} a_0^8 + \frac{27}{2} a_0^{22} \right) \sin 2\omega t - \frac{27}{2} a_0^{23} \cos 4\omega t + \frac{27}{2} a_0^{24} \sin 4\omega t \right] (I_2^{(1)} \alpha_1^2 + \\
& I_2^{(2)} \alpha_2^2 + I_2^{(3)} \alpha_3^2 + I_2^{(4)} \alpha_1 \alpha_2 + I_2^{(5)} \alpha_1 \alpha_3 + I_2^{(6)} \alpha_2 \alpha_3) + \left[ \frac{1}{6} a_0^3 + \right. \\
& \left. \left( \frac{1}{6} a_0^4 + \frac{8}{3} a_0^9 + \frac{27}{2} a_0^{18} \right) \cos 2\omega t + \left( \frac{1}{6} a_0^5 + \frac{8}{3} a_0^{10} + \frac{27}{2} a_0^{19} \right) \sin 2\omega t + \right. \\
& \left. \left( \frac{8}{3} a_0^{10} + \frac{27}{2} a_0^{20} + \frac{128}{3} a_0^{25} \right) \cos 4\omega t + \left( \frac{8}{3} a_0^{11} + \frac{27}{2} a_0^{21} + \frac{128}{3} a_0^{26} \right) \sin 4\omega t \right] (I_3^{(1)} \alpha_1^3 + \\
& I_3^{(2)} \alpha_2^3 + I_3^{(3)} \alpha_3^3 + I_3^{(4)} \alpha_1 \alpha_2^2 + I_3^{(5)} \alpha_1 \alpha_3^2 + I_3^{(6)} \alpha_2 \alpha_3^2 + I_3^{(7)} \alpha_1^2 \alpha_2 + I_3^{(8)} \alpha_1^2 \alpha_3 + \\
& I_3^{(9)} \alpha_2^2 \alpha_3 + I_3^{(10)} \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) \Big\} - \varepsilon \left[ \frac{\mu_e}{I_1} \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 + I_2 + I_3 + I_4} \alpha_1 + \right. \\
& \left. \left( \frac{\mu_e}{I_1} \frac{I_3 + I_4}{I_1 + I_2 + I_3 + I_4} - \frac{1}{I_3} \mu_{23} \right) \alpha_2 + \frac{\mu_e}{I_1} \frac{I_4}{I_1 + I_2 + I_3 + I_4} \alpha_3 \right], \quad (24a)
\end{aligned}$$

$$\ddot{\alpha}_2 - \frac{1}{I_2} K_{12} \alpha_1 + \frac{I_2 + I_3}{I_2 I_3} K_{23} \alpha_2 - \frac{1}{I_3} K_{34} \alpha_3 =$$

$$\frac{\varepsilon}{I_2 I_3} [I_3 \mu_{12} \alpha_1 - (I_2 + I_3) \mu_{23} \alpha_2 + I_3 \mu_{34} \alpha_3], \quad (24b)$$

$$\ddot{\alpha}_3 - \frac{1}{I_3} K_{23} \alpha_2 + \frac{I_3 + I_4}{I_3 I_4} K_{34} \alpha_3 =$$

$$\frac{\varepsilon}{I_3 I_4} [I_4 \mu_{23} \alpha_2 - (I_3 + I_4) \mu_{34} \alpha_3], \quad (24c)$$

式中  $I_j^{(i)}$ 、 $a_0^i$  由转动惯量  $I_i$  确定;  $\varepsilon$  是无量纲小参数。

方程组(24)是具有周期系数的非线性常微分方程组, 周期参数激发的4倍频率电磁力矩是因为存在电磁非线性关系时才出现的。利用式(24)可以研究考虑发电机组磁饱和和状态下振动问题。

## 4 发电机组转子轴系的主参数共振

国产某型号 200 MW 汽轮发电机组转子轴系扭振的第 6 阶固有频率为  $102.5 \text{ Hz}^{[5]}$ , 与 4 倍工频(200 Hz) 干扰力频率之间满足主参数共振条件, 即

$$102.5 \text{ Hz} \approx (1/2) 200 \text{ Hz}$$

我国原水电部和美国西屋公司都规定, 发电机组轴系避免发生共振的固有频率避开率为  $7 \text{ Hz}$ 。

由于考虑发电机组磁饱和特性的影响, 周期参数激发的频率除  $2\omega$  外, 还有  $4\omega$ , 频率为  $4\omega$  的周期参数激发项是因为存在电磁非线性关系时才出现的, 当发电机组轴系扭振的固有频率接近  $100 \text{ Hz}$ , 会引起主参数共振。

本文应用非线性振动的平均法, 分析发电机组转子轴系扭振的主参数共振, 为发电机组轴系的设计提供理论依据。

### 4.1 主参数共振的解

引入主参数共振的调谐值  $\sigma_3$ , 则主参数共振关系可表示成

$$(4\omega)/2 = \omega_3 + \varepsilon\sigma_3 \quad (25)$$

应用平均法<sup>[5]</sup> 考虑到主参数共振关系, 可求得主参数共振关于模态振幅  $y_3$  和相位  $\theta_3$  的一次近似解

$$\begin{cases} \frac{dy_3}{dt} = \varepsilon[(d_{14} + d_{15}y_3^2)y_3\sin 2\theta_3 + (d_{16} + d_{17}y_3^2)y_3\cos 2\theta_3 + d_5y_3], \\ \frac{d\theta_3}{dt} = \varepsilon[\sigma_3 + (d_{14} + d_{15}y_3^2)\cos 2\theta_3 - (d_{16} + d_{17}y_3^2)y_3\sin 2\theta_3 + d_8y_3^2]. \end{cases} \quad (26)$$

由下式得对应主参数共振的稳态解

$$\begin{cases} X_1 = (d_{14} + d_{15}y_3^2)y_3\sin 2\theta_3 + (d_{16} + d_{17}y_3^2)y_3\cos 2\theta_3 + d_5y_3 = 0, \\ X_2 = \sigma_3 + (d_{14} + d_{15}y_3^2)\cos 2\theta_3 - (d_{16} + d_{17}y_3^2)y_3\sin 2\theta_3 + d_8y_3^2 = 0. \end{cases} \quad (27)$$

式(27)是非线性超越代数方程组, 对上述方程进行变换, 得关于  $y_3^2$  的高次代数方程, 即参数共振幅频特性曲线

$$\begin{cases} (d_{15}^2 + d_{17}^2 - d_8^2)y_3^4 + 2(d_{14}d_{15} + d_{16}d_{17} - \sigma_3d_8)y_3^2 + \\ (d_{14}^2 + d_{16}^2 - d_5^2 - \sigma_3^2) = 0, \\ \theta_3 = \frac{1}{2} \arctan \frac{(d_{14} + d_{15}y_3^2)d_5 - (d_{16} + d_{17}y_3^2)(\sigma_3 + d_8y_3^2)}{(d_{14} + d_{15}y_3^2)(\sigma_3 + d_8y_3^2) + (d_{16} + d_{17}y_3^2)d_5}, \end{cases} \quad (28)$$

式中  $d_j$  为电磁综合参数, 求法可参见文献[5]。

主参数共振稳态解稳定性由稳定性条件确定。

### 4.2 数值结果分析

本文计算并网对称运行情况, 所取参数如下, 扭振的三阶固有频率分别为  $\omega_1 = 18.25 \text{ Hz}$ ,  $\omega_2 = 82.5 \text{ Hz}$ ,  $\omega_3 = 102.5 \text{ Hz}$ , 机械、电磁阻尼系数  $\mu_e = 0.008$ , 激磁电流  $i_f = 7.5 \text{ A}$ , 有功功率  $P_{Dz}$  为额定值  $8 \text{ kW}$ 。

图 2~ 图 6 是激磁电流  $3 \text{ A}$ 、 $6.3 \text{ A}$ 、 $6.7 \text{ A}$ 、 $6.742 \text{ A}$ 、 $7.5 \text{ A}$  时关于主参数共振的幅频响应曲线, 随激磁电流  $i_f$  的增加, 主参数共振的振幅、运动稳定性、以及共振曲线的拓扑结构均有明显变化, 当激磁电流  $i_f$  小于  $6.1 \text{ A}$  时, 共振曲线呈 V 字型且无稳定解, 曲线形状如图 2; 当激磁电流  $i_f$  达到  $6.1 \text{ A}$  且小于  $6.65 \text{ A}$  时, 共振曲线出现稳定解, 曲线形状如图 3 仍呈 V 字型; 当激磁电流  $i_f$  达到  $6.65 \text{ A}$  且小于  $6.742 \text{ A}$  时, 共振曲线的拓扑结构发生变化, 曲线形状如图 4 所

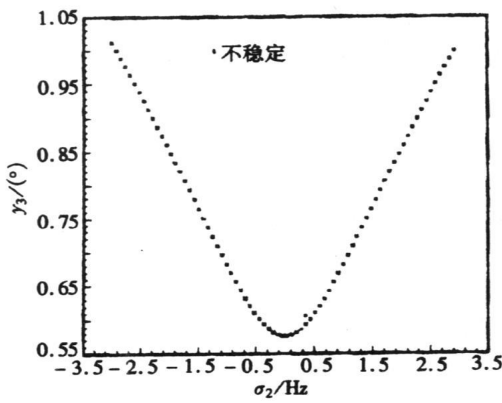


图2 幅频响应曲线  
( $i_f = 3 \text{ A}, P_{Dz} = 8 \text{ kW}$ )

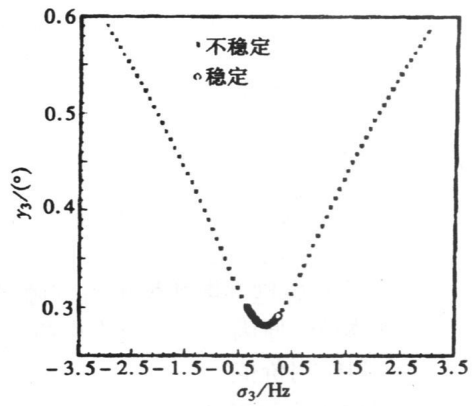


图3 幅频响应曲线  
( $i_f = 6.3 \text{ A}, P_{Dz} = 8 \text{ kW}$ )

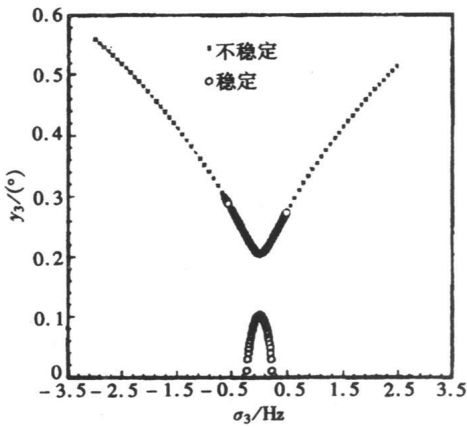


图4 幅频响应曲线  
( $i_f = 6.7 \text{ A}, P_{Dz} = 8 \text{ kW}$ )

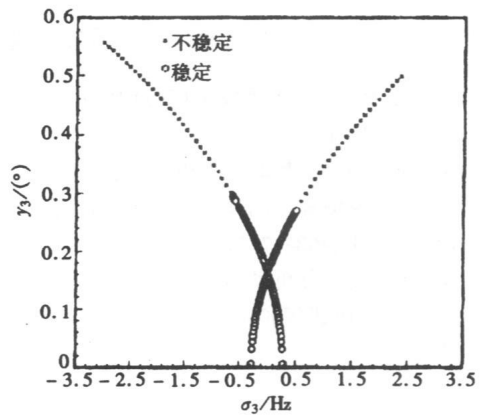


图5 幅频响应曲线  
( $i_f = 6.742 \text{ A}, P_{Dz} = 8 \text{ kW}$ )

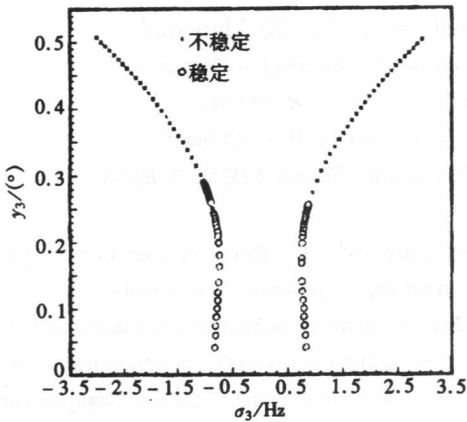


图6 幅频响应曲线  
( $i_f = 7.5 \text{ A}, P_{Dz} = 8 \text{ kW}$ )

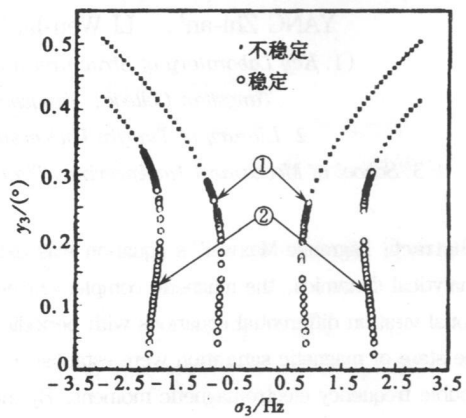


图7 幅频响应曲线  
(①  $P_{Dz} = 8 \text{ kW}$ , ②  $P_{Dz} = 6.25 \text{ kW}$ )

示, 由两条曲线组成; 图5为临界情况, 此时  $i_f = 6.742 \text{ A}$  上下两条曲线相切; 当激磁电流  $i_f$  超

过 6.742 A 后, 共振曲线的拓扑结构再一次发生变化, 曲线形状如图 6 所示。

图 7 是有功功率  $P_{Dz}$  分别为 8 kW、6.4 kW 的幅频曲线, 随同有功功率  $P_{Dz}$  的增加, 主参数共振的两条曲线相互靠近。

## 5 结 论

1) 推广了 Lagrange-Maxwell 方程, 扩大了 Lagrange-Maxwell 方程的应用范围, 使之适用于分析发电机组磁饱和和振动问题。

2) 得到的计及磁饱和影响发电机气隙磁场能的解析式, 指出发电机组的磁饱和和特性是引起倍频干扰力(矩)的原因。对研究发电机存在磁饱和和特性时转子轴系电磁激发的非线性振动具有普遍意义和应用价值。

3) 分析了两种电磁参数对主参数共振的影响。以上结果对大型发电机及一般电机转子的振动问题的研究都具有积极意义。

4) 发电机组在轴系优化设计中应考虑电磁参数的影响。

### [参 考 文 献]

- [1] 邱家俊, 杨志安. 考虑发电机磁饱和和特性时转子轴系的弯扭耦合振动[J]. 黄淮学刊自然科学版, 1995, 11(2): 1-7.
- [2] 杨志安, 邱家俊, 李文兰. 发电机转子气隙磁非线性耦合振动分析[J]. 工程学报, 2000, 13(2): 170-177.
- [3] 钱伟长. 各项异性的非线性静磁场的磁能原理、余能原理, 以及有关的广义变分原理[J]. 上海工业大学学报, 1984, 7(3): 1-4.
- [4] 邱家俊. 机电分析动力学[M]. 北京: 科学出版社, 1992.
- [5] 杨志安. 发电机组轴系扭振及电磁激发横、扭耦合振动研究[D]. 博士学位论文. 天津: 天津大学, 1997.

## Lagrange-Maxwell Equation and Magnetic Saturation Parametric Resonance of Generator Set

YANG Zhi-an<sup>1</sup>, LI Wen-lan<sup>2</sup>, QIU Jia-jun<sup>3</sup>, XI Xiao-yan<sup>1</sup>

(1. Key Laboratory of Structural and Vibration Engineering of Tangshan,  
Tangshan College, Tangshan, Hebei 063000, P. R. China;

2. Library of Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China;

3. School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, P. R. China)

**Abstract:** Lagrange-Maxwell's equation was extended firstly. With the theory of electromechanical analytical dynamics, the magnetic complement energy in air gap of generator was acquired. The torsional vibration differential equations with periodic coefficients of rotor shafting of generator that is in the state of magnetic saturation were established. It is shown that the magnetic saturation may cause double frequency electromagnetic moment. By means of the averaging method, the first approximate solution and corresponding solution of the primary parametric resonance was obtained. The characteristics and laws of the primary parametric resonance excited by the electromagnetism were analyzed and some of new phenomena were revealed.

**Key words:** generator set; magnetic saturation; averaging method; primary parametric resonance